Autour du théorème de Thalès*

(variations sur les liens entre le géométrique et le numérique)

R.BKouche*

"La connaissance évoluée, la connaissance fine, se fonde sur la connaissance "naturelle" qui ne peut cependant être envisagée que comme une approche sommaire de la connaissance évoluée[1].

Ferdinand Gonseth

Introduction

Le théorème de Thalès[2] (ou théorème des lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments; en cela il est au cœur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique.

Commençons par rappeler le rôle de la proportionnalité dans la définition des figures semblables. Cette définition marque la nature métrique de la notion de forme si l'on considère que la théorie de la similitude telle qu'elle se développe dans la géométrie élémentaire, exprime essentiellement que deux objets ont même forme[3]. Ainsi Emile Borel dans un débat sur l'enseignement de la géométrie organisé par la Société française de Philosophie à propos de la Réforme de 1902/1905, expliquait :

"Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première: c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur[4].

Rappelons la définition des figures semblables telle que l'énonce Euclide :

---

* IREM, Professeur à l'Université de Lille.

* Ce texte qui s'appuie sur mon intervention au colloque Inter-IREM de Limoges est la première partie d'un fascicule (à paraître à l'IREM de Lille) sur le théorème de Thalès et le rôle qu'il joue dans les relations entre le numérique et le géométrique.

[1]Gonseth [Go], p. 145.

[2]L'appellation "Théorème de Thalès" est récente. Dans les ouvrages de géométrie élémentaire de langue française, elle apparaît seulement à la fin du XIXème siècle, on peut citer le *Cours de Géométrie élémentaire* de Combette [Com] et quelques ouvrages du début du XXème siècle comme ceux de Bourlet [Bourl] ou ceux de Vacquant et Macé de Lépinay [VM]. L'appellation devient officielle seulement dans les programmes de 1925 ; le grand traité de Hadamard [Ha] ne l'emploie pas qui parle du théorème des lignes proportionnelles. Quand à la part prise par Thalès dans la découverte de ce théorème, elle reste problématique et nous renvoyons aux pages consacrées à Thalès dans *La Géométrie Grecque* de Paul Tannery [TanP] et dans *Les Ecoles Présocratiques* édité par Jean-Paul Dumont [Dum]. Enriques, dans son article de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques [Enr], indique que le théorème des lignes proportionnelles est appelé par certains théorème de Thalès tout en indiquant les réticences de Paul Tannery dans l'ouvrage cité ci-dessus. Pour l'histoire du théorème de Thalès et ses diverses formes dans les ouvrages de géométrie élémentaire, nous renvoyons à l'article de Henry Plane dans ce volume.

[3]Bkouche [Bk1] .

[4]"L'Enseignement de la Géométrie", débat publié dans le *Bulletin de la Société française de Philosophie*, tome VII, 1907.

"Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.[5].

définition qui fait intervenir à la fois l'égalité des angles et les relations de proportionnalité entre côtés ; la théorie des proportions permet de définir de façon précise cette notion de proportionnalité, le théorème de Thalès énonçant, quant à lui, un critère de proportionnalité géométrique.

Nous rappellerons d'abord les deux formes traditionnelles de ce théorème:

Premier énoncé. *"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les secteurs sera parallèle au côté restant du triangle"*[6]*".*

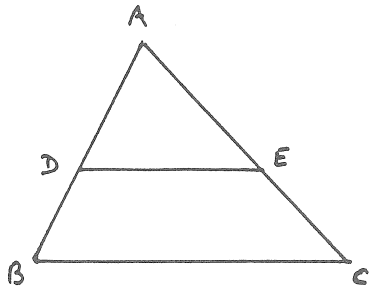

fig. 1

Autrement dit, si la droite **DE** est parallèle au côté **BC**, on a la relation:

$$AD/DB = AE/EC$$

et réciproquement. Euclide considère seulement le cas où les points **B** et **D** d'une part, **C** et **E** d'autre part sont du même côté par rapport à **A**.

