

Les Aires comme Outil Géométrique

J.M. Bouscasse* - B. Pinet* - J. Puyou*

Préliminaire :

Les aires ne jouissent pas dans l'enseignement actuel des mathématiques du statut d'un "outil", en ce sens qu'elles ne sont pas ou peu utilisées pour démontrer des propriétés géométriques. Le seul moment où un élève les utilise c'est, et pas toujours, pour établir le théorème de Pythagore. D'autre part, il faut arriver en classe de terminale pour effectuer des calculs d'aires et ce, par l'intermédiaire du calcul intégral.

Notre but est de réhabiliter les aires et de montrer que cet outil très simple peut s'avérer très performant pour résoudre des problèmes de géométrie. Nous montrons des exemples de résolution de problèmes par cet outil certaines résolutions sont classiques (Théorème de Pythagore par exemple) et d'autres plus originales. Bien évidemment cet outil ne saurait être une panacée.

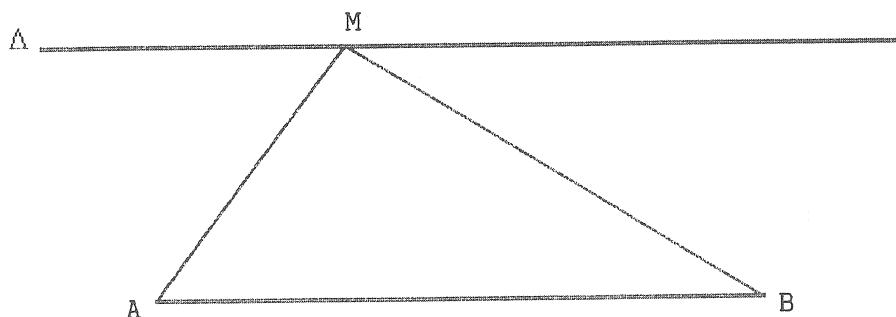
Le niveau des connaissances requises est celui du premier cycle des collèges, cependant les problèmes résolus seront éventuellement d'un niveau supérieur.

Les problèmes de convexité seront abordés naïvement. Il serait cependant tout à fait possible de lever cette difficulté en orientant le plan et en considérant des aires algébriques (voir "Exercices de Géométrie Moderne", Tome 1 (n°143 au n°155), et Tome 2, G. Papelier, Vuibert, 1949).

1 - PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Propriété 00

Pour tout point M d'une droite Δ parallèle à (AB),
l'aire du triangle AMB est constante.



* Collège TH. de Viau, Le Passage.

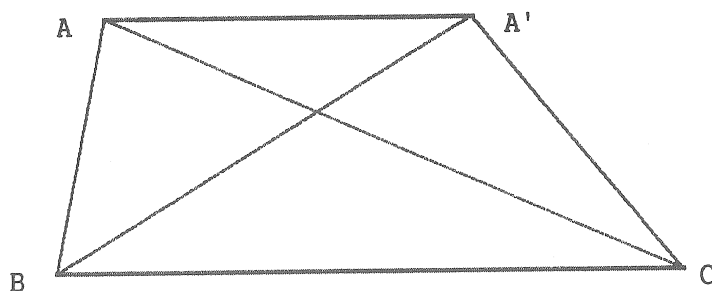
* Lycée J.B. de Baudre, Agen.

* Lycée B. Palissy, Agen.

Propriété 01

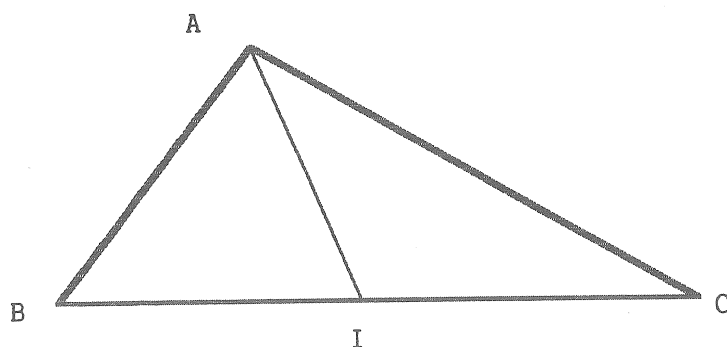
Soit deux triangles ABC et $A'BC$ tels que A et A' soient situés dans le même demi-plan de bord (BC) :

$$(AA') \parallel (BC) \Leftrightarrow \text{aire}(ABC) = \text{aire}(A'BC).$$



Propriété 02

Etant donné un triangle ABC et un point I de la droite (BC) ,
 I est le milieu de $[B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(ABI) = \text{aire}(ACI)$

