Les Quadrillages comme Outil Géométrique

J.M. Bouscasse* - P. Damey * - M.C. Chaumet*

Préliminaire : Les élèves travaillent en général sur du papier quadrillé qui est hélas rarement bien exploité.
Dans le premier cycle les points considérés dans un repère du plan sont en général à coordonnées entières.

Données et Vocabulaire

Le plan P est muni d'un quadrillage carré. On appelle:

◆ **droite du quadrillage** une droite qui passe par deux noeuds du quadrillage.

◆ **segment du quadrillage** un segment joignant deux noeuds du quadrillage.

Un triangle est dit:

◆ **quasi-rectangle** lorsqu'il a l'apparrence d'un triangle rectangle mais n'est pas rectangle

◆ **quasi-isocèle** lorsqu'il a l'apparrence d'un triangle isocèle mais n'est pas isocèle.

Remarques

Le plan P étant muni d'un quadrillage, toute droite de ce plan passe par 0, 1 ou une infinité de noeuds de ce quadrillage.

En effet, munissons ce plan d'un repère (O,I,J) afin que chaque noeud ait des coordonnées entières et que chaque coordonnées entières correspondent à un noeud, alors les droites d'équations:

- $y = x\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = 2x + \sqrt{5}$, $y = 3x + \frac{1}{2}$ ne passent par aucun noeud.
- $y = x\sqrt{5}$, $y = x\sqrt{5} + 2$ passent par un seul noeud.
- $y = 2x + 3$, $y = \frac{2x + 1}{3}$ passent par une infinité de noeuds.

Divers usages des quadrillages

L'utilisation des quadrillages nous conduit à gérer deux types de problèmes:

<u>1° Au niveau "élève":</u>
Comment tracer des droites du quadrillage parallèles, orthogonales, des triangles isocèles dont les sommets soient des noeuds du quadrillage.

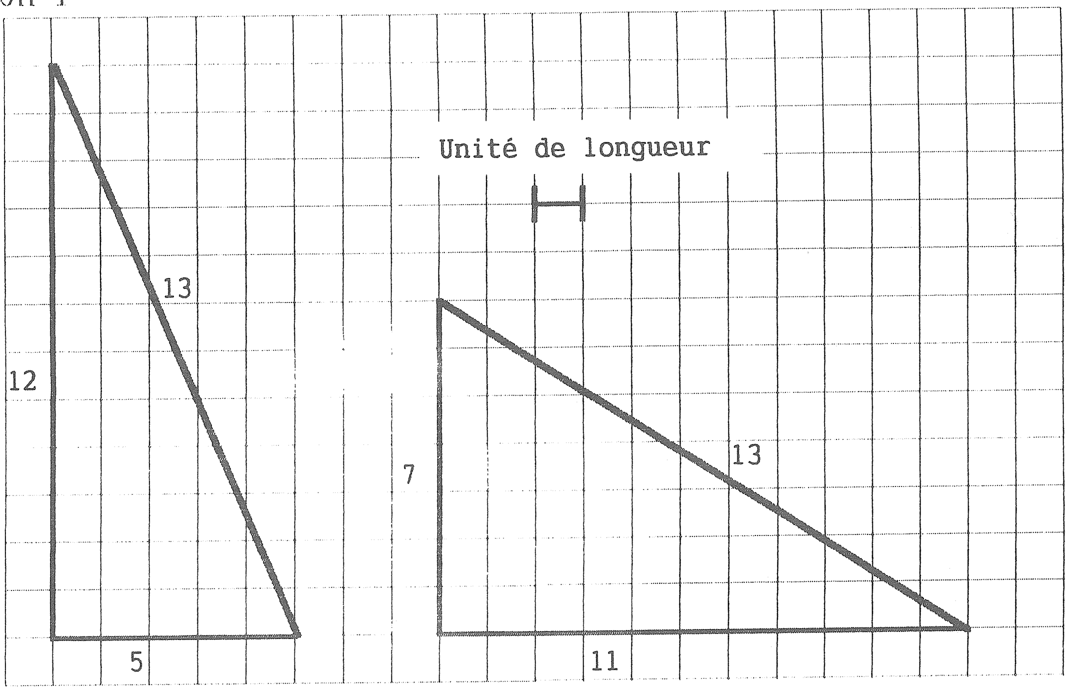
<u>2° Au niveau "enseignant":</u>
Comment tracer des droites du quadrillage quasi-parallèles, quasi-orthogonales, des triangles quasi-isocèles dont les sommets soient des noeuds du quadrillage

On verra que ces problèmes se traduisent en terme de problèmes de type numérique.

