

A cheval entre la géométrie et l'algèbre

M. Grand'Henry-Krysinska*

Dans le présent exposé nous proposons une familles de problèmes autour d'une surface dite *selle de cheval* dans le but d'illustrer les deux idées directrices suivantes. Selon la première idée, il est avantageux d'utiliser plusieurs méthodes de résolution dans beaucoup de problèmes relevant de la géométrie; par exemple on peut associer aux méthodes de la géométrie synthétique celles de la géométrie analytique. Selon la deuxième idée, il est très fréquent que les réponses apportées aux questions mathématiques au niveau de l'école secondaire ne nécessitent pas d'outils mathématiques compliqués et peuvent même servir pour construire certains de ces outils; par exemple le fonctionnement de la méthode des coordonnées ne demande pas, au départ, beaucoup de connaissances en géométrie analytique, mais on peut s'exercer à découvrir son intérêt et à l'utiliser directement sur un chantier de problèmes.

Les problèmes exposés ci-dessous ont été proposés dans les classes de niveaux différents. Les élèves de troisième de collège et de première de lycée (cours de 3 heures de mathématiques) ont travaillé sur le problème de la table de multiplication. Les problèmes 2, 3, 4 ont été proposés dans les premières et terminales de lycée avec 7 heures de mathématiques par semaine dans le cadre de l'enseignement de la géométrie synthétique et analytique dans l'espace.

1. Une table de multiplication

Considérons la table de multiplication de notre enfance et supposons-la disposée dans un plan horizontal. Au milieu de chacune de ces cases, dressons à la verticale un bâtonnet dont la hauteur soit proportionnelle à la valeur marquée dans la case. Les sommets de tous ces bâtonnets vont se disposer sur une sorte de surface au-dessus de la table. Décrivez cette surface.

Indication pratique: une manière commode pour réaliser la construction demandée consiste à planter des bâtonnets (par exemple ceux que l'on vend pour faire des brochettes) dans une plaque de polystyrène expansé ("frigolite") ou d'utiliser des éléments du jeu Lego.

Voici le tableau représentant une partie de la table de multiplication:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

* GEM, Louvain-la-Neuve, Belgique

Représentons la forêt de bâtonnets en perspective cavalière. Pour des raisons de commodité, on a dessiné plus que des bâtonnets.

