Liaison : "Ponctuel, Vectoriel, Numérique"

F. Colmez* - P. Damey* - A. Gouteyron*

Le résumé qui suit résulte d'une compilation de fascicules rédigés par le groupe de géométrie de l'IREM de Bordeaux.

On se place ici dans le cadre de la géométrie élémentaire (géométrie dans un plan $\mathscr{P}$, géométrie dans l'espace $\mathscr{E}$).

L'ensemble des vecteurs des couples de points de $\mathscr{P}$ (resp. de $\mathscr{E}$) est noté $\vec{\mathscr{P}}$ (resp. $\vec{\mathscr{E}}$). Lorsque le plan $\mathscr{P}$ (resp. l'espace $\mathscr{E}$) est muni d'un point origine 0 le plan vectoriel $\vec{\mathscr{P}}$ (resp. l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$) est identifié au plan pointé $\mathscr{P}_o$ (resp. à l'espace pointé $\mathscr{E}_o$). Cette identification se justifie par le fait que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_O \longrightarrow \vec{\mathscr{P}} & & \mathscr{E}_O \longrightarrow \vec{\mathscr{E}} \\ & \text{et} & \\ M \longrightarrow \overrightarrow{OM} & & M \longrightarrow \overrightarrow{OM} \end{array} \qquad \text{sont bijectives}$$

Une unité de longueur est fixée pour le plan $\mathscr{P}$ (ou l'espace $\mathscr{E}$). La notation MN désigne la distance des points M et N en se référant à l'unité de longueur choisie.

I. Les trois aspects d'une droite Δ munie d'un repère $(0, I)$.

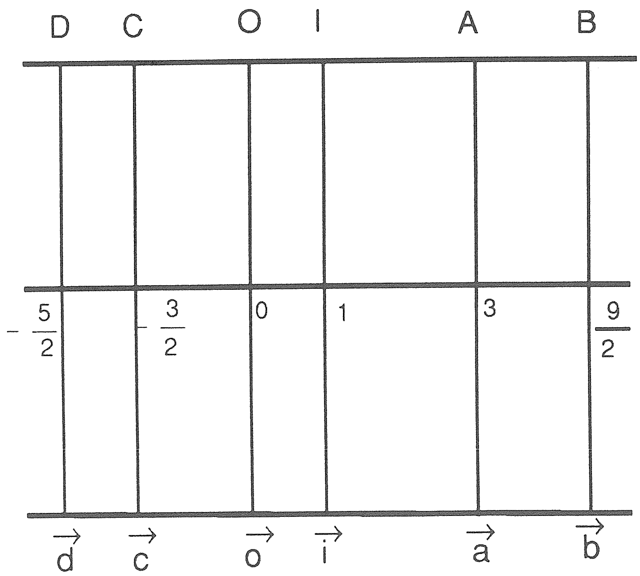
1) *Domaines géométrique, numérique, vectoriel*

Le point 0 joue ici un double rôle : il est à la fois l'origine du plan $\mathscr{P}$ (resp. de l'espace $\mathscr{E}$) et l'origine du repère $(0, I)$. En pareille situation la droite Δ peut revêtir trois aspects suivant qu'on se place dans l'un ou l'autre des domaines suivants :

a) Le domaine géométrique :
Δ est vue comme un ensemble de points géométriques. C'est son aspect premier. Il est sous-jacent aux deux autres.

b) Le domaine numérique(*) :
Δ est vue comme représentation de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Elle porte alors le nom de droite numérique réelle.

c) Le domaine vectoriel :
Δ est vue comme représentant l'ensemble $\mathbb{R}_{\vec{i}}$ des vecteurs colinéaires à $\vec{i}$. Elle porte alors le nom de droite vectorielle.