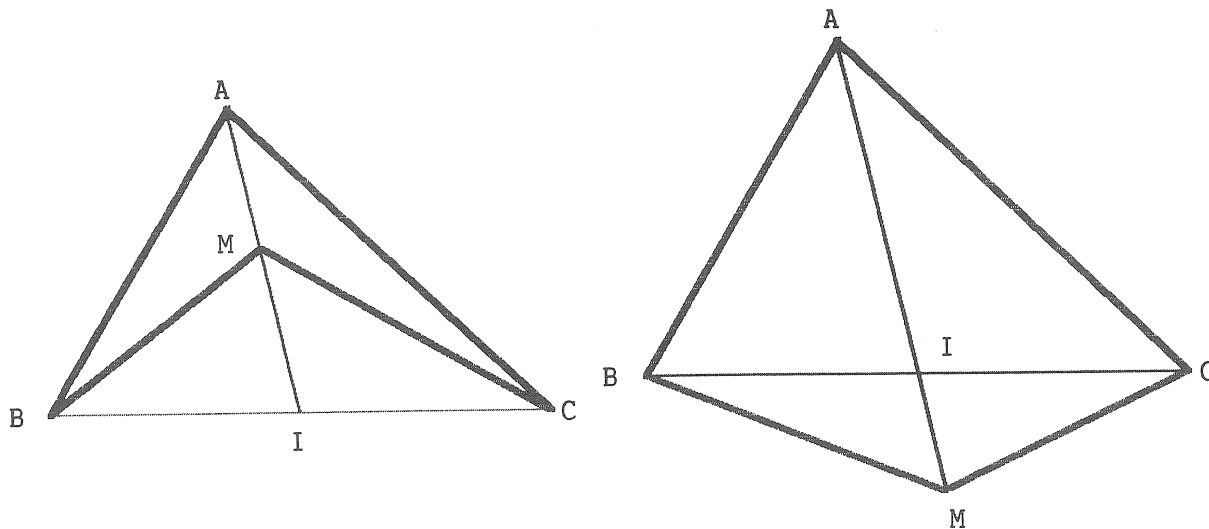


Propriété 03

Données:

Deux triangles ABM et ACM tels que les points B et C ne soient pas dans le même demi-plan de bord (AM),
On appelle I l'intersection des droites (AM) et (BC).

$$I \text{ milieu de } [B,C] \Leftrightarrow \text{aire}(\text{ABM}) = \text{aire}(\text{ACM})$$

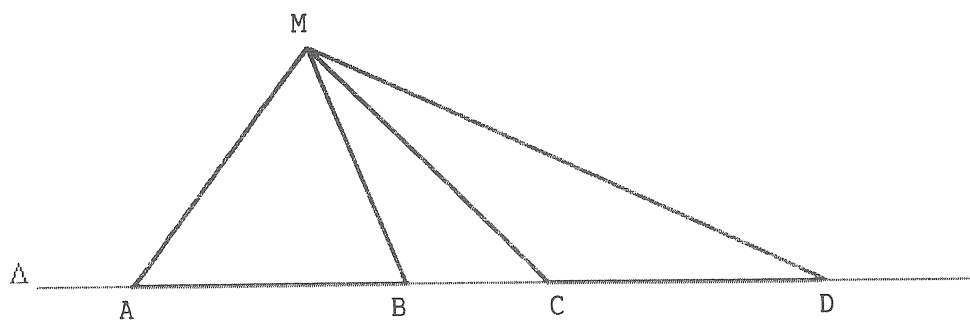


Propriété 04

Données:

Des points A, B, C et D situés sur une droite Δ ,
Un point M non situé sur Δ .