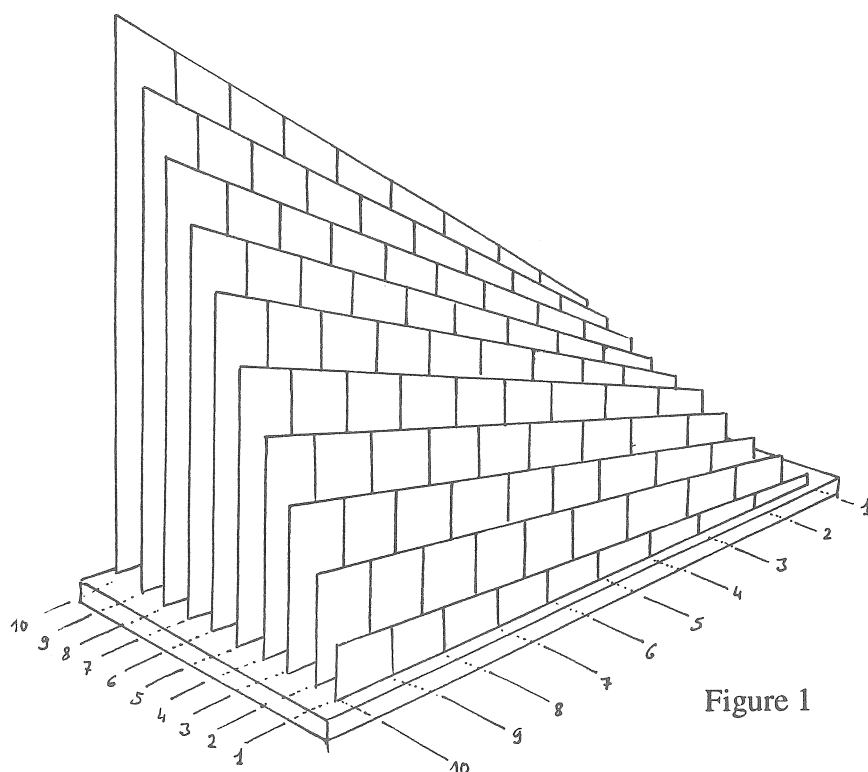


Figure 1

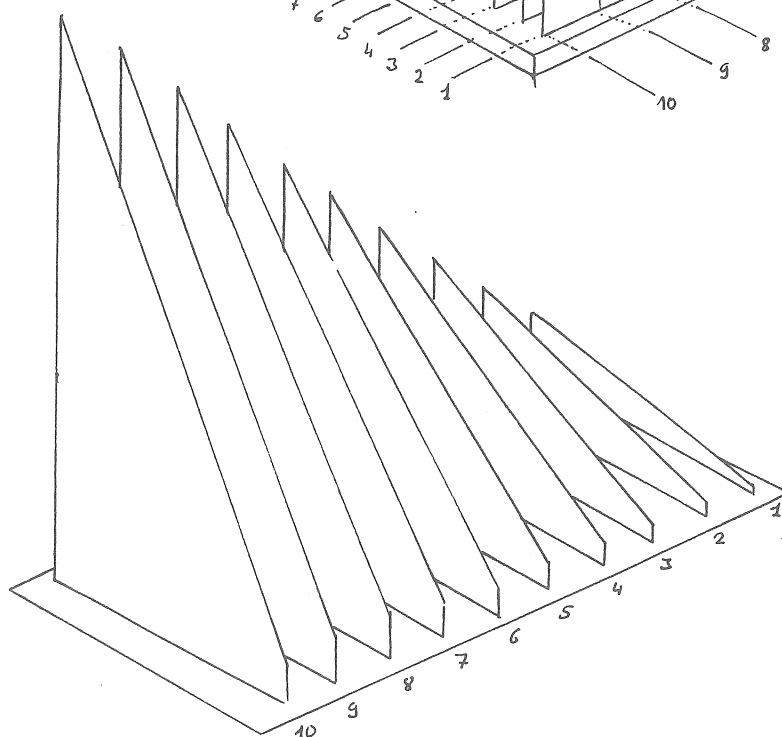


Figure 2

Nous observons que les sommets des bâtonnets qui correspondent à une ligne ou à une colonne de la table de multiplication sont alignés, que les bâtonnets sur sa diagonale ont des hauteurs proportionnelles aux carrés des premiers entiers et que leurs sommets sont situés sur une courbe dite *parabole*. De plus, nous pouvons observer que les sommets des bâtonnets situés sur une ligne parallèle à une diagonale de la table sont disposés sur une parabole ayant la même forme que celle représentant les carrés des nombres entiers (figures 3 et 4). Si nous étudions de plus près ces phénomènes nous réalisons que pour passer d'un bâtonnet au suivant sur la diagonale ou sur une ligne parallèle à la diagonale, on doit allonger les bâtonnets; ce qu'on ajoute augmente chaque fois de 2 unités:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
	+3	+5	+7	+9	+11	+13	+15	+17	+19
2	6	12	20	30	42	56	72		
	+4	+6	+8	+10	+12	+14	+16		