* Irem de Paris VII
* Faculté des Sciences, Bordeaux
* Lycée Cassin, Bayonne

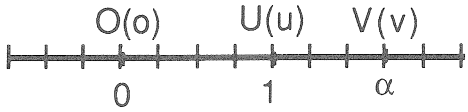
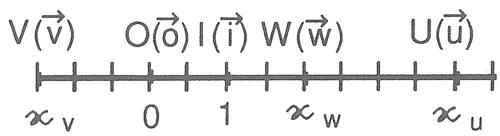
(*) On admet que l'application φ de Δ dans $\mathbb{R}$ qui a tout point M de Δ associe le nombre x_M défini par :

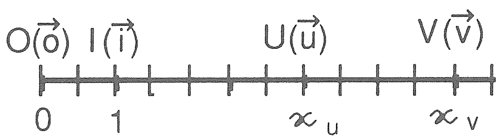
$$\begin{cases} \bullet\ x_M = \dfrac{OM}{OI} & \text{lorsque } M \text{ appartient à la demi-droite } [OI] \\ \bullet\ x_M = -\dfrac{OM}{OI} & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Le réel x_M est appelé abscisse de M dans le repère (O, I) ou sur l'axe (O, I)

2) *Transcriptions d'un domaine dans l'autre.*

Elles sont données dans le tableau suivant :

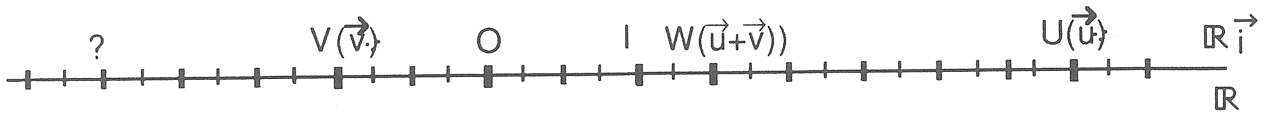
<table>
<tr><th colspan="3">Langage</th></tr>
<tr><th>vectoriel</th><th>des transformations</th><th>numérique</th></tr>
<tr><td>$\vec{v} = \alpha \vec{u}$
α est le c.c.de $\vec{v}$ à $\vec{u}$</td><td>
</td><td>α est l'abscisse de V sur l'axe (O, U)</td></tr>
<tr><td>$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$</td><td>

W est le transformé de O par la composée de $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$
$V \xmapsto{t_{\vec{u}}} W$ ou $U \xmapsto{t_{\vec{v}}} W$</td><td>$x_W = x_U + x_V$</td></tr>
<tr><td>$\vec{v} = \alpha \vec{u}$</td><td>
</td><td>$x_V = \alpha \times x_U$</td></tr>
<tr><td></td><td>V est le transformé de U par l'homothétie de centre O et de rapport α.</td><td></td></tr>
</table>

l'abréviation "c.c." signifie "coefficient de colinéarité".

II. Une introduction du produit scalaire.

1) *Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires*



soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire de $\vec{\mathscr{P}}$ (resp. de $\vec{\mathscr{E}}$) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires à $\vec{i}$: $\vec{u} = a\vec{i}$, $v = b\vec{i}$.

On décide d'appeler *"produit scalaire"* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel ab.

Si on se place dans le domaine numérique, on sait que, quels que soient les réels a et b:

$$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = |a+b|^2 - |a|^2 - |b|^2$$

Dans le domaine vectoriel, ce résultat se traduit par : quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}\vec{i}$:

$$2(u \bullet \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Cette dernière expression du produit scalaire ne prend pas en compte la position relative des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Elle ne fait intervenir que le concept de norme d'un vecteur et n'est donc tributaire que du choix de l'unité de longueur dans le plan $\mathscr{P}$ (ou l'espace $\mathscr{E}$).

2) *Définition du produit scalaire dans* $\vec{\mathscr{P}}$ (ou dans $\vec{\mathscr{E}}$)

On peut donc adopter la définition suivante

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *de* $\mathscr{P}$ (ou de $\vec{\mathscr{E}}$) *le nombre réel, noté* $\vec{u} \bullet \vec{v}$, *défini par :*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

III. Les trois aspects d'un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct (O, I, J)

1) *Domaines géométrique, vectoriel, numérique*

Le point O joue ici un double rôle : il est à la fois l'origine du plan $\mathscr{P}$ et celle du repère (O,I,J). En pareille situation le plan $\mathscr{P}$ peut revêtir trois aspects suivant que l'on se place dans l'un ou l'autre des domaines suivants :

a) Le domaine géométrique

$\mathscr{P}$ est vu comme un ensemble de points géométriques. C'est son aspect premier. Il est sous-jacent aux deux autres.

b) Le domaine vectoriel

$\mathscr{P}$ est vu comme représentation de l'ensemble $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ des vecteurs des couples de points de $\mathscr{P}$. Il porte alors le nom de plan vectoriel.

