

# Articuler Géométrie et Analyse

B. Destainville\*

Pour favoriser une réflexion et une discussion sur les avantages d'une articulation entre géométrie et analyse, il a été proposé une quinzaine d'activités au niveau du Lycée. Elles ont été choisies pour leur intérêt et leur variété, sans prétendre systématiquement à l'originalité.

Le découpage proposé en trois parties peut paraître hétéroclite ; il a pour origine la façon même dont nous avons travaillé en essayant d'analyser les mécanismes de l'interpénétration entre analyse et géométrie :

partant d'abord du constat de la pertinence de cette interpénétration pour l'éveil de nos élèves aux mathématiques, nous avons développé quelques exemples ;

ensuite, nous prenant au jeu, nous avons nous-mêmes cherché à découvrir des modèles géométriques à propos de fonctions qui jusque là nous avaient seulement intéressés analytiquement ;

la dernière partie privilégie la trigonométrie, parce que, malgré sa richesse et sa valeur formatrice, elle semble actuellement perdre du poids dans notre système éducatif lycéen.

Nous avons donc abordé les thèmes suivants ; quelques-uns sont détaillés en annexe et annoncés dans le texte.

## I - Conjecturer - Visualiser - Justifier

Dans la première sélection d'exemples, nous avons dégagé des démarches variées où, selon l'opportunité, le départ est analytique ou géométrique ; tout au long de l'exercice, une interpénétration des deux disciplines est susceptible de faire progresser l'étude, d'enrichir l'expérience de l'élève et d'augmenter son intérêt : **la géométrie est tellement génératrice d'images mentales !**

Mais, par géométrie, nous entendons aussi bien l'étude d'une figure non repérée que d'une figure repérée, et en particulier le travail sur les représentations graphiques de fonctions.

La diversité des approches peut ainsi créer une nouvelle dynamique et éviter les cloisonnements ; bien entendu, dans chaque exercice il peut être opportun de ne pas perturber certains élèves par une multiplication des démarches ; mais rien n'empêche d'en proposer d'autres aux plus réceptifs, ou à ceux qui demandent une autre motivation ou une autre approche.

---

\* Lycée Toulouse Lautrec, Toulouse.

## Situations et thèmes :

|                                                                                                                                                          |                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 - Problème graphique :                                                                                                                                 | minorer une image, en utilisant le graphique comme un relais entre ensembles de départ et d'arrivée. |
| 2 - Pratique de Thalès :<br>en s'inspirant très classiquement de constructions sur un axe à l'aide d'un axe auxiliaire : thème repris en II-1 (Annexe B) | ranger les nombres $x$ , $x^2$ , $\frac{1}{x}$ , $x^3$ suivant les valeurs de $x$ ;                  |
| 3 - Cercle et graphiques trigonométriques :                                                                                                              |                                                                                                      |
| 4 - Aire d'un quadrilatère variable :<br>nous avons déjà développé par ailleurs l'intérêt de la géométrie pour matérialiser des fonctions constantes.    | équations - inéquations ; (Annexe A)<br><br>fonction constante ;                                     |
| 5 - Une généralisation :                                                                                                                                 |                                                                                                      |
| 6 - Deux triangles de même aire :                                                                                                                        | avec paramétrage :                                                                                   |
| 7 - La somme constante de ces aires :<br>Thème repris en II-1 (Annexe B)                                                                                 | une égalité de fonctions ;<br><br>une somme de fonctions ;                                           |

## II - Appréhender autrement les études de fonctions

Nous avons initialement écrit "donner du sens aux études de fonctions". Un participant a justement fait remarquer que les études analytiques poursuivent le même objectif. Il est évident dans notre esprit que la géométrie est un outil supplémentaire et complémentaire, mais non obligé.

A partir de fonctions très classiques, nous nous sommes livrés à la recherche de supports géométriques à la réflexion ; des élèves de lycée ont été très sensibles à ces nouvelles approches.