Second énoncé. *"Deux sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles.*[7]*".*

Ces deux énoncés (équivalents) correspondent à des approches géométriques différentes que nous développons ci-dessous, l'approche euclidienne d'une part, l'approche d'Arnauld d'autre part, laquelle se veut, selon les conceptions de son auteur, plus *naturelle*[8].

Mais peut-être plus important que la différence de forme des énoncés, faut-il mettre en avant d'une part la différence des démonstrations (cf. ci-dessous), d'autre part la différence de conception quant à la notion de mesure.

Euclide, pour répondre à la crise provoquée par la découverte des irrationnelles, développe une théorie des proportions s'appuyant sur la notion d'ordre éliminant tout recours au numérique (c'est la théorie d'Eudoxe exposée au Livre V des *Eléments*).

Arnauld, quant à lui, développe une notion d'approximation au statut mal défini, peut-être plus proche du calcul numérique, même s'il ne va pas jusqu'à identifier un rapport de

---

[5]Euclide, *Eléments*, Livre VI, définition 1, p. 139 Les citations des *Eléments* sont extraites de la traduction de Peyrard [Pe], la pagination est celle de l'édition de 1993.

[6]ibid. Livre VI, proposition 2, p. 141.

[7]Hadamard [Ha], Livre III, chapitre I, p. 108.

[8]Nous verrons qu'elle est plus proche de la pratique de la mesure alors que la construction d'Eudoxe se présente comme indépendante de toute pratique, ce qu'elle est effectivement.

longueur à un nombre. A la même époque, d'autres mathématiciens tels Stevin ou Descartes acceptaient une telle identification même si le statut des nombres ainsi introduits (les nombres *sourds* ou *irrationnels*) restait incertain.

Il faudra attendre le XIXème siècle pour que le statut du numérique se précise avec la construction des nombres réels[9] permettant de redéfinir la relation entre le géométrique et le numérique. Cette relation se précisera avec l'insertion de la géométrie dans le cadre de l'algèbre linéaire.

Ainsi le théorème de Thalès assure la liaison entre la problématique de la similitude et la problématique de la mesure (telle qu'elle est définie par la théorie des proportions (cf. ci-dessous)). Cela explique le rôle joué par ce théorème dans le développement de la géométrie élémentaire ; celle-ci étant essentiellement une théorie de la mesure des grandeurs géométriques, le théorème de Thalès permet de ramener l'étude de la forme des objets géométriques à des considérations de grandeur.

Cet article est composé de trois parties.

La première partie est consacrée à une étude historique des diverses démonstrations du théorème de Thalès. Cette étude permettra de préciser comment se construit la relation entre le numérique et le géométrique.

La seconde partie est consacrée aux implications du théorème de Thalès. Nous étudierons d'abord les propriétés liées à la similitude. Ensuite nous verrons comment le théorème de Thalès permet de fonder la géométrie analytique dans la mesure où celle-ci est liée à la notion de mesure. Enfin nous verrons comment le théorème de Thalès s'inscrit dans un cadre vectoriel et plus généralement dans le cadre de l'algèbre linéaire; on peut alors mettre en valeur le rôle du théorème de Thalès dans la *linéarisation* de la géométrie élémentaire.

Enfin la troisième partie aborde les problèmes d'enseignement. Ces problèmes sont d'autant plus difficile que les constructions théoriques qui définissent la relation entre le numérique et le géométrique ne sauraient être abordées dans un enseignement élémentaire (tel celui du collège, voire même du lycée) même si l'on rencontre très tôt des problèmes où géométrique et numérique se rencontrent ; ainsi les problèmes de mesures et de calcul des grandeurs, ainsi les problèmes de proportionnalité géométrique liés à la similitude, ainsi aussi les problèmes de représentation analytique, etc. Apparaît ainsi une ambiguïté incontournable de l'enseignement dans la mesure où l'on est amené à travailler dans un certain *indéfini*, mais peut-être faut-il rappeler que ce sont les problèmes cités plus haut qui ont conduit à remplacer cet indéfini par des constructions précises. C'est essentiellement ce point que nous développerons dans la troisième partie de l'article.

[9]Dedekind [De], préface.