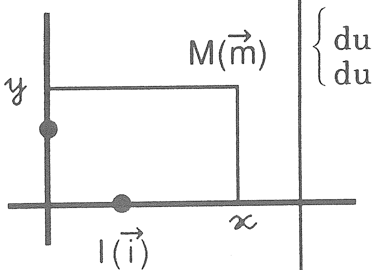
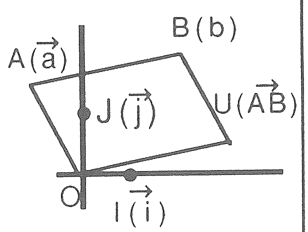
c) Le domaine numérique

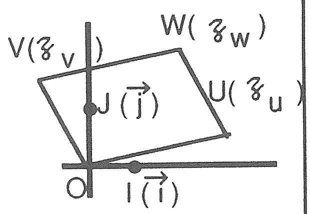
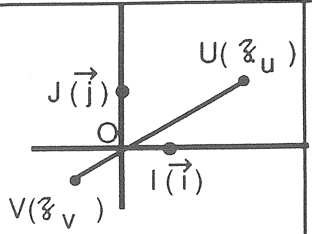
$\mathscr{P}$ est vu comme représentation de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Il porte alors le nom de plan complexe.

2) *Transcriptions d'un domaine à l'autre*

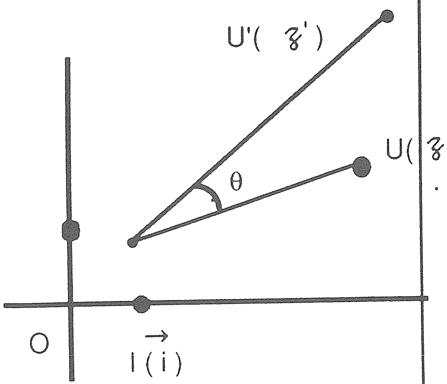
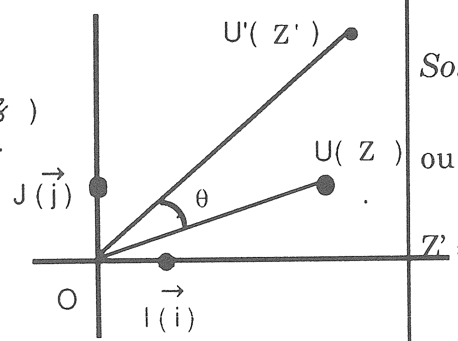
Elles sont, pour l'essentiel, données dans le tableau suivant

:

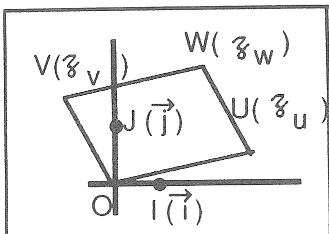
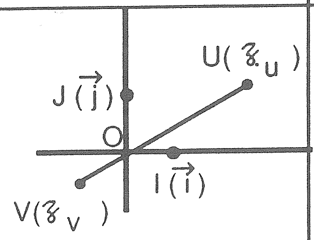
Configuration	Langage "configuration"	Langage vectoriel	Langage "complexe"
	M est l'image $\begin{cases} \text{du vecteur } \vec{u} \\ \text{du complexe } x+iy \end{cases}$	• $\vec{m} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ • $\vec{m}$ est l'image du complexe $x+iy$	• $z_M = x+iy$ est l'affixe du point M (ou du vecteur $\vec{m}$)
	• U est le représentant de $\overrightarrow{AB}$ • U est l'image du complexe $z_B - z_A$	• $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ • $\vec{u}$ est l'image du complexe $z_B - z_A$	• $z_U = z_B - z_A$ est l'affixe du point U (ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$)

	$W = t_{\vec{u}}(V)$ $W = t_{\vec{v}}(U)$	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	$z_w = z_u + z_v$
	V est le transformé de U par l'homothétie de centre O et de rapport α	$\vec{v} = \alpha\,\vec{u}$ (α réel)	$z_v = \alpha\, z_u$ (α réel)