## Situations et thèmes :

|                                                                                                                      |                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 - $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ :<br>trois situations géométriques et une situation graphique :<br>(voir l'annexe B) | découverte graphique d'un minimum ;<br>et<br>découverte graphique des comportements asymptotiques |
| 2 - $x \mapsto x^2 + \frac{2}{x}$<br>(voir l'annexe B)                                                               | réflexions analogues ;                                                                            |
| 3 - $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ :<br>(voir l'annexe C)                                                                | découverte géométrique des comportements asymptotiques                                            |
| $E \xrightarrow{f} F \quad x \mapsto f(x).$                                                                          |                                                                                                   |

### III - Travailler avec les angles

#### Situations et thèmes :

|                                |  |                                             |
|--------------------------------|--|---------------------------------------------|
| 1 - Triangles d'un tétraèdre : |  | découverte géométrique d'un angle minimum ; |
|--------------------------------|--|---------------------------------------------|

découverte des bornes et du maximum d'un angle par la géométrie ; confirmation par l'étude du cosinus de cet angle et exploitation du sens de variation de  $\cos$  pour conclure.

|                                        |  |                                           |
|----------------------------------------|--|-------------------------------------------|
| 2 - Cylindre inscrit dans une sphère : |  | découverte analytique du volume maximum ; |
|----------------------------------------|--|-------------------------------------------|

le volume du cylindre est fonction du cosinus de l'angle de l'axe avec un rayon de la sphère dont l'extrémité est sur un cercle de base du cylindre ;

le volume maximum du cylindre inscrit est celui de la sphère multiplié par  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

|                                               |  |                      |
|-----------------------------------------------|--|----------------------|
| 3 - Angle dans un cube :<br>(voir l'annexe D) |  | limites d'un angle ; |
|-----------------------------------------------|--|----------------------|

|                                 |  |                                           |
|---------------------------------|--|-------------------------------------------|
| 4 - Un angle droit qui tourne : |  | limites d'une expression trigonométrique. |
|---------------------------------|--|-------------------------------------------|

L'exposé de ces activités a été suivi d'une discussion où les intervenants ont marqué eux aussi leur intérêt pour cette interpénétration entre géométrie et analyse qui, loin de développer un activisme stérile, permet au contraire d'enrichir l'expérience des élèves.

L'étude des fonctions enrichit la géométrie ; inversement, une figure ou une représentation graphique peuvent donner une visualisation géométrique de la fonction ; à commencer par les figures et les graphiques de référence.

Il est très enrichissant d'aller chercher du matériel dans différentes directions, et la maîtrise de réflexes géométriques peut aussi aider à formuler des conjectures de résultats et de méthodes en analyse.

Et même, pourquoi refuser une justification à partir du graphique ou de la figure lorsque cette justification est pertinente ? (voir les annexes A et D).

Lorsqu'elle favorise le plaisir de la découverte, la géométrie peut contribuer au développement du besoin d'apprendre.

Autres réflexions de l'auteur sur ce thème :

- brochure "Des activités pour nos élèves" (IREM de Toulouse)
- "Des activités analytiques où la géométrie peut aider à comprendre" (Repère, n° 8).

## Annexe A - Utiliser des outils de référence

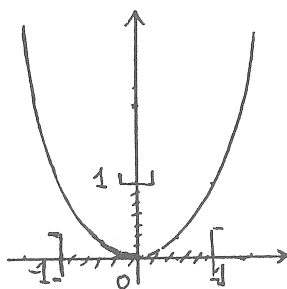
Trois activités : résoudre  $x^2 < 1$  ;  $x^3 < -8$  ;  $\cos x < -0,6$ .

L'étude simultanée de ces trois exercices permet de dégager une ligne directrice :

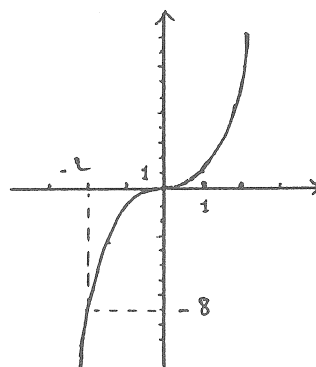
Pourquoi refuser une lecture graphique pour la première inéquation, alors qu'elle est la seule méthode pour la deuxième en Seconde (sans le second degré), et qu'il n'y a pas de méthode algébrique pour la troisième.