PREMIERE PARTIE

LES DEMONSTRATIONS DU THEOREME DE THALES

La démonstration euclidienne

1. *La méthode des aires*
2. *La théorie des proportions*
3. *La démonstration d'Euclide*

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*
2. *La théorie des proportions*
3. *La théorie des parallèles*
4. *Le théorème des lignes proportionnelles*
5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*
2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*
3. *La méthode des aires*

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

1. *Les "Éléments de Géométrie" de Lacroix*
2. *Les proportions*
3. *Les lignes proportionnelles*

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*
2. *Constructions des nombres réels et mesures des grandeurs*
3. *Les grandeurs proportionnelles*

La démonstration euclidienne

La démonstration euclidienne s'appuie d'une part sur la méthode des aires, d'autre part sur la théorie des proportions.

1. *La méthode des aires*

La méthode des aires, telle qu'elle est exposée dans le Livre I des *Eléments* énonce des critères d'égalité d'aires; on peut la considérer comme la légitimation du procédé empirique de découpage et de recomposition des aires qui permet d'affirmer que des surfaces sont égales. Elle est l'un des points forts de la méthode euclidienne que l'on retrouve tout au long des *Eléments* et plus généralement dans les travaux des géomètres grecs.

La méthode des aires s'appuie d'une part sur le postulat des parallèles (lequel permet de montrer l'égalité des angles alternes-internes ou des angles correspondants définis par une sécante coupant deux droites parallèles) et les cas d'égalité des triangles (qui légitiment l'opération de recomposition) ; ainsi la proposition 35 du Livre I:

"Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux."

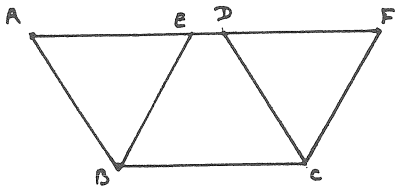

fig. 2

En fait l'égalité des triangles **ABE** et **CDF** (les côtés **AB** et **BE** sont respectivement égaux aux côtés **DC** et **CF**, les angles **ABE** et **DCF** sont égaux) implique l'égalité des aires des parallélogrammes **ABCD** et **EBCF**; en effet le quadrilatère **ABCF** est composé du triangle **ABE** et du parallélogramme **BCFE**, il est aussi composé du triangle **CDF** et du parallélogramme **ABCD**.

De façon plus générale on peut énoncer (proposition 36 du Livre I):

"Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux ".

On passe aux triangles en remarquant qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme (proposition 34 du Livre I), remarque évidente mais qu'Euclide démontre en utilisant l'égalité des angles alternes-internes et les cas d'égalité des triangles ; on peut alors énoncer les deux propositions suivantes (propositions 37 et 38 du livre I) :

"Des triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux".

"Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux".

On remarquera les deux sens du terme *égalité*, égalité des aires et égalité au sens de la superposition ; le sens est déterminé par le contexte[10].

Si, dans un premier temps, la méthode des aires permet d'affirmer l'égalité de deux surfaces, le problème de la mesure des aires est de comparer deux aires, d'exprimer leur rapport, c'est-à-dire combien de fois chacune des aires contient une partie aliquote commune (c'est-à-dire une partie contenue un nombre entier de fois dans chacune d'elles).

On peut alors énoncer (proposition 1 du Livre VI)

"Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases".

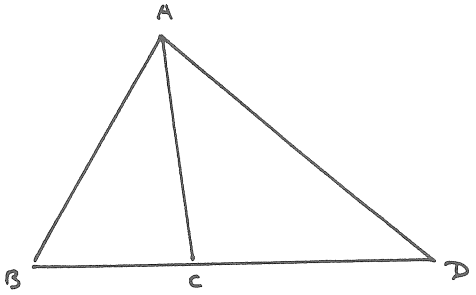

fig. 3

autrement dit, on a la relation

$$\text{aire } \mathbf{ABC}/\text{aire } \mathbf{ACD} = \mathbf{BC}/\mathbf{CD}$$

