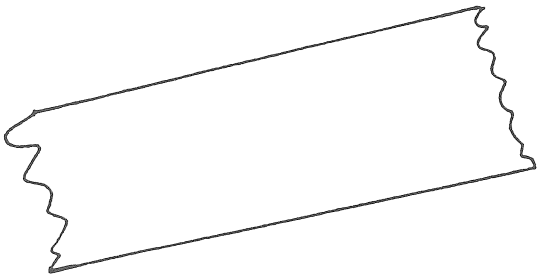
La Bande à bords parallèles

D. Berthe * - M. Picot*

INTRODUCTION :

Le groupe de l'IREM de Lille "Problèmes ouverts" a étudié le problème suivant :
Quelles sont toutes les constructions géométriques qu'on peut réaliser en n'utilisant comme instrument qu'une bande (c'est à dire deux droites parallèles) ?
La règle du jeu est la suivante: chacun dispose d'une bande de carton et d'un crayon ; la bande n'est pas pliable et on ne peut rien marquer dessus.



On peut donc tracer un point, ou une droite , ou deux droites parallèles (écartement fixé), ou prolonger un segment donné.
Avant de commencer, nous dirons qu'un point est constructible s' il apparait comme intersection de deux courbes (ici, un point sera construit en tant qu'intersection de deux droites).

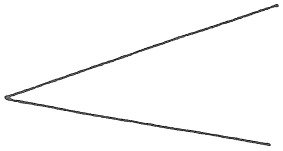
DEROULEMENT DE L'ATELIER :

On propose au groupe les premières constructions, d'un niveau qu'on situe au Collège ; ça ne veut pas dire qu'un élève de Collège les trouverait, mais que les conditions nécessaires pour les justifier lui sont connues.
Chaque auditeur reçoit une feuille polycopiée :

Médiatrice et Milieu

cas où le segment est trop petit

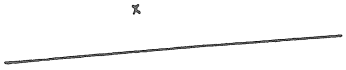
Bissectrice



Parallèle à une droite passant par un point

Perpendiculaire à une droite passant par un point

Symétrique d'un point par rapport à une droite

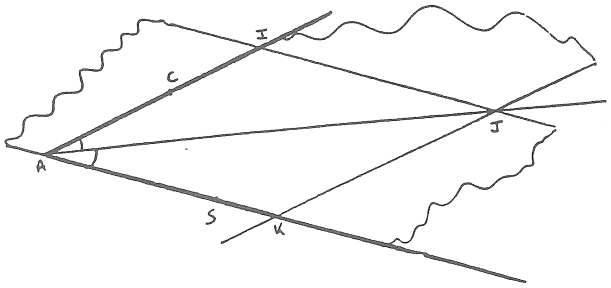


* Lycée Coubertin, Calais..
* Collège Mermoz, Faches Thumesnil.

QUELQUES SOLUTIONS TROUVEES PAR LE GROUPE :

La figure fondamentale utilisée est le losange.

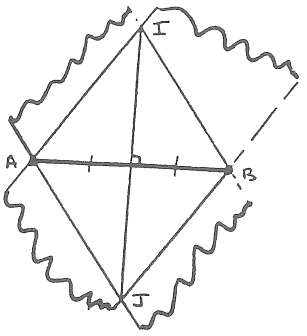
Bissectrice :



On appuye la bande sur les cotés de l'angle et on trace les deux parallèles ; la bissectrice apparait comme la diagonale du losange (construction très pratique pour les élèves du Collège, qui disposent presque tous d'une règle en plastique mais pas toujours d'un compas en état de marche).

Médiatrice et Milieu :

Deux constructions faciles quan les segments sont "assez grands" (plus que la largeur de la bande).
Remarquons qu'il y a deux manières, et deux seulement, d'appuyer la règle sur les deux extrémités du segment en même temps ; ceci n'est plus possible quant le segment est "trop petit".



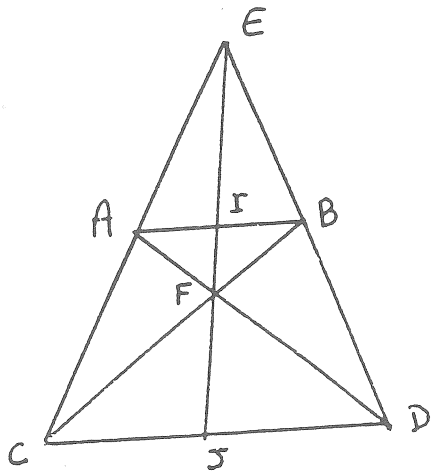
Cas du segment "trop petit" :

On utilise le trapèze complet : ABCD est un trapèze dont les diagonales se coupent en F et les cotés obliques en E. On démontre à l'aide du théorème de Thalès, que la droite (EF) coupent les cotés parallèles en leurs milieux I et J.