$$AB = CD \Leftrightarrow \text{aire}(\text{MAB}) = \text{aire}(\text{MCD})$$



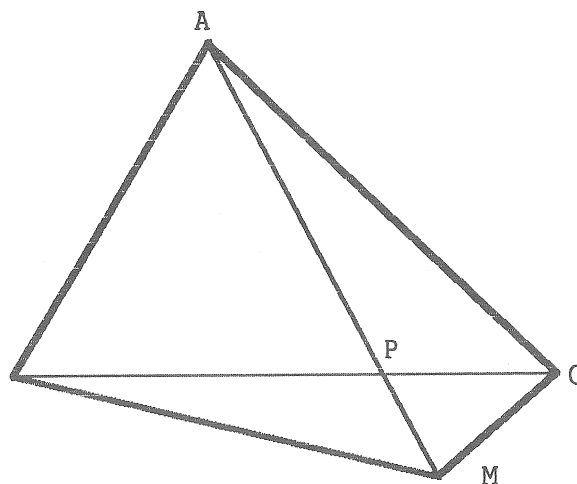
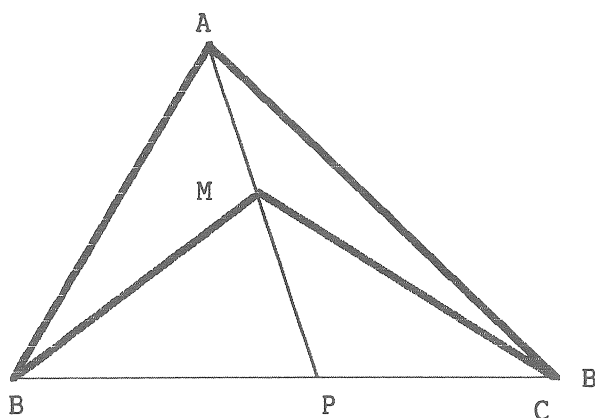
Propriété 05

Données:

Deux triangles ABM et ACM tels que les points B et C
ne soient pas dans le même demi-plan de bord (AM),
On appelle P l'intersection des droites (AM) et (BC)

Conséquence:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\text{aire}(AMB)}{\text{aire}(AMC)}$$



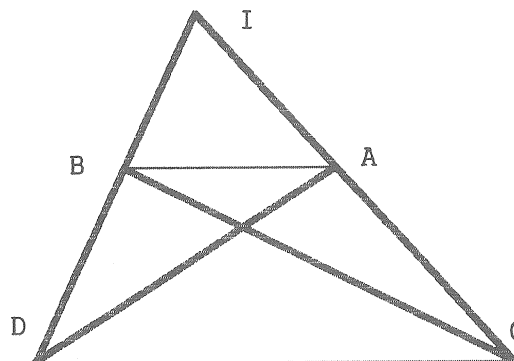
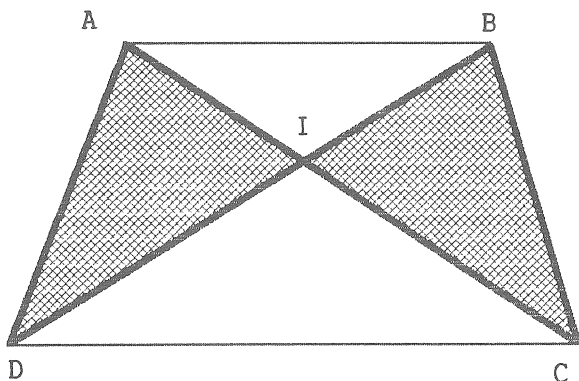
Propriété 06

Données:

Un quadrilatère ABCD

I l'intersection des droites (AC) et (BD)

$AB \parallel CD \Leftrightarrow \text{aire}(ADI) = \text{aire}(BCI)$



// - EXERCICES

Le Théorème des milieux

Partie directe.