Figure 3

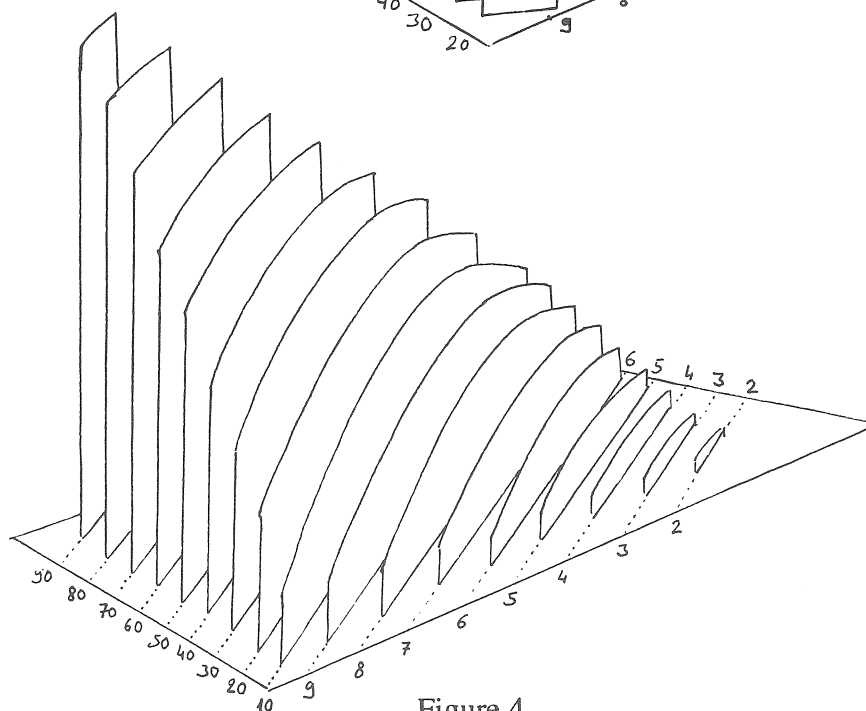
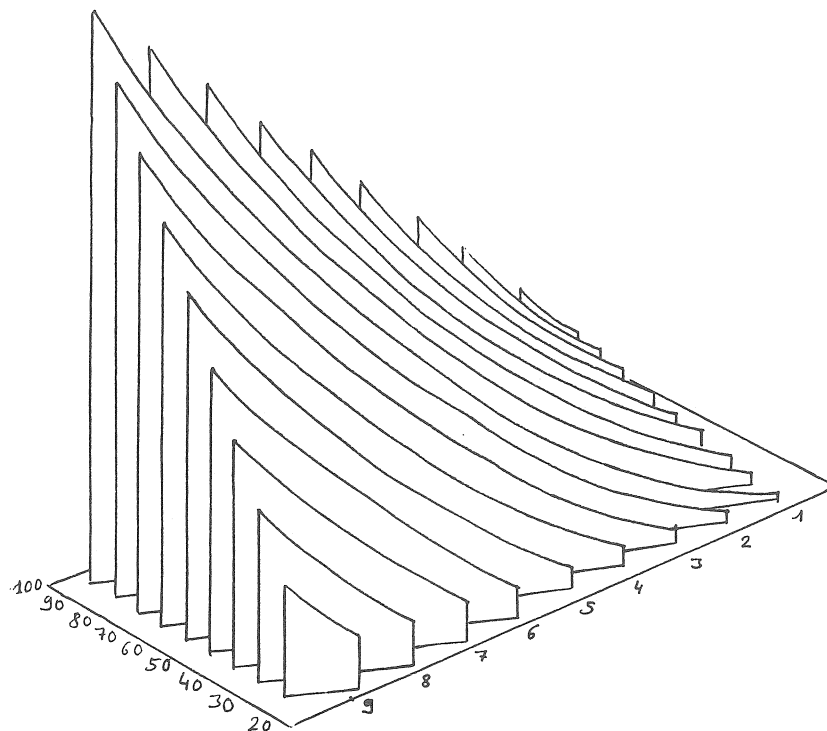


Figure 4

Nous pouvons élargir la table de multiplication aux nombres négatifs, et même, pourquoi pas, à des nombres rationnels. L'image mentale de la surface peut apparaître, à ce stade-là, comme une toile qui s'étend sur les sommets des bâtonnets; plus les bâtonnets sont denses, plus cette image est précise.

2. Une surface d'équation $z=xy$

Considérons un système de trois axes orthogonaux deux à deux. Tout point de l'espace est représenté par son triplet (x,y,z) de coordonnées: x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote. A tout point $p=(x,y)$ du plan Oxy , faisons correspondre juste au-dessus de lui, le point q de coordonnées $(x,y,z=xy)$. L'ensemble des points q se dispose sur une surface. Explorez et décrivez celle-ci.

Remarque: le terme *surface* est utilisé ici dans le sens de l'ensemble de points de l'espace satisfaisant l'équation $z=xy$.

Pour explorer cette surface nous allons utiliser ses sections planes. Commençons par des plans parallèles au plan Oxy ; leurs sections portent le nom de *courbes de niveau*, comme sur les cartes géographiques. Des points appartenant à un tel plan ont la même cote; ce qu'on note par $z=k$ où la lettre k représente un réel quelconque appelé aussi *paramètre*. L'ensemble de points appartenant à la fois à la surface $z=xy$ et à un plan $z=k$ satisfait aussi aux équations $z=k$ et $k=xy$. Dans le cas particulier où $k=0$, il s'agit des points appartenant au plan Oxy et dont les coordonnées vérifient l'équation $0=xy$; les seuls et uniques points qui satisfont à cette condition sont ceux de coordonnées $(x,0,0)$ et $(0,y,0)$; il s'agit donc des points appartenant respectivement aux axes ox et Oy . Quand k est différent de 0, on obtient une famille de courbes dites *hyperboles* satisfaisant aux conditions $z=k$ et $y=k/x$. Chacune des hyperboles a deux asymptotes composées respectivement de points $(x,0,k)$ et $(0,y,k)$. Quand k est positif, toutes ces hyperboles s'empilent au-dessus du premier et du deuxième quadrant; quand k est négatif, les hyperboles s'empilent vers le bas en dessous des deuxième et quatrième quadrants (figure 5).