Dans le triangle ECJ, $\frac{EA}{EC} = \frac{IA}{JC}$

dans le triangle EDJ, $\frac{EB}{ED} = \frac{IB}{JD}$ d'où $\frac{IA}{JC} = \frac{IB}{JD}$ (1)

dans le triangle ECD, $\frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED}$



La comparaison des triangles FDJ et FAI donne

$$\frac{IA}{JD} = \frac{IF}{JF}$$

et celle des triangles FBI et FCJ donne

$$\frac{IB}{JC} = \frac{IF}{JF}$$

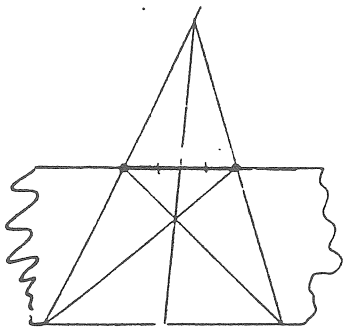
d'où $\frac{IA}{JD} = \frac{IB}{JC}$ (2)

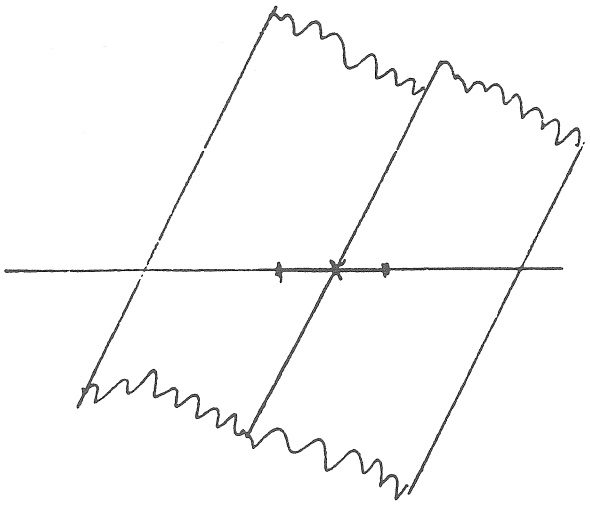
Des égalités (1) et (2), on tire $\frac{IA}{IB} = \frac{JC}{JD} = \frac{JD}{JC}$

I est le milieu de AB et J celui de CD

D'où la construction du milieu pour un segment trop petit :

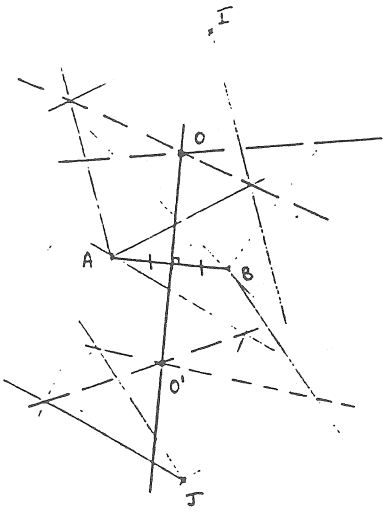
On trace un segment assez long parallèlement au segment donné,et on termine le quadrilatère complet qui fournit le milieu.





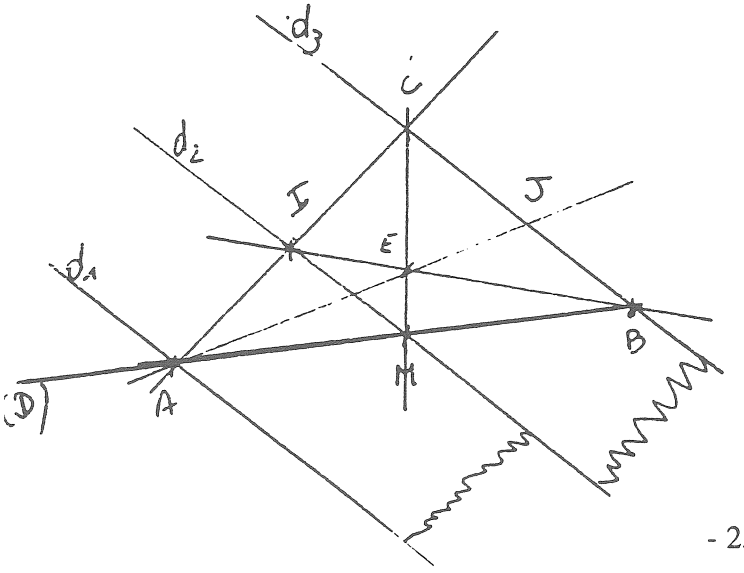
Pour en tracer la médiatrice , on construit d'abord le milieu. Puis on construit un segment plus large ayant le même milieu et le même support (voir ci-contre) ; comme ce segment est "assez large", le lecteur tracera facilement sa médiatrice, et celle-ci sera aussi la médiatrice du segment donné.