Une fois admis que, pour ce type de fonction, l'image d'un intervalle est un intervalle, on utilise le sens de variation pour des intervalles où la fonction est monotone.

La lecture graphique n'est qu'une visualisation de ce raisonnement. Ici, nous utilisons des outils de références de Seconde :

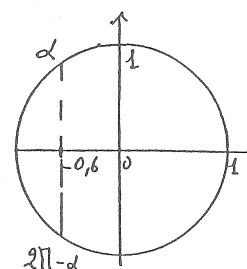
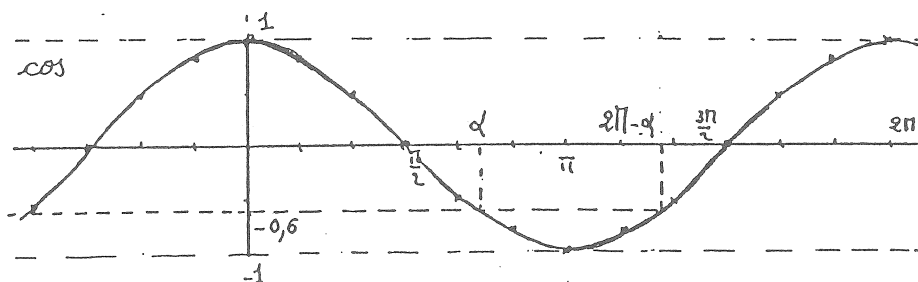


pour  $x^2 < 1$ ,  $S = ] -1 ; 1 [$



pour  $x^3 < -8$ ,  $S = ] -\infty ; -2 [$

La réflexion algébrique peut perdre de son formalisme ; les intervalles apparaissent sur l'axe des abscisses ;  
l'interpénétration des démarches est source d'enrichissement.



Aussi bien par une lecture graphique que par une lecture sur le cercle trigonométrique, on peut énoncer :

sur  $[ 0 ; 2\pi [$  , pour  $\cos x < -0,6$

avec  $\cos^{-1}(-0,6) = \alpha$  et  $\alpha \approx 2,2$  , l'ensemble solution est

$S = ] \alpha ; 2\pi - \alpha [$

*Conclusion :*

*Nous avons valorisé des recherches d'antécédents ; plus généralement, toute réflexion sur la liason entre intervalle source et intervalle image, même s'il ne s'agit pas de figures de référence, peut gagner en clarté si elle est accompagnée d'une visualisation graphique.*

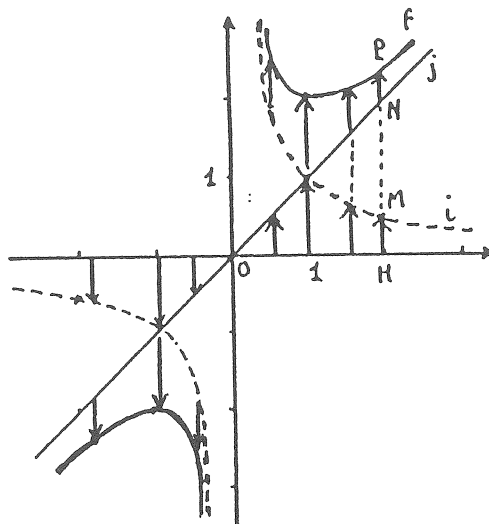
## Annexe B - A propos de $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x^2 + \frac{2}{x}$

### I - Etude graphique de $f$ : une somme de fonctions

Soient  $i$  et  $j$  les fonctions définies par  $i(x) = \frac{1}{x}$  et  $j(x) = x$ .

Pour chaque valeur non nulle du réel  $x$ , on peut considérer  $H(x;0)$ ,  $M(x;i(x))$  et

$N(x;j(x))$ , ainsi que  $P(x; i(x)+j(x))$ , établir la relation  $\vec{NP} = \vec{HM}$  (ou  $\vec{HN} = \vec{MP}$ ), et pour chaque valeur de  $x$  procéder à la construction géométrique de  $P$  à partir de  $H$ ,  $M$  et  $N$ .