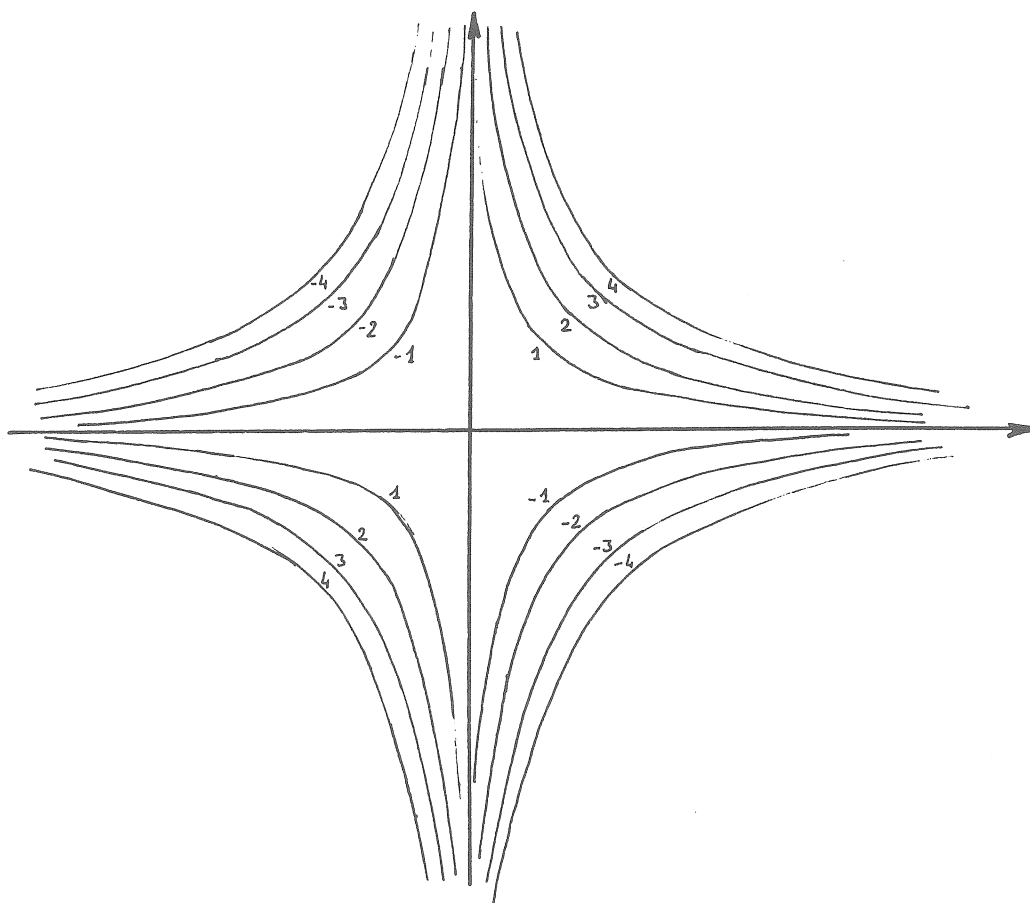


Figure 5

Coupons à présent la surface étudiée par un plan parallèle au plan des axes Ox et Oz . Un tel plan est composé des points (x,k',z) pour un nombre k' donné. Les points appartenant à la

droite qui est à l'intersection des plans $y=k'$ et $z=k'x$. Une telle droite prend une position de plus en plus proche de la verticale quand k' prend des valeurs de plus en plus négatives (figure 1).

De manière analogue on peut étudier la section par un plan parallèle au plan des axes Oy et Oz composé donc des points (k'',y,z) pour un nombre k'' donné. Cette section sera une droite qui est l'intersection des plans $x=k''$ et $z=k''y$. Sa position devient de plus en plus proche de la verticale quand la valeur absolue de k'' grandit (figure 2).