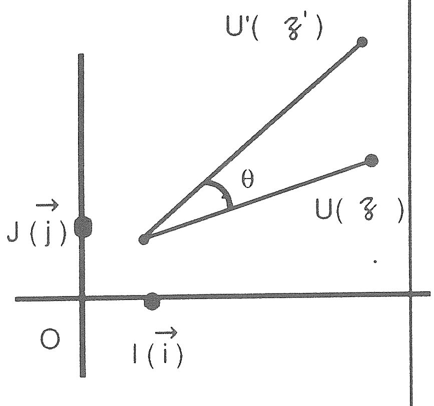
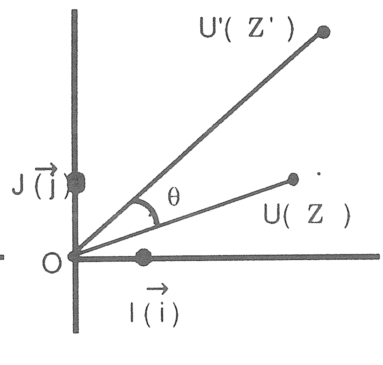
3) ***Ecriture complexe d'une similitude vectorielle directe, d'une réflexion vectorielle.***

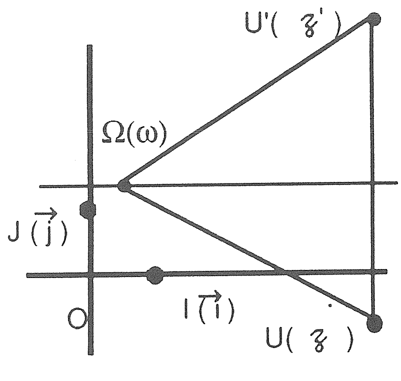
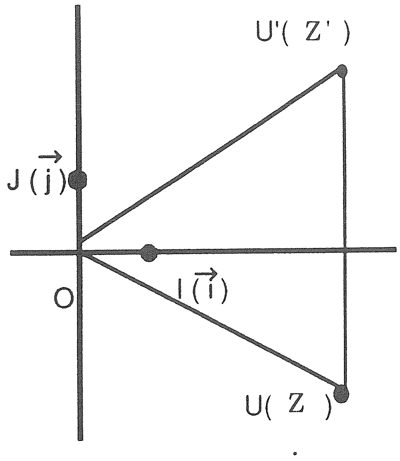
f est la similitude de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ	$\tilde{f}$ est la similitude vectorielle de rapport λ et d'angle θ	écriture complexe
		$Z' = \lambda e^{i\theta} Z$ *Soit* $Z' - \omega = \lambda e^{i\theta}(Z - \omega)$ ou encore $Z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(Z - \omega)$

f la réflexion de droite Δ	$\tilde{f}$ est la réflexion de droite $\mathbb{R}\vec{i}$	écriture complexe

	$W = t_{\vec{u}}(V)$ $W = t_{\vec{v}}(U)$	$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$	$z_w = z_u + z_v$
	V est le transformé de U par l'homothétie de centre O et de rapport α	$\vec{v} = \alpha\,\vec{u}$ (α réel)	$z_v = \alpha\, z_u$ (α réel)

3) ***Ecriture complexe d'une similitude vectorielle directe, d'une réflexion vectorielle.***

f est la similitude de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ	$\tilde{f}$ est la similitude vectorielle de rapport λ et d'angle θ	écriture complexe
		$Z' = \lambda e^{i\theta} Z$ *Soit* $Z' - \omega = \lambda e^{i\theta}(Z - \omega)$ ou encore $Z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(Z - \omega)$

f la réflexion de droite Δ	$\tilde{f}$ est la réflexion de droite $\mathbb{R}\vec{i}$	écriture complexe
		$Z' = \bar{Z}$ *Soit* $Z' - \omega = \overline{Z - \omega}$ ou encore $Z' = \bar{Z} + 2\mathcal{I}m(\omega)$