On peut observer l'évolution du vecteur  $\vec{HM}$ .

graphique de  $x \mapsto x + \frac{1}{x}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

*Ce qui permet de conjecturer graphiquement*

- a) l'existence d'un minimum sur  $]0; +\infty[$  ;
- b) que les graphiques de  $i$  et  $j$  sont asymptotes de celui de  $f$ .

On peut mettre l'expression  $f(x) - f(1)$  sous forme d'un quotient, étudier son signe et confirmer la première conjecture.

$f$  étant impaire, on peut compléter sur  $]-\infty; 0[$ .

Une étude analogue est possible pour  $g$ , avec cependant deux différences :  $g$  n'est ni paire ni impaire, et le minimum n'est pas atteint pour l'abscisse du point d'intersection.

### II - Matérialisations géométriques pour $f$ :

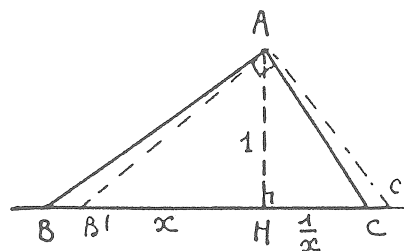
#### 1 - Le segment délimité par un angle droit qui tourne.

La hauteur  $[AH]$  du triangle rectangle  $ABC$  est fixe.

Avec  $AH = 1$ ,

si  $BH = x$  alors  $HC = \frac{1}{x}$  et  $BC = f(x)$ ,

et la figure permet de faire des conjectures sur les comportements de  $i$  et  $f$  pour de grandes valeurs positives et pour de faibles valeurs positives de  $x$  ; on peut ensuite exploiter la parité de  $f$  :



L'utilisation de la somme des limites des fonctions de référence  $i$  et  $j$ , l'observation du graphique du  $I^\circ$  et de la figure ci-dessus permettent des réflexions simultanées pour  $x$  positif, et peuvent favoriser la compréhension et décloisonner les différents types de démarches à propos des limites et des problèmes d'asymptotes.

## 2 - La surface délimitée par un angle droit qui tourne.

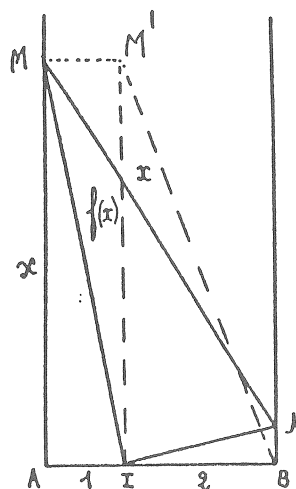
$$AI = 1 \text{ et } IB = 2.$$

M et N se déplacent sur les demi-droites perpendiculaires à (AB) en A et B.

Alors, l'aire du triangle MIN est égale à  $f(x)$ . Les résultats précédents peuvent alors être interprétés avec cette nouvelle situation.

De plus on peut envisager  $M'$ , quatrième sommet du rectangle IAMM'.

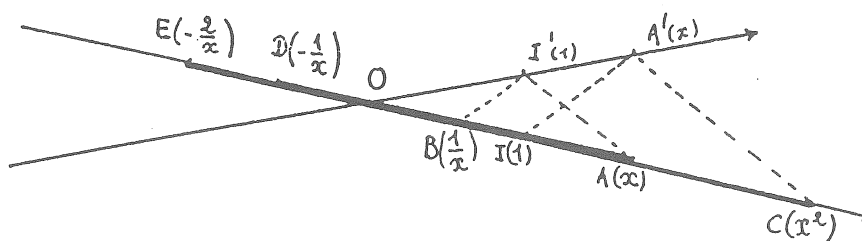
On peut interpréter le comportement de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  en disant que les aires  $f(x)$  et  $x$  des triangles MIN et  $M'IB$  sont de plus en plus proches.



## III - Matérialisation géométrique à l'aide du théorème de Thalès :

Avec les deux axes  $(Ox)$  et  $(Ox')$ , la mise en place des points  $I, I', A$  et  $A'$  tels que  $\overline{OI} = \overline{OI'} = 1$  et  $\overline{OA} = \overline{OA'} = x$  permet ensuite de construire  $B$  et  $C$  tels que  $\overline{OB} = \frac{1}{x}$  et  $\overline{OC} = x^2$ , puis de  $D$  et  $E$  tels que  $\overline{OD} = -\frac{1}{x}$  et  $\overline{OE} = -\frac{2}{x}$ .