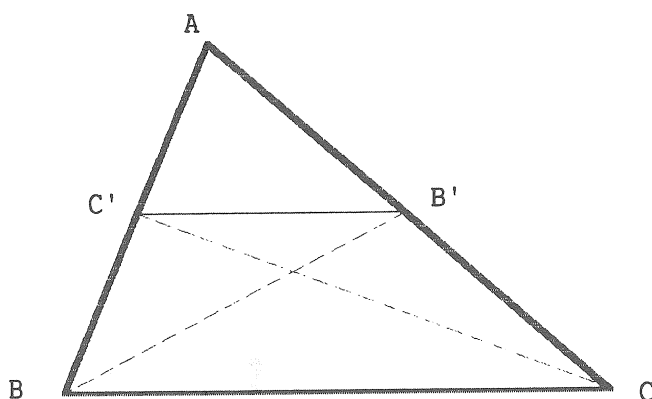
Données:

Un triangle ABC

B' le milieu de [A,C]

C' le milieu de [A,B]

Conséquence: $(BC) \parallel (B'C')$



$$\text{aire}(AB'C') = \text{aire}(BB'C') \\ \text{car } C' \text{ est le milieu de } [A,B]$$

$$\text{aire}(AC'B') = \text{aire}(CC'B') \\ \text{car } B' \text{ est le milieu de } [A,C]$$

$$\text{donc } \text{aire}(BB'C') = \text{aire}(CC'B')$$

donc $(BC) \parallel (B'C')$ d'après
la propriété 1

Partie réciproque:

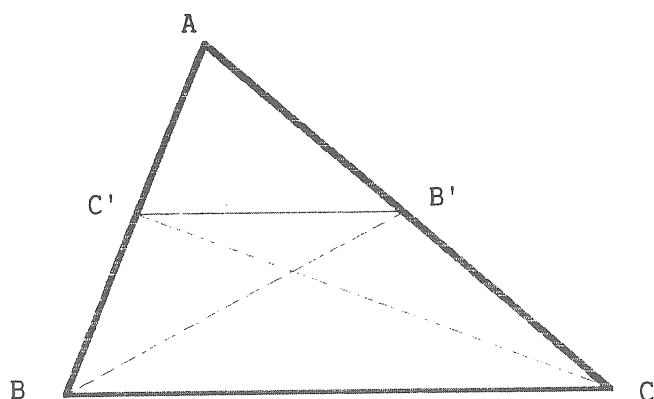
Données:

Un triangle ABC

B' le milieu de [A,C]

C' un point de (AB) tel que $(BC) \parallel (B'C')$

Conséquence: C' est le milieu de [A,B]



$$\text{aire}(AC'B') = \text{aire}(CC'B') \\ \text{car } B' \text{ est le milieu de } [A,C]$$

$$\text{aire}(CC'B') = \text{aire}(BB'C') \\ \text{car } (BC) \parallel (B'C')$$

$$\text{donc } \text{aire}(AC'B') = \text{aire}(BB'C')$$

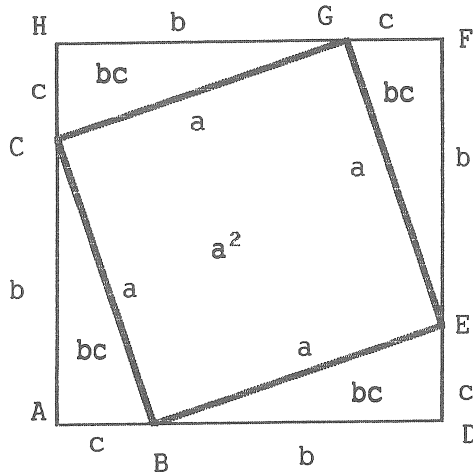
donc C' est le milieu de [A,B].

Le Théorème de Pythagore avec un carré

Données:

Un triangle ABC rectangle en A

Conséquence: $BC^2 = AB^2 + AC^2$



$$(b + c)^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Le Théorème de Pythagore avec un trapèze

Données:

Un triangle ABC rectangle en A

Conséquence: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

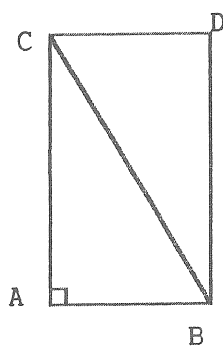


Figure 1

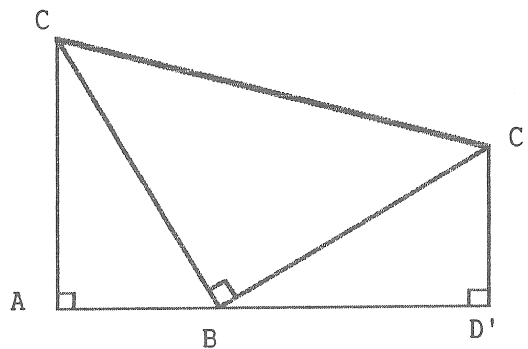


Figure 2

Dans la figure 1 ABDC est un rectangle de sens direct.

On pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.

On considère la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, elle transforme le triangle BCD en le triangle $BC'D'$. Evidemment le triangle CBC' est rectangle en B.

$$\text{aire}(\text{ACC'D'}) = \text{aire}(\text{ABC}) + \text{aire}(\text{CBC'}) + \text{aire}(\text{BC'D'})$$

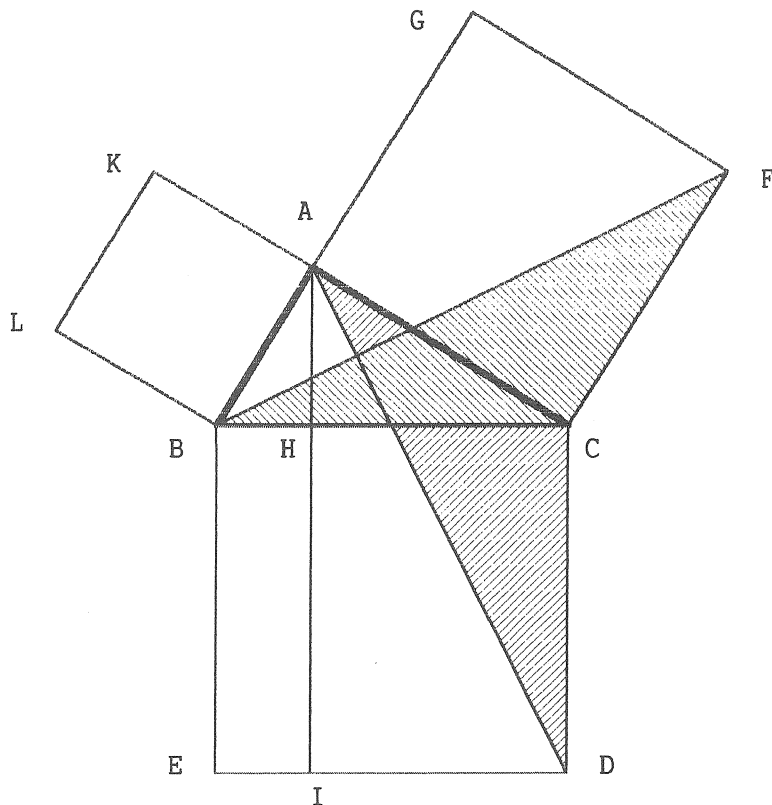
$$\frac{(b + c)^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2}, \text{ et après calcul, on obtient: } b^2 + c^2 = a^2$$

Le Pont-aux-ânes

Données:

Un triangle ABC rectangle en A

Conséquence: $BC^2 = AB^2 + AC^2$



Dans la figure ci-dessus ABLK, ACFG et BCDE sont des carrés.
Nous allons démontrer que:

$$\text{aire}(\text{BCDE}) = \text{aire}(\text{ACFG}) + \text{aire}(\text{ABLK}).$$

$$\text{aire}(\text{CDIH}) = 2 \times \text{aire}(\text{ACD})$$

La rotation de centre C qui envoie A sur F transforme le triangle ACD en le triangle FCB, ainsi:

$$\text{aire}(\text{CDIH}) = 2 \times \text{aire}(\text{FCB}) = \text{aire}(\text{ACFG}).$$

Pour des raisons analogues: $\text{aire}(\text{BHIE}) = \text{aire}(\text{ABLK}).$

Par conséquent:

$$\text{aire}(\text{CHID}) + \text{aire}(\text{BHIE}) = \text{aire}(\text{ACFG}) + \text{aire}(\text{ABLK})$$

$$\text{aire}(\text{BCDE}) = \text{aire}(\text{ACFG}) + \text{aire}(\text{ABLK})$$