Cela suppose d'avoir défini de façon précise sinon le rapport de deux grandeurs (ici des aires ou des longueurs) du moins l'égalité de ces rapports. Lorsque les grandeurs sont commensurables (c'est-à-dire, ont une partie aliquote commune), le rapport se définit comme on l'a dit ci-dessus. De façon précise, soit λ une partie aliquote commune de **BC** et **CD**, alors $\mathbf{BC} = m\lambda$, $\mathbf{CD} = n\lambda$, m et n étant des nombres entiers; on peut alors considérer une division de **BC** et **CD** en parties de longueur λ, la proposition 38 du Livre I montre alors que les triangles de sommet **A** et de base une partie de longueur λ ont même aire, soit σ l'aire d'un tel triangle, alors

$$\text{aire } \mathbf{ABC} = m\sigma$$

$$\text{aire } \mathbf{ACD} = n\sigma$$

ce qui prouve l'assertion.

Ce raisonnement n'est plus valide si **BC** et **CD** sont incommensurables (c'est-à-dire, n'ont pas de partie aliquote commune), il devient alors nécessaire d'expliciter une théorie des proportions (c'est-à-dire de l'égalité des rapports) pour des grandeurs incommensurables.

2. *La théorie des proportions.*

Tant que les géomètres grecs ne connaissaient que des rapports de grandeurs commensurables, la théorie des proportions n'était qu'un simple chapitre de l'arithmétique, le rapport de deux grandeurs étant défini comme rapport d'entiers. La découverte (via le théorème de Pythagore) des grandeurs incommensurables posait un nouveau problème et il

[10]En fait, la superposition doit être entendue comme un critère d'égalité, l'égalité étant l'égalité de grandeur, ce que laisse supposer les énoncés des *"notions communes"*. Notons cependant que, en ce qui concerne les longueurs et les angles, l'égalité est équivalente à la superposition comme on le voit dans la démonstration de la proposition 4 du Livre I (le deuxième cas d'égalité des triangles).

devenait nécessaire d'élaborer une théorie des proportions prenant en compte l'incommensurabilité[11].

La théorie des proportions fut développée par Eudoxe, mathématicien contemporain de Platon, elle est exposée au Livre V des Eléments d'Euclide auquel nous renvoyons, une partie de ce livre est exposée et commentée dans *Mathématiques au fil des âges*[12] ; nous renvoyons aussi à l'article d'Eliane Cousquer sur l'histoire des nombres[13].

Nous rappelons ici les définitions euclidiennes nécessaires à la compréhension de la suite de l'exposé:

3. Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raison.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être de même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, à d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leurs sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois".

En fait Euclide ne définit pas la raison (le rapport) de deux grandeurs homogènes, il explique dans la définition 5 que si deux grandeurs ont une raison entre elles, il existe un multiple de chacune d'elles qui surpasse l'autre, ce qui précise la définition 3.

La définition importante est la définition 6 qui explicite ce qu'on entend par proportion. En termes d'aujourd'hui on pourrait écrire :

a et b étant deux grandeurs homogènes, c et d étant deux autres grandeurs homogènes, alors

$$a/b = c/d$$

si, n et m étant deux nombres entiers, les assertions suivantes sont vérifiées:

si $ma > nb$, alors $mc > nd$,

si $ma = nb$, alors $mc = nd$,

si $ma < nb$, alors $mc < nd$.

Pour l'étude des propriétés des proportions, nous renvoyons aux ouvrages cités ; le lecteur peut, à titre d'exercice, montrer les propriétés suivantes :

i) $a/b = c/d$ implique $b/a = d/c$

ii) $a/b = c/d$ implique $(a + b)/b = (c + d)/d$ et $(a - b)/b = (c-d)/ d$

iii) si $a/b = c/d$, alors $a > b$ implique $c > d$ (resp. $a < b$ implique $c < d$, resp. $a = b$ implique $c = d$)

iv) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $a/b = c/d$ implique $a/c = b/d$

---

[11]Pour une étude historique de l'incommensurabilité, nous renvoyons aux ouvrages de Knorr [Kn] et de Caveing [Ca] ainsi qu'aux nombreuses notes qui accompagnent l'édition anglaise des *Eléments* d'Euclide par Heath [He1]. On peut lire aussi le mémoire de DEA de Soussan [Sou].