Une autre méthode consiste à tracer deux médiatrices dans deux triangles ayant comme coté commun le segment donné. Pour cela, on choisit deux points I et J "assez éloignés" du segment donné AB. Les médiatrices de IA et IB se coupent en O et celles de JA et JB se coupent en O'; la droite (OO') est la médiatrice du segment AB.



Parallèle à une droite (D) passant par un point I

première variante :



En appuyant deux fois la règle sur I, on trace trois droites parallèles d_1, d_2 et d_3 qui coupent (D) en A, M et B ; Il est clair que M est le milieu de [AB] ; (AI) coupe d_3 en C. (CM) et (BI) se coupent en E, centre de gravité du triangle ABC. La droite (AE) qui est la troisième médiane, coupe (BC) en J, milieu de [BC].

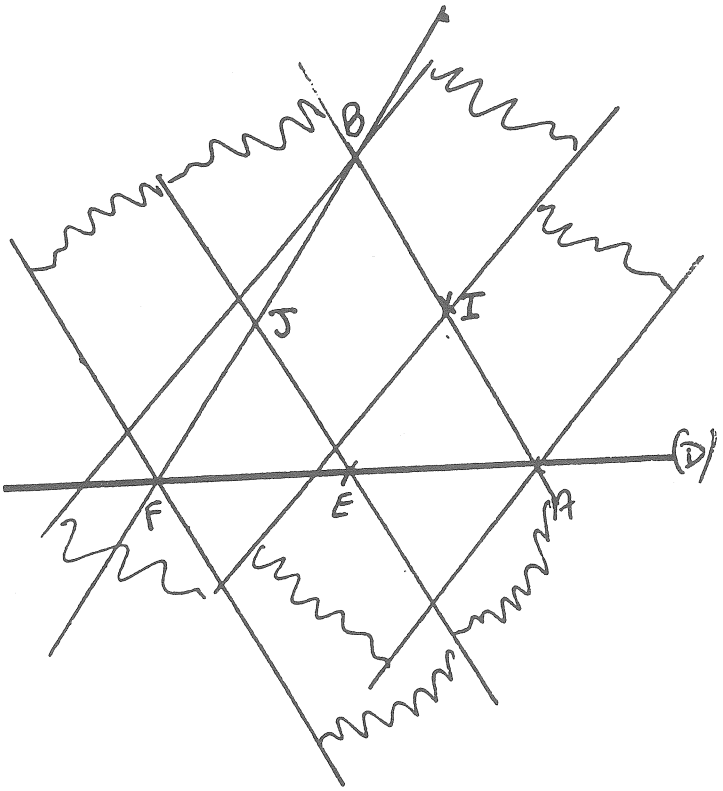
La droite (IJ), passant par les milieux de deux cotés, est parallèle à (D).

deuxième variante :

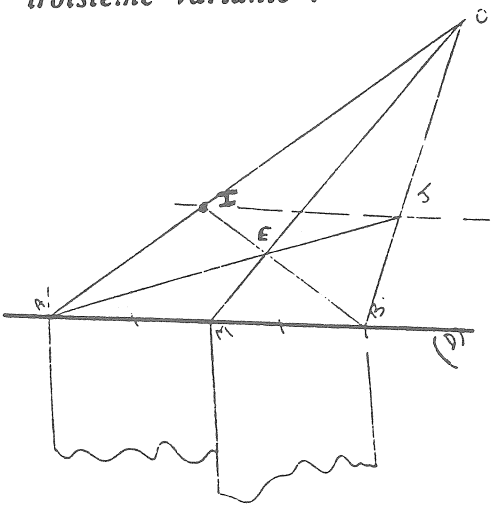
On place la règle deux fois sur I pour obtenir A sur (D) et le symétrique de A par rapport à I.

On trace deux parallèles à (AB) qui coupent (D) en E et F.