Alors  $\overline{DA} = f(x)$  et  $\overline{EC} = g(x)$



On peut faire une série de dessins pour différentes valeurs non nulles de  $x$ , mais aussi suivre les variations de  $f$  et  $g$ , matérialisées sur l'axe  $(Ox)$ , à l'aide d'un logiciel du type "le géomètre", relier le signe de  $f(x)$  et  $g(x)$  au sens des vecteurs  $\vec{DA}$  et  $\vec{EC}$  et, ici encore enrichir la réflexion sur les fonctions.

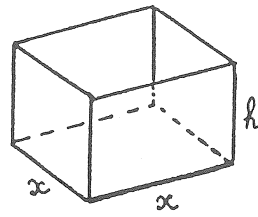
#### IV - Une autre matérialisation géométrique pour $g$ : l'aire d'une boîte parallélépipédique sans couvercle

Le volume est constant et égal à 0,5.

Si la base est un carré de côté  $x$ , alors la hauteur  $h$  mesure  $\frac{1}{2x^2}$  et l'aire totale sans le couvercle est égale à  $g(x)$ .

Ici, il convient de conjecturer avec prudence à propos des limites :

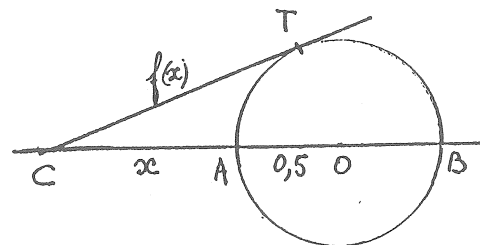
lorsque  $x$  tend vers 0,  $h$  tend vers  $\infty$ , mais rien n'est sûr géométriquement pour l'aire ; c'est le calcul qui permet de conclure.



## ANNEXE C : A propos de : $x \rightarrow \sqrt{x^2 + x}$

I - Utilisation d'un segment défini par une tangente (travail géométrique pour  $x$  positif) :

La figure : un cercle (O) a pour rayon 0,5 ;  
 [AB] est un diamètre ;  
 C est un point de la droite (AB) situé à l'extérieur du segment, et du côté de A.

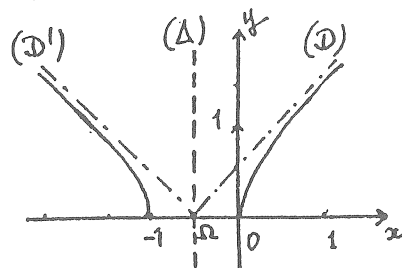


On peut matérialiser  $f(x)$  géométriquement :  
 Soit  $x = AC$  ; avec (CT) droite tangente au cercle en T,  $CT^2 = CA.CB$  et par suite, pour  $x$  positif,  $CT = f(x)$ .

Pour  $x$  très grand, il est possible de conjecturer que les mesures CT et CO sont de plus en plus voisines. Mais ce n'est pas une justification.

Par contre, avec  $CO - CT = \frac{1}{4(CT+CO)}$ , on peut énoncer que  $CO-CT$  tend vers zéro lorsque C s'éloigne à l'infini, et donner une motivation géométrique à l'étude analytique du comportement de  $f$  pour de grandes valeurs positives de  $x$ , en exprimant CT et CO en fonction de  $x$ , pour arriver finalement au travail classique sur la limite de  $\sqrt{x^2+x} - (x+\frac{1}{2})$  à l'infini.

Nous obtenons ainsi une première asymptote (D) pour la représentation graphique (C) de  $f$ .



graphique de  $x \mapsto \sqrt{x^2+x}$   
 et  $x \mapsto (x+\frac{1}{2})$

II - L'étude de la fonction  $f$  (travail analytique) :

Elle permet de détecter le changement du sens de variation.

III - Effet de l'observation de la représentation graphique (C) de  $f$ .

Les calculs d'images et un début de représentation conduisent à conjecturer graphiquement l'existence d'une symétrie axiale. Il est alors normal de procéder au changement d'origine vers le point  $\Omega (-0,5 ; 0)$  milieu du segment des deux points d'arrêts, et de constater que la nouvelle fonction associée à (C) est paire.