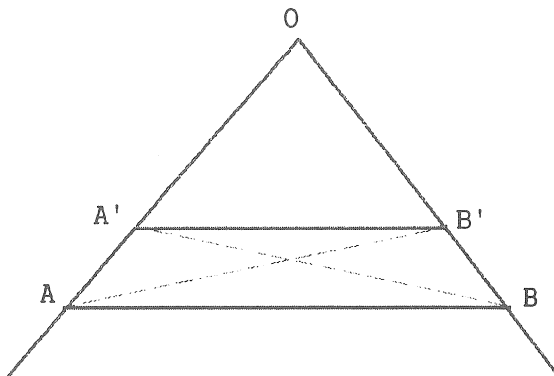
Ainsi: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Thalès-Triangle

Données

Un triangle OAB
 Un point A' sur la droite (OA)
 Un point B' sur la droite (OB)
 Les droites (AB) et (A'B') sont parallèles

Conséquence: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\text{aire}(B'OA')}{\text{aire}(B'OA)} \quad \text{et} \quad \frac{OB'}{OB} = \frac{\text{aire}(A'OB')}{\text{aire}(A'OB)}$$

$$\text{or } \text{aire}(B'OA) = \text{aire}(B'OA') + \text{aire}(B'A'A)$$

$$\text{aire}(B'OA) = \text{aire}(B'OA') + \text{aire}(A'B'B)$$

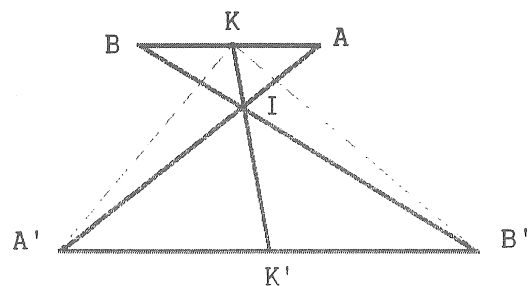
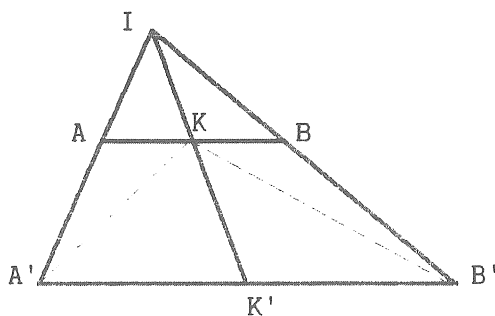
$$\text{aire}(B'OA) = \text{aire}(A'OB')$$

Le trapèze complet

Données:

Un trapèze AA'B'B de bases [A,B] et [A',B']
 I l'intersection des droites (AA') et (BB')
 K le milieu de [A,B]
 K' le milieu de [A',B']

Conséquence: I, K et K' sont alignés



$$\text{aire}(IKA) = \text{aire}(IKB) \text{ car } K \text{ est le milieu de } [A,B]$$

$$\text{aire}(A'AK) = \text{aire}(B'BK) \text{ car } K \text{ est le milieu de } [A,B] \text{ et } (AB) \parallel (A'B')$$

$$\text{donc } \text{aire}(IKA') = \text{aire}(IKB')$$

donc la droite (IK) passe le milieu K' de [A',B']

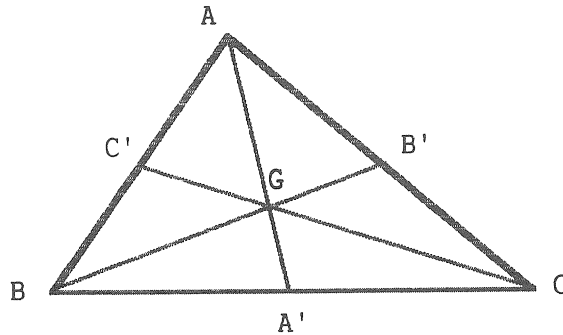
Centre de gravité d'un triangle

Données:

Un triangle ABC
B' le milieu de [A,C]
C' le milieu de [A,B]

Conséquences:

A, G et A' sont alignés
G est situé au tiers de chaque médiane en partant de son pied.