Le problème 1 nous a mis sur la piste d'autres sections planes intéressantes, celles par les plans bissecteurs des plans Oxz et Oyz , et également par des plans qui leurs sont parallèles. Un des plans bissecteurs est composé des points ayant l'abscisse et l'ordonnée identiques, ce qui peut être exprimé sous forme d'égalité $x=y$ dite l'*équation du plan*. L'autre plan bissecteur est composé des points ayant l'abscisse et l'ordonnée opposées, ce qui s'exprime par l'équation $x=-y$. L'intersection du premier plan avec la surface $z=xy$ donne une courbe composée des points (x,x,x^2) ; L'intersection avec l'autre plan est composée des points de coordonnées $(x,-x,-x^2)$. Dans le premier cas, il s'agit d'une parabole tournée vers le bas, également avec le sommet à l'origine. Les deux paraboles sont situées dans les plans bissecteurs donc perpendiculaires; elles sont isométriques car elles ont le même coefficient de x^2 . (figure 6).

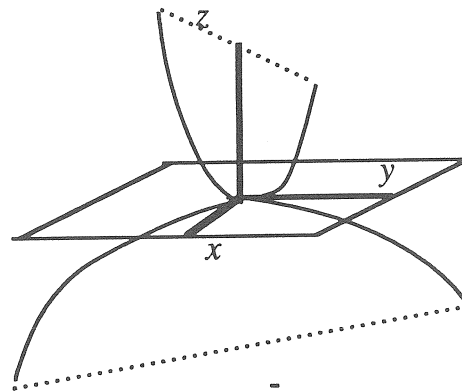


Figure 6

Considérons ensuite des sections par des plans parallèles aux plans bissecteurs. Les coordonnées d'un point du plan parallèle au plan $x=y$ doivent satisfaire à l'équation $y=x+l$ pour un nombre l donné. L'intersection d'un tel plan avec la surface $x=yz$ est composée des points de coordonnées $(x,x+l,x^2+lx)$; il s'agit des points d'une parabole qui est isométrique à la parabole obtenue comme section avec un plan bissecteur; son sommet a pour coordonnée $(-l/2, l/2, -l^2/4)$. Quand l varie, on voit que le lieu de ces sommets est la parabole $(x,-x,x^2)$. D'une manière analogue, on peut étudier les sections de la surface par des plans parallèles au plan $y=-x$; leur équation générale est $y=-x+l'$. Les points de la section avec la surface ont pour coordonnée $(x,-x+l',-x^2+l'x)$. De tels points appartiennent à une parabole qui est isométrique avec la parabole d'un plan bissecteur. Le sommet de cette parabole a pour coordonnées $(l'/2, l'/2, l'^2/4)$. Quand le paramètre l' varie, le sommet parcourt la parabole (x,x,x^2) . Ainsi on peut imaginer que la surface étudiée est engendrée par deux paraboles isométriques situées dans des plans perpendiculaires et se touchant par les sommets; on maintient d'abord l'une fixe et on fait glisser l'autre en maintenant son sommet sur la première, ensuite on maintient l'autre fixe et on fait glisser la première en maintenant son sommet sur cette autre.

En résumé, la surface étudiée contient deux familles de droites; pour cela on lui donne le nom de *surface réglée*. De plus, elle contient deux familles d'hyperboles et deux familles de paraboles; pour cela elle portera le nom de *paraboloïde hyperbolique*. Communément elle est appelée *selle de cheval*. Voici deux autres représentations possibles de cette surface (figures 7 et 8).