On obtient le point J en traçant (FB) ; on montre facilement que les droites (IJ) et (D) sont parallèles.



troisième variante :



On choisit sur (D) un segment AB ayant pour milieu M (il suffit de poser deux fois la règle).

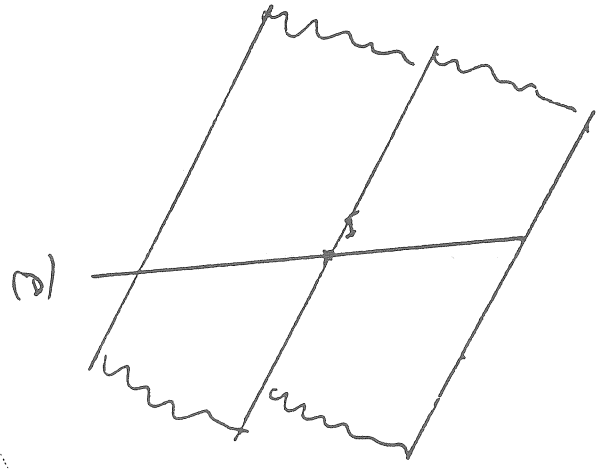
Sur (IA), on choisit un point quelconque O ("assez loin").

On termine le trapèze complet OABIJ : les droites (IB) et (OM) se coupent en E ; (AE) coupe (OB) en J.

Perpendiculaire à une droite (D) passant par I

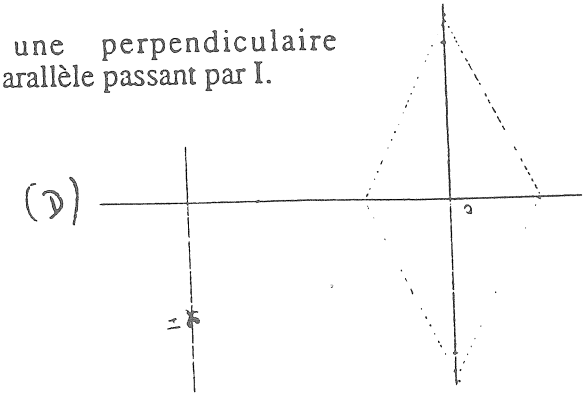
cas où I est sur la droite (D)

Immédiat dès qu'on a construit un segment sur (D) ayant I pour milieu. (se reporter à la construction de la médiatrice).



cas où I n'est pas sur (D) :

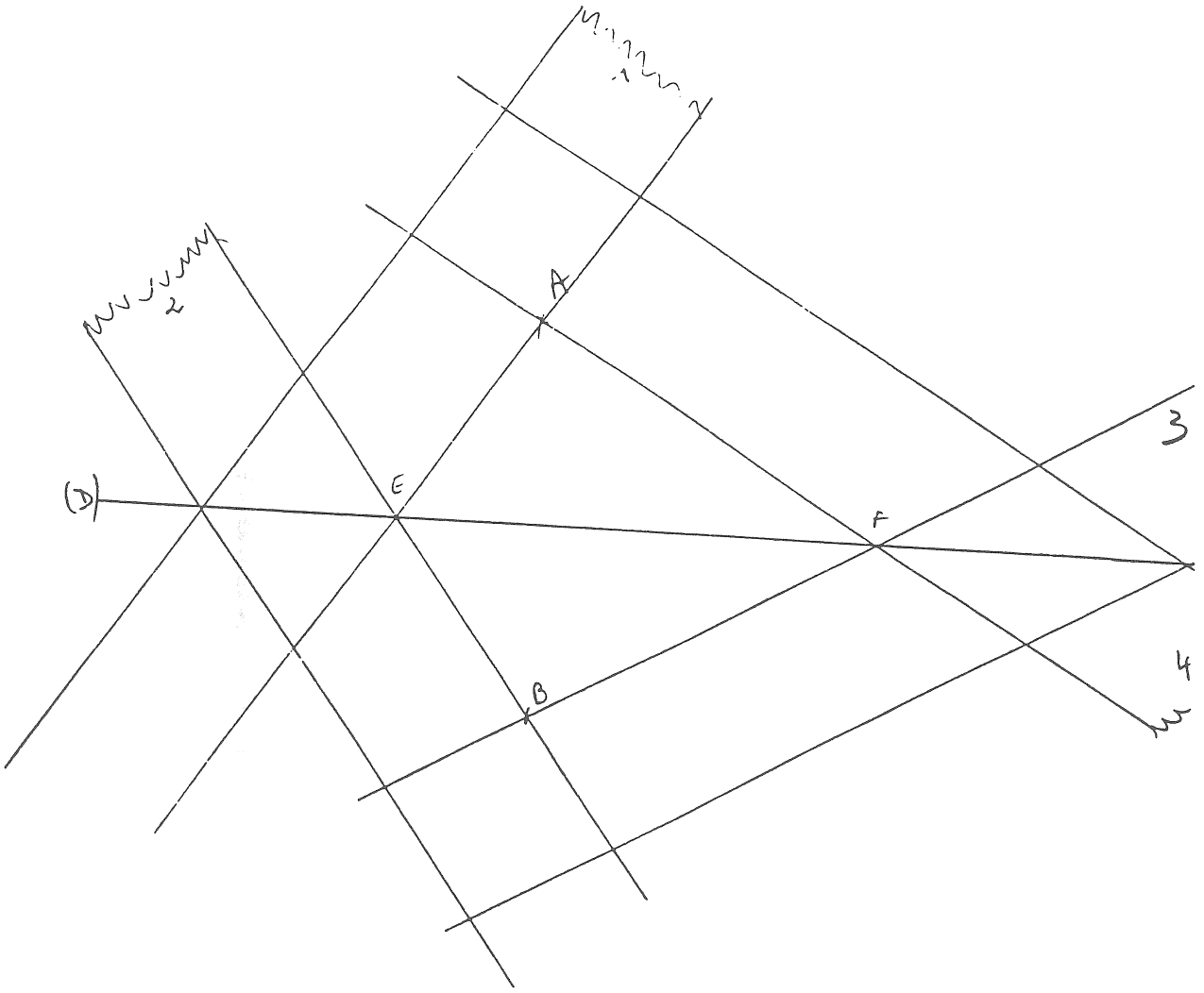
On trace une perpendiculaire quelconque, puis la parallèle passant par I.