3)***Exemple d'utilisation des transcriptions précédentes.***

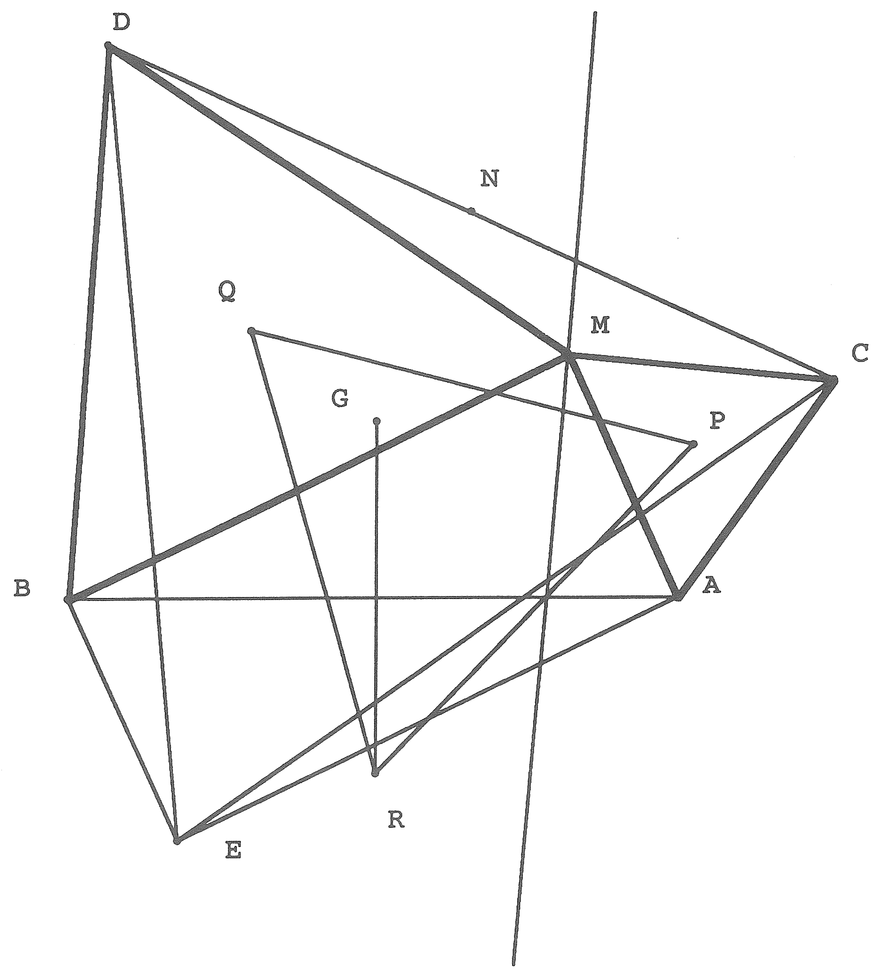
Nous allons montrer ici comment utiliser ces transcriptions entre domaines pour résoudre l'exercice suivant.

Dans le plan $\mathcal{P}$ supposé orienté sont donnés une droite $\mathcal{D}$ et deux points A et B n'appartenant pas à cette droite. A tout point M de $\mathcal{D}$, on associe les points C et D tels que les triangles MAC et BMD soient des triangles équilatéraux de sens direct.

1-On note N le milieu de [C,D]. Déterminer le lieu du point N lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$.

2-Soit E le point de $\mathcal{P}$ défini par l'égalité $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MB}$.
a) Montrer que le triangle CDE est équilatéral et que son centre de gravité est fixe.
b) Comment choisir M sur la droite $\mathcal{D}$ pour que le triangle CDE soit de périmètre minimum?