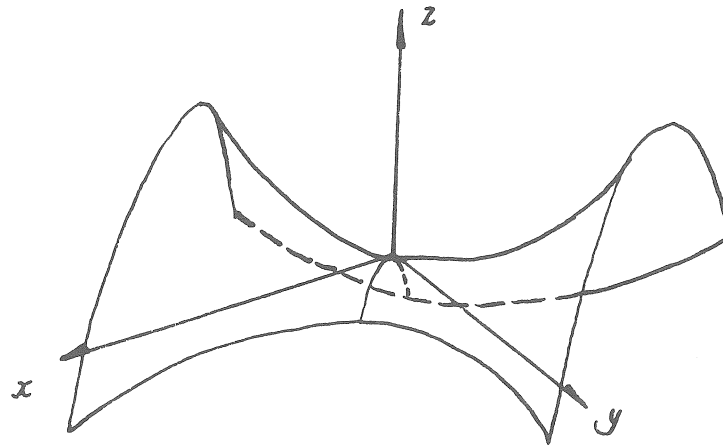


Figure 7

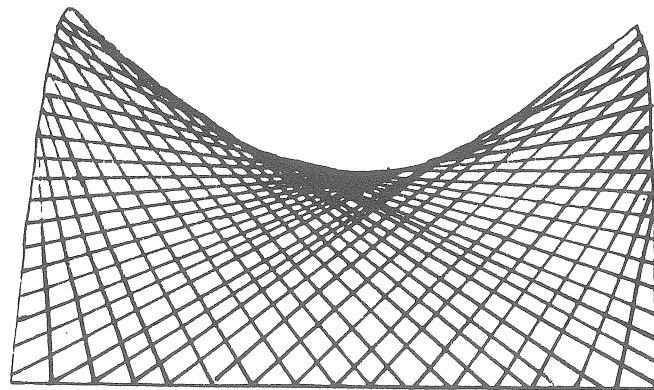


Figure 8

Un usage intéressant de la *selle de cheval* peut être trouvé dans l'interprétation de certaines formules de physique. Citons, par exemple, celle qui exprime la puissance W dissipée par une résistance donnée en fonction de la différence de potentiel V qui lui est appliquée et du courant I absorbé :

$$W = V.I.$$

(Cet exemple est développé dans *Approche Heuristique d'Analyse pour les Débutants* par AHA¹, à paraître). Les surfaces réglées sont utilisées également comme éléments architectoniques car elles peuvent être coulées en béton dans des coffrages en planches.

3. Lieu de points équidistants de deux droites

Quel est le lieu de points équidistants de deux droites orthogonales non sécantes ?

Commençons par représenter deux ⁰droites orthogonales (figure 9). Pour cela servons-nous de la *perspective cavalière* et des propriétés que voici des droites et des plans dans l'espace :

Deux droites sont dites orthogonales si toute droite parallèle à une des droites et passant par un point de l'autre est perpendiculaire à cette autre.

Il existe deux plans parallèles qui contiennent deux droites non coplanaires données.

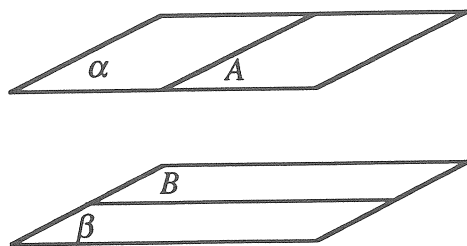


Figure 9

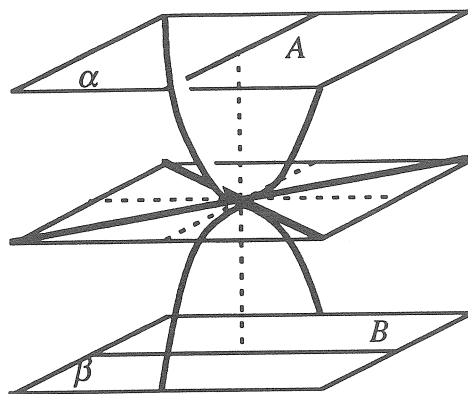


Figure 10

Notons par A et B deux droites orthogonales, α et β des plans parallèles qui les contiennent. Après une première réflexion, on trouve comme points équidistants ceux appartenant aux bissectrices des projections des droites A et B sur le plan médian des plans α et β (figure 10). On trouve également deux paraboles, l'une dans le plan perpendiculaire au plan β et contenant la droite A , l'autre dans le plan perpendiculaire au plan α et contenant la droite B . (figure 10) car toute parabole peut être considérée comme ensemble de points équidistants d'un point et d'une droite. S'agit-il de tous les points équidistants des droites A et B ? Pour répondre il semble que les méthodes de la géométrie synthétique fonctionnent de plus en plus difficilement.

Faisons appel aux méthodes de coordonnées (Figure 11).

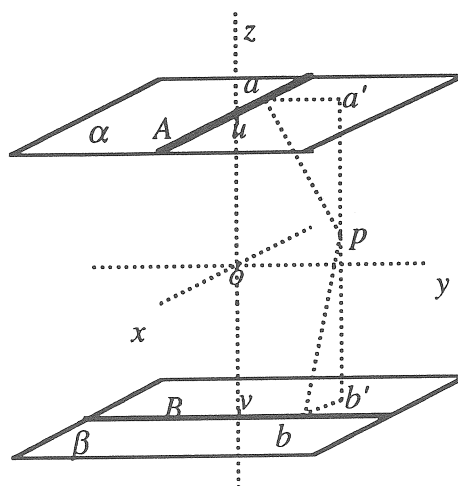


Figure 11

Soit la perpendiculaire commune des droites A et B choisie comme axe Oz ; notons u et v les points d'intersection de l'axe Oz avec respectivement les droites A et B . Plaçons l'origine o au milieu du segment $[u, v]$, et choisissons une unité sur Oz telle que les coordonnées des points u et v soient respectivement $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$. Prenons comme axes ox et Oy les projections perpendiculaires des droites A et B sur le plan médian des plans α et β . Soit p un point équidistant de A et B , a' et b' ses projections orthogonales respectivement sur les plans α et β , a et b les projections orthogonales de a' et b' respectivement sur les droites A et B (figure 11). Etant donné que la droite pa' est perpendiculaire au plan α , elle est perpendiculaire à la droite aa' . Ceci est dû à la propriété suivante :

Une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toute droite du plan passant par son point de percée dans le plan.