* Collège Th. de Viau, Le Passage.
* Faculté des Sciences, Bordeaux
* Bordeaux.

I - Activités

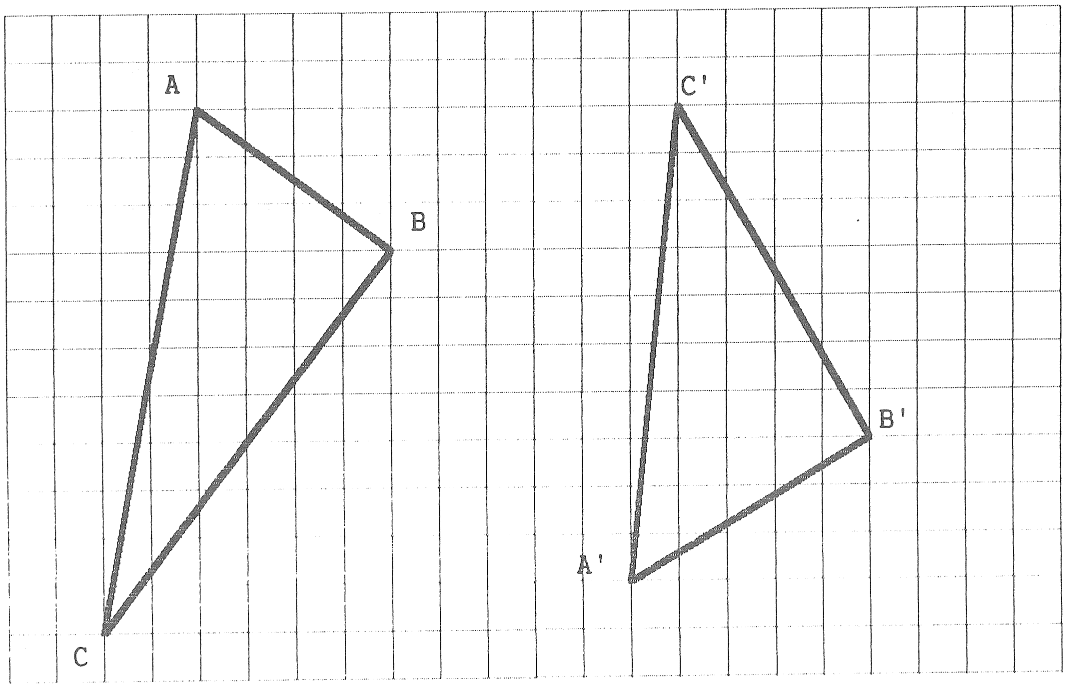
Situation 1



Chacune des hypoténuses de ces triangles rectangles a pour mesure 13.

VRAI ou FAUX ?

Situation 2



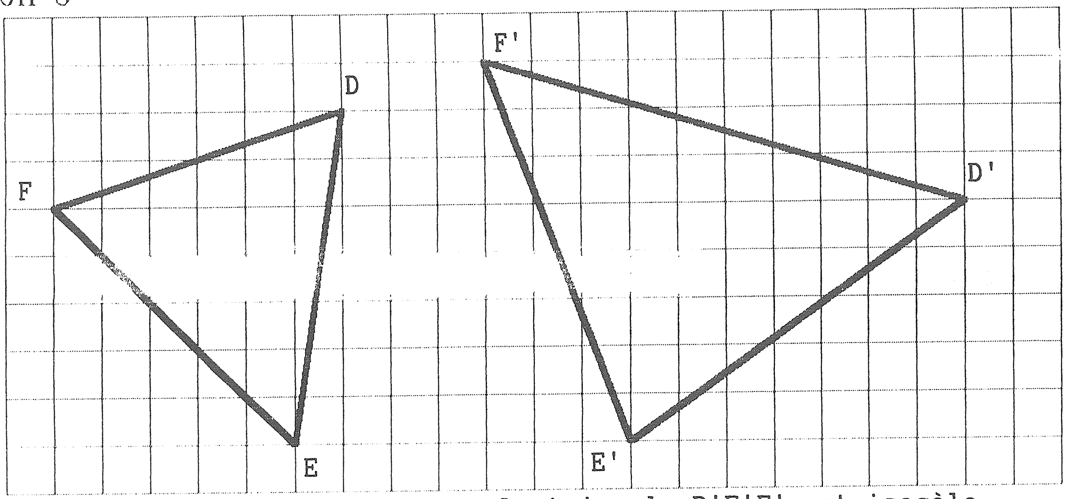
Le triangle ABC est rectangle.