Démontrons que A, G et A' sont alignés.

$$\text{aire}(\text{GAB}) = \text{aire}(\text{GBC}) \text{ car } B' \text{ est le milieu de } [A,C].$$

$$\text{aire}(\text{GAC}) = \text{aire}(\text{GBC}) \text{ car } C' \text{ est le milieu de } [A,B].$$

$$\text{Ainsi } \text{aire}(\text{GAB}) = \text{aire}(\text{GAC}),$$

$$\text{donc } (AG) \text{ coupe } [B,C] \text{ en son milieu } A'.$$

Démontrons que G est au tiers de [A,A'] à partir de A'.

$$\text{aire}(\text{GBA}') = \frac{1}{2} \text{aire}(\text{GBC}) = \frac{1}{2} \text{aire}(\text{GBA})$$

$$\text{Donc } A'G = \frac{AG}{2}$$

Donc G est bien au tiers de [A,A'] à partir de A'

Alignement dans un repère

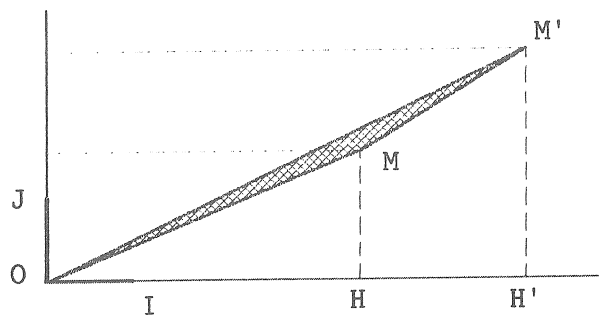
Données:

Le plan P est muni d'un repère (O,I,J)

M(x,y) et M'(x',y') deux points de coordonnées positives.

Conséquence:

O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$



O, M et M' sont alignés

$$\Leftrightarrow \text{aire}(\text{OMM}') = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{aire}(\text{OM'H'}) = \text{aire}(\text{OMH}) + \text{aire}(\text{MHH'M'})$$

$$\Leftrightarrow x'y' = xy + (x' - x)(y' - y)$$

$$\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Trapèze complet et parallélogramme

Données:

Un parallélogramme ABCD

Un point I situé sur la droite (AC)

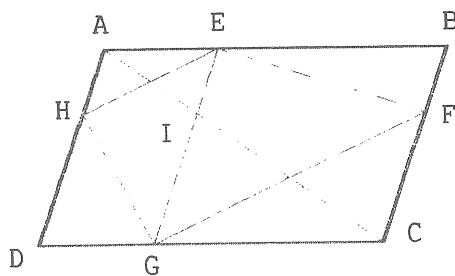
La parallèle à (AD) passant par I coupe (AB) en E et (CD) en G

La parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en F et (AD) en H

Conséquences:

1° Les droites (EH) et (FG) sont parallèles

2° Les droites (EF), (AC) et (HG) sont concourantes ou parallèles



$$1^\circ \text{aire}(\text{HIGD}) = \text{aire}(\text{ADC}) - \text{aire}(\text{AHI}) - \text{aire}(\text{IGC})$$

$$\text{aire}(\text{HIGD}) = \text{aire}(\text{ABC}) - \text{aire}(\text{AEI}) - \text{aire}(\text{IFC})$$

$$\text{aire}(\text{HIGD}) = \text{aire}(\text{EIFB})$$

$$\text{donc } \text{aire}(\text{HIG}) = \text{aire}(\text{EFI})$$

$$\text{donc } (EH) \parallel (FG)$$

2° La droite (AC) base par les milieux de [E,H] et [F,G] donc les droites (HG), (AC) et (EF) sont concourantes ou parallèles.

III - BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROUPE DE GEOMETRIE: "Cinq problèmes de Géométrie", IREM de Bordeaux (1989).
- [2] GROUPE DE GEOMETRIE: "Activité géométriques en classe de Seconde", IREM de Bordeaux (1981).
- [3] KAIEWSKI J.: "Utilisation des aires pour la résolution de quelques problèmes de géométrie" IREM de Lille, Groupe de Géométrie III (1984).
- [4] GROUPE DE GEOMETRIE: "Aires et quadrillages", IREM de Bordeaux (à paraître)
- [5] LEHMANN Daniel et BKOUCHE Rudolf: "Initiation à la géométrie" PUF (1988)
- [6] PAPELIER G.: "Exercices de géométrie moderne", Vuibert, (1926).