Mais la droite aa' est perpendiculaire à la droite A .. Par le *théorème des trois perpendiculaires*, on peut affirmer que la droite pa est aussi perpendiculaire à la droite A . Ainsi la distance entre le point p et la droite A est égale à la distance entre les points p et a . De manière analogue, on peut démontrer que la distance entre le point p et la droite B est égale à la distance entre les points p et b . Notons par (x,y,z) les coordonnées du point p et cherchons une condition qui devrait être satisfaite par x,y et z pour que les distances $d(p,a)$ et $d(p,b)$ soient égales. Par le *théorème de Pythagore*,

$$d(p,a)^2 = d(p,a')^2 + d(a,a')^2,$$

or

$$d(p,a')^2 = (1-z)^2 \text{ et } d(a,a')^2 = y^2$$

d'où

$$d(p,a)^2 = (1-z)^2 + y^2$$

D'une manière analogue on établit que

$$d(p,b)^2 = (-1-z)^2 + x^2.$$

Ainsi, l'égalité $d(p,a) = d(p,b)$ est traduite en *équation cartésienne* $z = x^2 - y^2$.

Remplaçons $4z$ par z' , $x-y$ par x' et $x+y$ par y' . L'équation devient alors $z' = x'^2 - y'^2$. Ce changement de variables est interprété géométriquement comme une transformation de l'espace. Dans ce cas-là, il s'agit de la composée de trois transformations élémentaires. La première est la rotation d'axe Oz . et d'angle $\pi/4$ radians; elle transforme un point de coordonnées (x,y,z) en un point de coordonnées

$$(x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4}, x \cos \frac{\pi}{4} - y \sin \frac{\pi}{4}, z) = (x \frac{\sqrt{2}}{2}, y \frac{\sqrt{2}}{2}, z \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

la deuxième est l'homothétie dont le centre à l'origine et de rapport $\sqrt{2}$; elle transforme un point (x,y,z) en un point $(x\sqrt{2}, y\sqrt{2}, z\sqrt{2})$. La troisième transformation est la compression (ou plutôt un étirement) parallèle à l'axe Oz et de coefficient 4; elle transforme un point (x,y,z) en un point $(x,y,4z)$. La transformation réciproque à la composée considérée transformera la selle de cheval en surface d'équation $4z = x^2 - y^2$. Cette transformation respecte l'alignement des points; donc la surface étudiée est réglée. Les paraboles de la *selle de cheval* subissent une déformation sous l'effet de la compression; les nouvelles courbes s'appelleront, malgré cela, des paraboles. Les hyperboles de la selle de cheval étant horizontales ne subissent pas de déformation due à la compression, mais elles s'agrandissent. sous l'effet de l'homothétie. Tout cela permet d'étendre le nom de *selle de cheval* à la surface qui est le lieu de points équidistants de deux droites orthogonales.

Une autre manière d'étudier la surface d'équation $z = x^2 - y^2$ est de procéder par sections planes comme dans le cas de la surface d'équation $x = yz$. Nous proposons cela comme exercice aux lecteurs courageux.

4. Une surface engendrée par une droite

Voici un cube unitaire $ABCDEFGH$. Explorez et décrivez la surface engendrée par la droite parallèle au plan de la face $EHDA$ et s'appuyant sur les droites DC et AF .

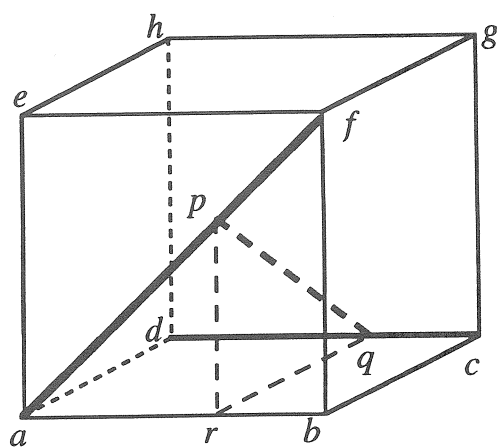


Figure 12

Sur le dessin de la figure 12, la droite pq est parallèle au plan $adhe$ car les droites pr et qr sont parallèles au plan $adhe$. Pour l'affirmer, on se base sur les propriétés suivantes des droites et des plans dans l'espace.