Si nous revenons au repère initial, la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $x = -0,5$  est donc axe de (C).

IV - La deuxième asymptote (D') (travail géométrique) :

Par la symétrie  $S_{\Delta}$  d'axe ( $\Delta$ ), on peut alors déduire l'existence d'une seconde asymptote (D') et calculer son équation :  $y = -x - \frac{1}{2}$  ; soit  $h$  la fonction affine associée à (D').

V. Confirmation analytique de cette seconde asymptote :

Par le calcul de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - h(x)]$ , grâce à l'expression conjuguée.

$$x \rightarrow -\infty$$

En conclusion : des élèves de 1<sup>re</sup>S ont apprécié ce va-et-vient entre analyse et géométrie

## ANNEXE D : Limites d'un angle de l'espace

Dans le parallélépipède rectangle ci-contre, sur l'axe  $(A, \vec{i})$  tout point P est repéré par son abscisse x.

Soit  $\beta$  une mesure en degrés de l'angle  $\widehat{PBQ}$  ; alors, avec  $BP^2 = 9 + x^2$ ,  $BQ^2 = 25$ , et  $PQ^2 = 25 + (3-x)^2$ ,

$$\cos \beta = \frac{BP^2 + BQ^2 - PQ^2}{2 \cdot B.P.B.Q} = \frac{3x}{5\sqrt{9+x^2}}$$

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{3x}{5\sqrt{9+x^2}}$$

### I. Conjecture géométrique :

Appelons H la projection orthogonale de Q sur  $(BB')$ .

Si nous admettons que la droite  $(BP)$  se rapproche de plus en plus de  $(BB')$  lorsque P s'éloigne à l'infini,

$$\text{alors } \lim_{+\infty} f = \cos \widehat{HBQ} = 0,6$$

$$\text{et } \lim_{-\infty} f = \cos (180 - \widehat{HBQ}) = -0,6.$$

Sans prétendre avoir les réponses, nous pouvons tout de même poser les questions suivantes :

"Cette démarche n'a-t-elle pas valeur de démonstration ?"

"L'infini est-il mal abordé dans cette réflexion géométrique ?"

### II. L'étude analytique :

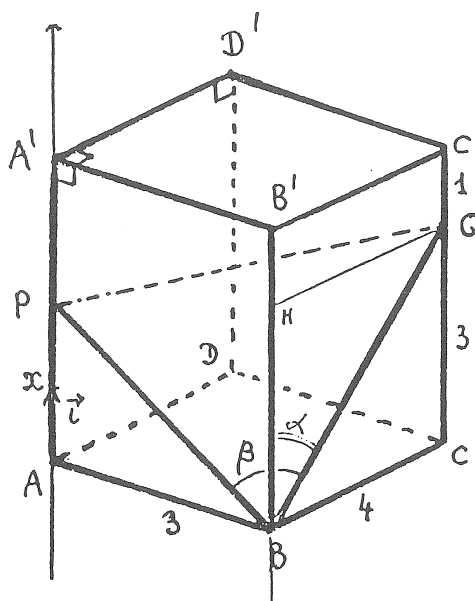
a) pour f : la fonction est impaire ;

pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \frac{3}{5\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$  ; on peut donc étudier les variations sans dériver, à l'aide

des fonctions de références ; et l'on retrouve la limite ;

pour  $x \leq 0$ , les conclusions s'obtiennent par symétrie.

b) Pour  $\beta$  :  $\cos$  étant décroissante sur  $[0, 180]$ , on obtient le tableau ci-contre, avec  $\alpha \approx 127^\circ$ .



|         |           |      |              |
|---------|-----------|------|--------------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$    |
| $f$     | $-0,6$    | $0$  | $+0,6$       |
| $\beta$ | $\alpha$  | $90$ | $180-\alpha$ |

*Ici encore, l'élève motivé par la géométrie peut apprécier l'apport de conjectures à partir d'une figure. Il n'existe pas d'itinéraire privilégié pour favoriser le plaisir de la découverte. Et sans lui ... !*