VRAI ou FAUX ?

Le triangle A'B'C' est rectangle.

VRAI ou FAUX ?

Situation 3



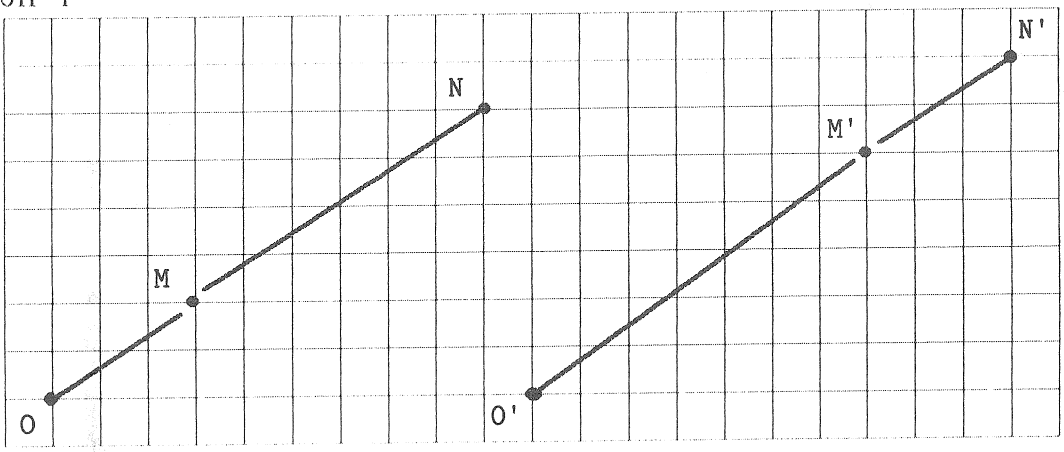
Le triangle DEF est isocèle.

VRAI ou FAUX ?

Le triangle D'E'F' est isocèle.

VRAI ou FAUX ?

Situation 4



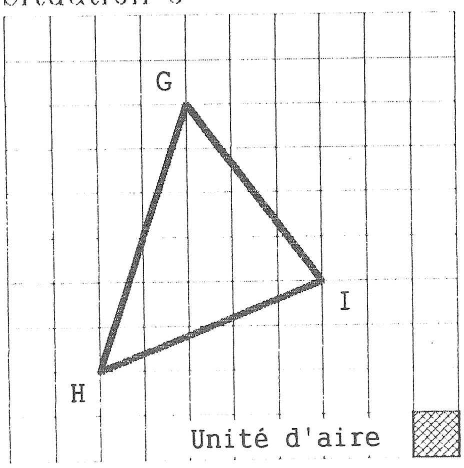
O, M et N sont alignés.

VRAI ou FAUX ?

O',M' et N' sont alignés.

VRAI ou FAUX ?