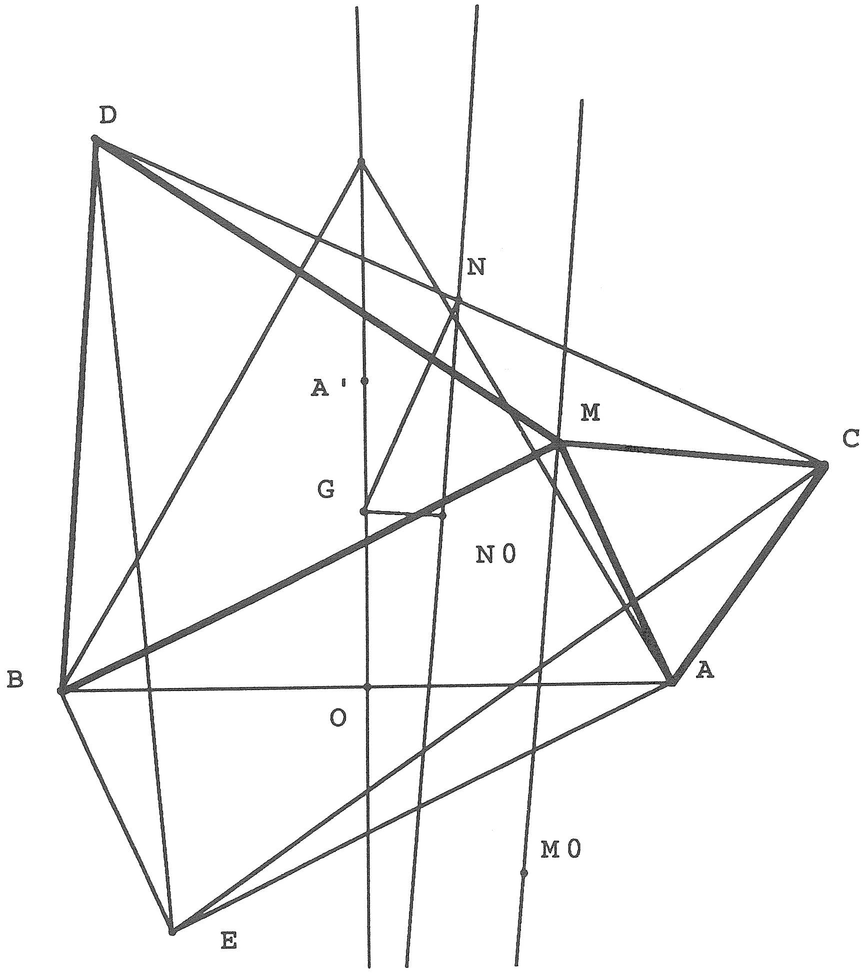
3-On note P et Q les centres de gravité des triangles MAC et BMD et R le symétrique de G par rapport à la droite (AB).
a) Montrer que le triangle PQR est équilatéral.
b) Déterminer le lieu de son centre de gravité K lorsque M décrit la droite $\mathcal{D}$.
c) Comment choisir M sur $\mathcal{D}$ pour que le triangle PQR ait un périmètre minimum.



Solution.

Soit O le milieu du segment [A,B] et A' le point tel (O,A,A') puisse être considéré comme un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$. Dès lors l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut être identifié à $\mathcal{P}$ (plan complexe).

On désignera par une lettre minuscule l'affixe d'un point de P désigné par la lette majuscule du même nom. Ainsi, par exemple on a a = 1, b = -1 et a' = i.



1-Lieu du point N.

a) Calcul de $n = \frac{1}{2}(c + d)$

Soit r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Nous avons $\overrightarrow{BD} = r(\overrightarrow{BM})$ et $\overrightarrow{AC} = r^{-1}(\overrightarrow{AM})$

égalités qui se traduisent par: $d + 1 = -j^2(m+1)$ et $c - 1 = -j(m - 1)$

d'où $c + d = -m(j + j^2) + j - j^2 = m + i\sqrt{3}$

Par suite, on a: $n = \frac{1}{2}m + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Lieu du point N

L'égalité précédente se traduit dans le plan ponctuel $\mathcal{P}$ par: N est le transformé de M par l'homothétie h de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre I, d'affixe $\omega = i\sqrt{3}$ (ω vérifie l'égalité $\omega = \frac{1}{2}\omega + i\frac{\sqrt{3}}{2}$). Il apparaît alors que le triangle AΩB est équilatéral direct (d'où la construction de I). Le lieu du point N est la droite $\mathcal{D}'$ transformée de $\mathcal{D}$ par h.

2-a) Nous avons e = -m et on peut facilement vérifier, par exemple, que

$c + jd + j^2e = 0$ ce qui prouve que le triangle CDE est équilatéral direct. En outre, on a: $g = \frac{1}{3}(e + c + d) = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ce qui prouve que le centre de gravité G du triangle CDE est fixe, G est aussi le centre de gravité du triangle fixe AΩB.

b) Il est clair que la mesure p du périmètre du triangle ECD s'exprime linéairement en fonction de [G,N]: $p = \lambda GN$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$.
Par conséquent p est minimum lorsque GN est minimum, c'est à dire lorsque $N = N_0$ où N_0 est le projeté orthogonal de N sur D'.

Le point M est alors confondu avec le point M_0 où $M_0 = h^{-1}(N_0)$