[12]*Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE], p. 120-122.

[13]Eliane Cousquer [Co2].

Remarque : Le rapport de deux grandeurs n'est pas un nombre (sauf si la première est un multiple de la seconde) ni même un rapport de nombres (sauf si les grandeurs sont commensurables) ; la théorie d'Eudoxe-Euclide élimine ainsi le numérique. Notons que dans les calculs pratiques, les géomètres grecs savaient approcher les rapports de grandeurs par des rapports de nombres (les fractions d'aujourd'hui), un exemple est donné par le calcul approché de π par Archimède[14] ou les calculs d'aires et de volumes par Héron d'Alexandrie[15].

3. *La démonstration*

Nous allons voir comment la notion d'égalité de raison permet de montrer la proposition 1 du Livre VI.

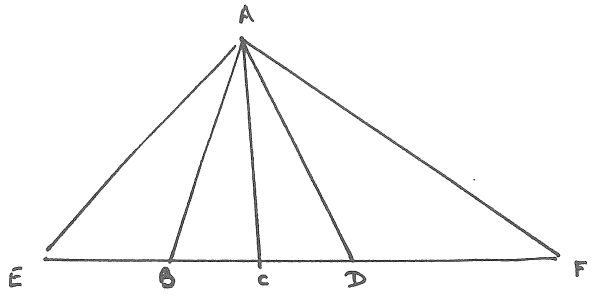

fig. 4

Soient m et n deux nombres entiers et soient les points **E** et **F** sur la droite **CD** tels que

$$\mathbf{CE} = m\,\mathbf{CB}$$

$$\mathbf{CF} = n\,\mathbf{CD}$$

la proposition 38 du Livre I implique

$$\text{aire } \mathbf{ACE} = m \text{ aire } \mathbf{ACB}$$

$$\text{aire } \mathbf{ACF} = n \text{ aire } \mathbf{ACD}$$

On montre aisément que si **CE** est plus grand que, égal à, ou plus petit que **CF**, alors l'aire du triangle **ACE** est plus grande que, égale à, ou plus petite que l'aire du triangle **ACF**; autrement dit

$m\,\mathbf{CB} > n\,\mathbf{CD}$ implique m aire $\mathbf{ACB} > n$ aire $\mathbf{ACD}$

$m\,\mathbf{CB} = n\,\mathbf{CD}$ implique m aire $\mathbf{ACB} = n$ aire $\mathbf{ACD}$

$m\,\mathbf{CB} < n\,\mathbf{CD}$ implique m aire $\mathbf{ACB} < n$ aire $\mathbf{ACD}$

donc la raison de **BC** à **CD** est la même que celle du triangle **ABC** au triangle **ABD**.

On peut alors montrer le théorème de Thalès (proposition 2 du Livre VI):

"Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés

---

[14]Archimède [Arc], p. 140-143.
[15]Heath [He2], vol. 2, p. 320-343.

proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle".

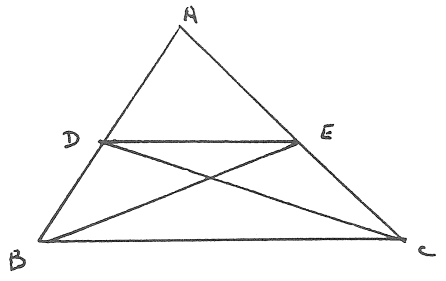

fig. 5

On veut montrer l'égalité

BD/DA = CE/EA

On sait, d'après la proposition précédente, que

BD/DA = aire **EBD**/aire **EDA**

CE/CA = aire **DCE**/aire **DAE**

d'autre part, les triangles **BED** et **CED** ayant même base et compris entre les mêmes parallèles sont égaux, d'où la proposition.

On laisse au lecteur le plaisir de démontrer la réciproque.

La démonstration d'Arnauld

1. *La critique de Port-Royal*

La démonstration euclidienne ne veut laisser aucun point obscur dans la démonstration, c'est-à-dire que les principes ayant été énoncés (définitions, postulats, axiomes), les propositions s'enchaînent logiquement sans faire appel à des références extérieures à ces principes et aux règles de la logique (ce qui n'exclut pas l'usage de l'intuition géométrique, c'est-à-dire d'une appréhension globale des objets que l'on étudie).