Situation 5



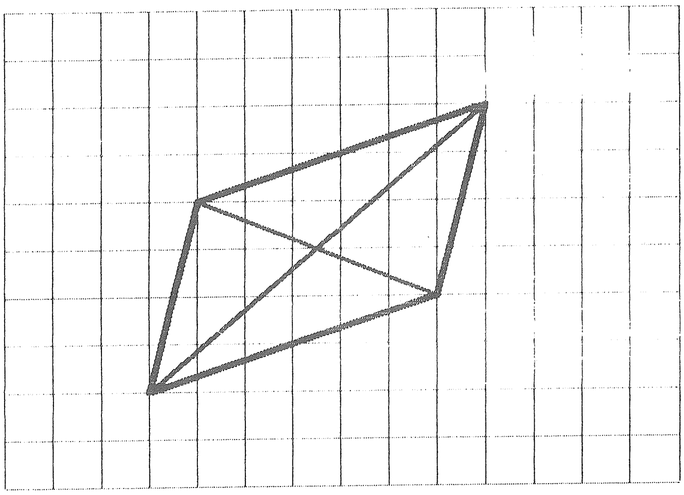
Quelle est l'aire du triangle GHI?

REMARQUE.

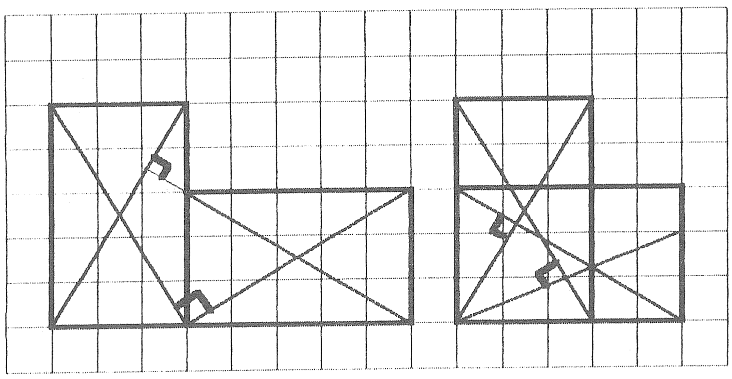
Nous avons pu constater que les exercices suivants motivent les éléèves. Pourtant leur résolution n'est pas évidente. Elle nécessite, outre l'outil des configurations, l'utilisation de l'outil numérique.

Dans cet exposé nous allons dégager les configurations clefs et donner quelques méthodes permettant de créer des exercices semblables ou des exercices qui en découlent.