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan et réciproquement.

Deux plans sont parallèles si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Si une droite est contenue dans un plan parallèle à un autre plan, alors elle, aussi, est parallèle à cet autre plan.

La surface considérée est réglée. Elle ressemble, sous certains points de vue, aux surfaces étudiées précédemment. Serait-il vrai alors que certaines sections planes donnent deux familles de paraboles et deux familles d'hyperboles? La recherche de la réponse résiste aux méthodes de la géométrie synthétique; faisons, de nouveau, appel aux coordonnées. Choisissons, par exemple, la droite da comme axe des abscisses, la droite dc comme axe des ordonnées, la droite dh comme axe des cotes; choisissons des unités de telle manière que les points a, c, h aient comme coordonnées respectivement les triplets $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Les points du plan pqr , qui est parallèle au plan des axes ox et Oz , ont l'ordonnée y commune. Par exemple si le point q a pour coordonnées le triplet $(0,y,0)$, le point r a pour coordonnées $(1,y,0)$ et le point p a pour coordonnées le triplet $(1,y,y)$ (car tout point de la diagonale af de la face $abfe$ du cube a son ordonnée égale à sa cote).

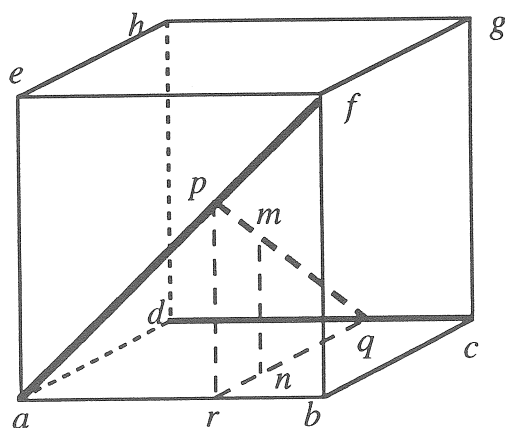


Figure 13

La droite pq appartient à la surface étudiée. Soit m un point quelconque de cette droite.

Son ordonnée est y (la même que celle des points p , q et r), le rapport de son abscisse x à sa cote z est le même que dans le cas du point p (par le théorème de Thalès), d'où

$$\frac{y}{1} = \frac{z}{x} \text{ ou } z = xy$$

Ainsi la condition qu'on doit imposer aux coordonnées (x,y,z) d'un point de la surface considérée prend la forme d'une équation déjà familière, à savoir $z=xy$.

En guise de conclusion, la *selle de cheval* nous apparaît comme un objet à plusieurs facettes, soit comme une figure dans l'espace engendrée par le déplacement d'une parabole, ou celui d'une droite, soit comme ensemble des points équidistants de deux droites non coplanaires, soit comme ensemble des points de l'espace vérifiant une condition en forme d'équation polynomiale à trois inconnues (en ceci nous nous approchons des connaissances de surfaces du temps de Descartes et Fermat; Descartes a écrit que *s'il manque deux conditions dans la détermination d'un point, le lieu du point est une surface.*). Il est intéressant de relever que les premières surfaces étudiées par Descartes et Fermat étaient celles d'équations du type

$$ax+by+cz+d=0 \text{ et } ax^2+by^2+cz^2+d=0.$$

Ci-dessus nous n'avions pas eu besoin d'établir les équations des droites; celles des plans sont apparues fortuitement, seulement dans les cas de plans parallèles aux plans des axes ou aux plans bissecteurs des plans des axes. Dans les démonstrations nous nous sommes appuyés sur les théorèmes de Pythagore et de Thalès et sur les propriétés des droites et des plans dans l'espace.

Ouvrages consultés :

Borceux, F., *Invitation à la géométrie*, Ciaco Editeur, Louvain-la Neuve, 1986.

Bougrove Ya., Nikolsky, S.M., *Fundamentals of linear algebra and analytical geometry*, L. Levant traducteur, Editions Mir, Moscou, 1982.

Kletenik, D., *Problèmes de géométrie analytique*, A. Karvovsky traducteur, Editions Mir, Moscou, 1981.