Ainsi, le postulat des parallèles une fois énoncé, Euclide peut montrer l'égalité des angles correspondants et des angles alternes-internes définis par une sécante coupant deux droites parallèles, de même le principe de l'égalité par superposition permet de montrer les cas d'égalité des triangles ; on a ainsi les ingrédients nécessaires à la mise en place de la méthode des aires. La théorie des proportions d'Eudoxe permet alors de démontrer la proposition 1 du Livre VI et d'en déduire le théorème de Thalès.

Si la rigueur de l'enchaînement des raisonnements conduit à la certitude, la démonstration elle-même n'explique pas les raisons de la propriété démontrée, on comprend qu'elle est non seulement vraie mais aussi nécessairement vraie (elle ne peut pas ne pas être vraie), on ne comprend pas pourquoi elle est vraie. C'est la critique que feront les philosophes de Port-Royal à la démonstration euclidienne, critique que Antoine Arnauld et Pierre Nicole vont développer dans *La Logique de Port-Royal* en énumérant les défauts de la méthode des géomètres (c'est-à-dire des géomètres grecs et de leurs successeurs), parmi lesquels nous citerons[16] :

"Avoir plus le soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plus que de l'éclairer".

"Prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves.".

"Démonstration par l'impossible"[17].

"Démontrer par des voies trop éloignées.".

"N'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature".

Cette dernière critique est un point essentiel de la philosophie de Port-Royal, la recherche du *vrai ordre de la nature* auquel s'identifierait un ordre naturel de la connaissance, ce qu'Arnauld exprime au début de ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* :

"Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous connaissons naturellement [18]".

Cette recherche d'un ordre naturel explique la position critique de Port-Royal envers la méthode euclidienne ; si la science se construit sur ce que nous savons naturellement, ce savoir naturel n'a, quant à lui, pas besoin d'être prouvé, ce que Pascal expliquait déjà dans la première des règles de la démonstration qu'il énonçait dans son opuscule *De l'Esprit géométrique et de l'Art de persuader* :

"N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on ait rien de plus clair pour les prouver [19]".

---

[16]Arnauld, Nicole [AN], quatrième partie, chapitre IX ; pour une analyse de la critique de Port-Royal, cf. Barbin [Ba].

[17]Il s'agit de la démonstration par l'absurde ; nous verrons cependant que Arnauld ne peut s'en passer dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*.

[18]Arnauld [Arn1], livre I .

[19]Pascal[Pa], p. 357.

Le rôle de la démonstration n'est plus alors seulement de convaincre par un discours logiquement parfait.

"Il ne suffit pas pour avoir une parfaite science de quelque vérité, d'être convaincu que cela est vrai, si de plus on ne pénètre par des raisons prises de la nature de la chose même pourquoi cela est vrai"[20]".

écrivent Arnauld et Nicole, précisant que c'est la seule façon de satisfaire l'esprit.

C'est en cela que les démonstrations par des voies trop éloignées ne sauraient être satisfaisantes; en effet, introduisant, pour des raisons liées à l'ordre logique du discours, des notions qui peuvent être étrangères à la nature même des objets sur lesquels portent ces démonstrations, elles occultent les *vraies raisons* de la vérité des assertions démontrées.

Parmi ces entorses au vrai ordre de la nature, Arnauld et Nicole citeront la place de la théorie des proportions au milieu d'un exposé de géométrie plane (livres I à IV et livre VI) et l'usage des aires pour montrer des propriétés de lignes. C'est évidemment la place accordée à la méthode des aires qui est critiquée, en particulier, en ce qui nous concerne, le détour par les aires pour montrer que des lignes sont proportionnelles.