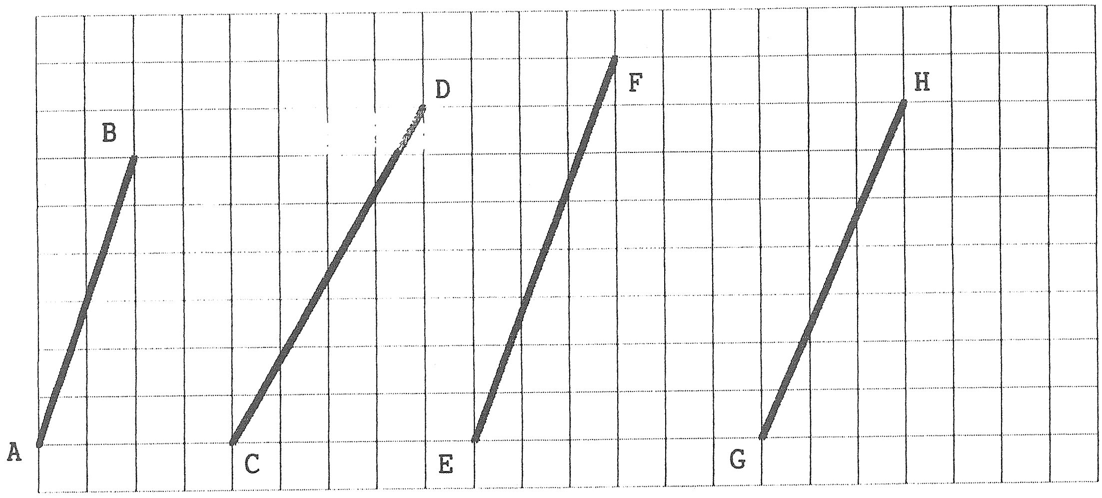
II - Configurations clefs



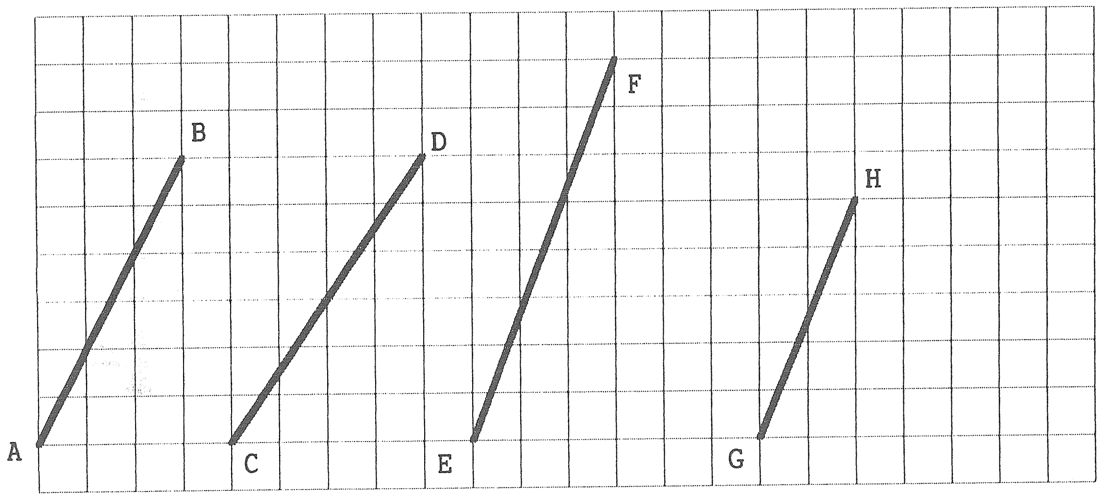
Parallélogramme et Parallélisme



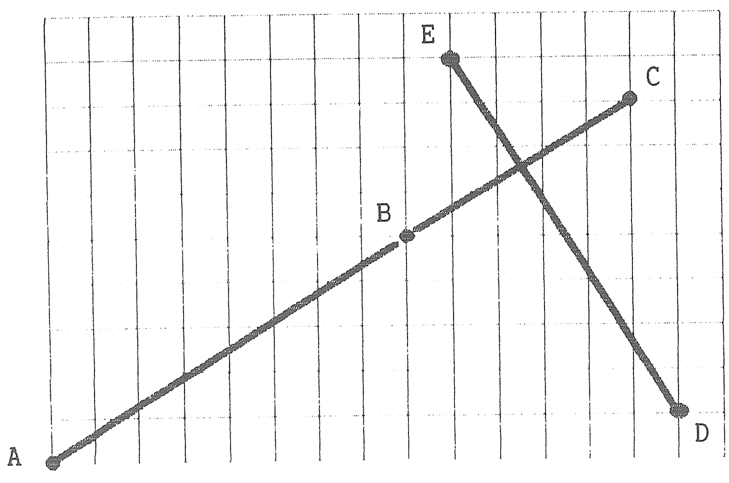
Rectangle et Orthogonalité



Déterminer les milieux des segments [A,B], [C,D], [E,F], [G,H], [I,J].



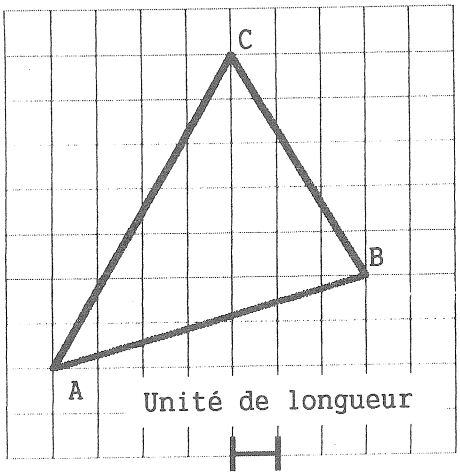
Partager les segments [A,B], [C,D], [E,F], [G,H], [I,J] "en trois".



Les points A, B et C sont-ils alignés?

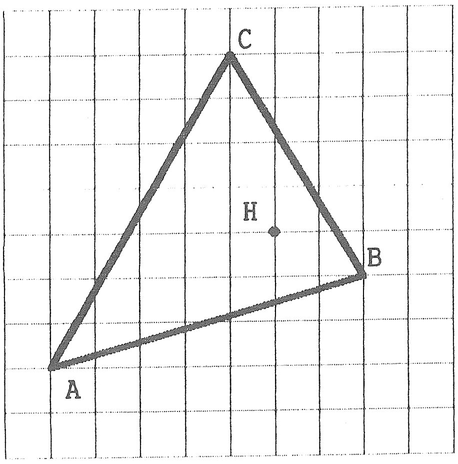
Les droites (AC) et (DE) sont-elles perpendiculaires?