Symétrique d'un point A par rapport à une droite (D).

On choisit E et F quelconque sur (D).

Les bandes 1 et 2 sont symétriques par rapport à (D), ainsi que les bandes 3 et 4. Le point B est à l'intersection des deux bords symétriques.

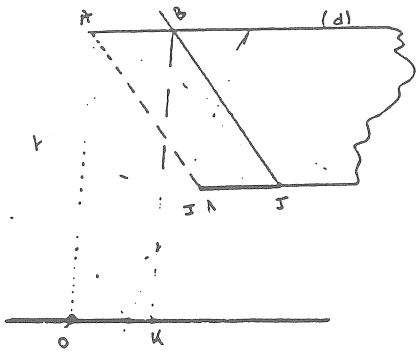


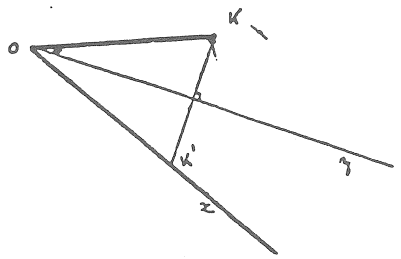
Remarque :

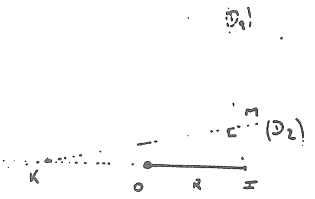
Cette construction est indépendante des précédentes. On peut donc aborder l'orthogonalité avant le parallèlisme, la médiatrice et le milieu.

Transport de longueur. Construction d'un cercle

Ce sujet n'a pas fait l'objet de recherche pendant l'atelier ; Daniel Berthe a rapidement exposé l'état des travaux de l'IREM sur ce point : on peut reporter n'importe quelle longueur en un point donné et le long d'une direction quelconque. On peut aussi tracer un cercle de centre et de rayon donnés (à noter que le cercle ne se trace que point par point).
Les dessins sont joints en annexe.







CONCLUSION :

La bande peut-elle remplacer la règle et le compas ? D'après ce qui précède, toutes les constructions rencontrées au Collège sont réalisables avec cet instrument.

Sa maniabilité n'est pas toujours évidente.

De nombreux problèmes restent ouverts. Par exemple, comment construire l'intersection de deux cercles ? (résolu tout dernièrement). Construire des nombres.

Des questions se posent : est-il possible d'utiliser cet instrument dans nos Collèges ? Au Lycée ? Avec quels objectifs ? Apporte-t-il un complément aux instruments usuels ? Peut-il être un substitut de ces instruments ?