Comment faire d'autres exercices de ce type?



Tracer les trois hauteurs du triangle ABC.

Quelle est la mesure de la longueur de chacune des hauteurs?



Le point H est-il l'orthocentre du triangle ABC?

Quadrillages et Nombres entiers & Parallélisme et orthogonalité

I - Introduction

La question que l'on peut se poser et à laquelle nous allons répondre est:

> **"Comment construire des triangles quasi-rectangles, des triangles quasi-isocèles, des points quasi-alignés?".**

II - Nombres entiers et triangles

1° Construire sur une feuille blanche les triangles dont les côtés ont pour mesure:

$\mathcal{T}1$) 8, 7 et 4

$\mathcal{T}2$) 7, 5 et 5

$\mathcal{T}3$) 13, 11 et 7

$\mathcal{T}4$) 12, 9 et 8

$\mathcal{T}5$) 21, 19 et 9

$\mathcal{T}6$) 2, 2 et 3

$\mathcal{T}7$) 9, 8 et 4

$\mathcal{T}8$) 19, 18 et 6

Sont-ils rectangles? Bien évidemment non. Mais voici à titre indicatif la mesure en degré de leur "angle critique".

Dans un triangle on a la relation:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Par conséquent: $\cos A = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$

Dans les triangles $\mathcal{T}1$ à $\mathcal{T}5$ on a: $a^2 - b^2 - c^2 = -1$

donc $A = \mathrm{Arc}\cos(\dfrac{-1}{2bc})$

Ainsi $A_1 \approx 92{,}046$; $A_2 \approx 92{,}292$; $A_3 \approx 90{,}744$; $A_4 \approx 90{,}796$; $A_5 \approx 90{,}335$

Dans les triangles $\mathcal{T}6$ à $\mathcal{T}8$ on a: $a^2 - b^2 - c^2 = 1$

donc $A = \mathrm{Arc}\cos(\dfrac{1}{2bc})$

Ainsi $A_6 \approx 75{,}522$; $A_7 \approx 88{,}209$; $A_8 \approx 89{,}469$

2° Point de vue arithmétique.

Problème.

Il s'agit de trouver des nombres entiers et strictement positifs a, b et c qui désignerons les mesures des côtés d'un triangle et tels que

$a^2 + b^2 - c^2$ soit non nul et le plus petit possible.

Comme a, b et c sont entiers on doit résoudre: $a^2 + b^2 - c^2 = \pm 1$

$$a^2 + b^2 - c^2 = \pm 1 \Leftrightarrow a^2 \mp 1 = c^2 - b^2$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = \pm 1 \Leftrightarrow (c - b)(c + b) = a^2 \mp 1$$

Alors on écrit le second membre sous forme d'un produit de deux facteurs de même parité (si cela est possible) et on trouve des solutions.

III - Nombres entiers et alignements

On suppose le plan P muni d'un repère (O,I,J) où O, I et J sont trois sommets d'un carreau du quadrillage. Pour traiter des problèmes d'alignement de trois points, on peut supposer que l'un des trois points est l'origine O du repère.

Théorème (connu)

Etant donné deux points $M(x , y)$ et $M(x' , y')$,

O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow$ $xy' - x'y = 0$.

Propriété

Etant donné deux points $M(x , y)$ et $M(x' , y')$,

$2\times aire(OMM') = |xy' - x'y|$

Pour trouver des points quasi-alignés il suffit que $|xy'-x'y|$ soit le plus petit possible. Comme nous considérons des points du quadrillage correspondant au repère (O,I,J), les coordonnées des points considérés seront entières. Ainsi on est amené à chercher des quadruplets (x,y,x',y') tels que $|xy'-x'y| = 1$.

Problème.

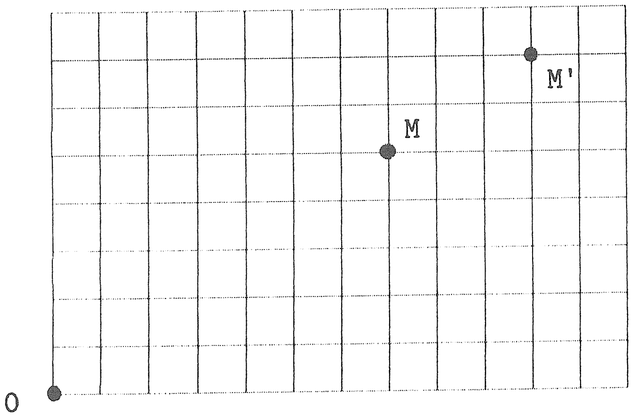
Soit a et b deux nombres entiers non nuls et premiers entre eux.

Quels sont les couples d'entiers (x,y) tels que: $ax - by = \pm 1$?

Ceci est le théorème de Bezout.

Vous remarquerez que dans ce cas la mesure de l'aire du triangle OMM' correspondant est $\frac{1}{2}$ et qu'il est assez aisé de calculer la distance du point M (ou M') à la droite (OM') (ou (OM)).

Exemple.
Prenons dans un repère un point M de coordonnées (5,7) et cherchons des couples (x,y) tels que: $5x - 7y = \pm 1$.
Voici quelques couples solutions: (3,2) , (10,7) , (17,12).



En prenant par exemple les points M(7,5) et M'(10,7) si l'on calcule la distance d de M à la droite OM' (c'est la longueur de la hauteur issue de M dans le triangle OMM') on trouve: OM'×d = 1

donc $d = \frac{1}{\sqrt{149}} \approx 0{,}08$

IV - Nombres entiers et orthogonalité

On suppose le plan P muni d'un repère (O,I,J). Pour traiter des problèmes d'orthogonalité ou de non orthogonalité de deux droites du quadrillage, on peut toujours supposer que ces deux droites se coupent à l'origine O du repère et que c'est en O que le problème de l'orthogonalité se pose.

Théorème (connu)

> Etant donné deux points $M(x , y)$ et $M(x' , y')$,
> $(OM)\perp(OM') \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

On voit donc que la détermination de droites orthogonales ou quasi-orthogonales est un problème analogue à celui de la détermination de points alignés ou quasi-alignés.

V - Nombres entiers et égalités de longueurs

On suppose le plan P muni d'un repère (O,I,J). Pour traiter des problèmes d'égalité ou de non égalité de longueurs, on peut toujours supposer que les segments considérés ont l'une des extrémités à l'origine O du repère.

Théorème (connu)

> Etant donné deux points $M(x , y)$ et $M(x' , y')$,
> $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $OM' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Pour trouver des triangles isocèles il suffit que:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Exemple: 11 + 3 = 4 + 12

Pour trouver des triangles quasi-isocèles

il suffit que: $x^2 + y^2 - x'^2 - y'^2$ soit le plus petit possible. Comme nous considérons des points du quadrillage correspondant au repère (O,I,J), les coordonnées des points considérés seront entières. Ainsi on est amené à chercher des quadruplets (x,y,x',y') tels que $|x^2 + y^2 - x'^2 - y'^2| = 1$

Pour des raisons évidentes de "symétrie" il suffit de résoudre:

$$x^2 + y^2 - x'^2 - y'^2 = 1$$

Exemple: $8^2 + 3^2 = 7^2 + 5^2 - 1$

BIBLIOGRAPHIE

[1] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Cinq problèmes de Géométrie", IREM de Bordeaux (1989).

[2] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Activité géométriques en classe de Seconde", IREM de Bordeaux (1981).

[3] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Aires et quadrillages", IREM de Bordeaux (à paraître).

[4] **HARDY G.H. and WRIGHT E.M.**: "An introduction to the theory of numbers", Oxford and the Clarendon Press (1960).

[5] **LEHMANN Daniel - BKOUCHE Rudolf**: "Initiation à la géométrie" PUF (1988)

[6] **PAPELIER G.**: "Exercices de géométrie moderne", Vuibert, (1926).