L'ouvrage d'Arnauld, publié en 1667, se propose alors de mettre *un ordre naturel* dans l'exposé de la géométrie, ce que l'auteur explique dans sa préface :

"étant persuadé que c'est une chose fort avantageuse de s'accoutumer à réduire les pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclairent les unes par les autres, il (l'auteur) a toujours quelques pensées de ce que les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion"[21].

et, revenant sur le vrai ordre qu'il se propose d'introduire dans son ouvrage, Arnauld précise :

"Il (l'auteur) ajoutait même que cet ordre ne servait pas seulement à faciliter l'intelligence et à soulager la mémoire, mais qu'il donnait lieu de trouver des principes plus féconds et des démonstrations plus nettes que celles dont on se sert d'ordinaire... démonstrations toutes nouvelles, qui naissent d'elles-mêmes des principes qui y sont établis..."

Notre propos n'est pas d'analyser l'ouvrage d'Arnauld et l'ordre de son développement mais d'expliciter à travers l'étude du théorème de Thalès, le principe de la méthode et de la comparer à celle d'Euclide. Nous avons dit ailleurs l'influence des idées de Port-Royal dans le développement de l'enseignement de la géométrie en France[22], nous verrons ici comment cette influence s'est manifestée à propos du théorème des lignes proportionnelles.

2. *La théorie des proportions*

A l'époque où Arnauld écrit son ouvrage, la notion de nombre s'est élargie, même si les nombres *sourds*[23] qui représentent les rapports de grandeurs incommensurables n'ont pas un statut théorique bien défini. On sait cependant effectuer les opérations arithmétiques sur les raisons (qu'elles soient de nombre à nombre, c'est-à-dire des raisons de grandeurs commensurables, ou qu'elles soient sourdes, c'est-à-dire des raisons de grandeurs incommensurables) et en calculer des approximations; on sait aussi, une longueur étant donnée, construire une seconde longueur ayant une raison donnée (de nombre à nombre ou

---

[20]Arnauld, Nicole [AN], Quatrième partie, chapitre IX, p. 398.

[21]Arnauld [Arn1], préface.

[22]Bkouche [Bk2].

[23]Le terme sourd signifie *"que la raison n'entend pas"*, autrement dit *inaccessible à la raison*; cette expression est d'origine arabe.

sourde) avec la première. Cela conduira Stevin à identifier nombres et raisons et ainsi énoncer une notion *unifiée* de nombre même s'il n'en définit pas le statut[24]. Ce *coup de force* ne sera pas accepté sans réserve et l'on verra les auteurs se partager entre ceux qui acceptent cette identification (ainsi Descartes dans sa *Géométrie* de 1637) et ceux qui, plus prudents, continuent à distinguer raisons et nombres.[25]

Notre propos n'est pas de faire un historique de la notion de nombre (nous renvoyons aux ouvrages de Jean Dhombres et Eliane Cousquer cités dans la bibliographie); nous dirons seulement que s'est mise en place une arithmétique qui unifie les opérations sur les nombres et les opérations sur les grandeurs, même si elle distingue nombres et grandeurs[26]

C'est sur une telle arithmétique qu'Arnauld va fonder la théorie des proportions. C'est ainsi que son ouvrage commence par quatre livres consacrés à cette arithmétique.

Après avoir expliqué, dans un premier livre, les opérations arithmétiques sur les nombres et les grandeurs, Arnauld étudie au livre II la théorie des proportions[27] :

L'auteur commence par définir la raison comme la manière dont une grandeur (l'antécédent) est contenue dans, ou contient, une autre (le conséquent), distinguant deux sortes de raisons:

"L'une est quand la grandeur ou quelqu'une de ses aliquotes est contenue tant de fois précisément dans une autre."

ce qu'il appelle *"raison exacte"* ou *"raison de nombre à nombre"*, puisque dans ce cas la raison peut s'exprimer comme raison d'un nombre entier à un autre.

"L'autre manière selon laquelle une grandeur est contenue dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre."

ce qu'on appelle une *"raison sourde"*.

Une proportion est alors une égalité de raison qu'Arnauld définit ainsi:

"Deux raisons sont appelées égales quand les antécédents contiennent également les conséquents, ou sont également contenus dans les conséquents."

Si cette première définition donne une idée de ce qu'est une proportion, elle est insuffisante pour les raisons sourdes, ce qui amène Arnauld à donner une seconde définition:

"Deux raisons sont appelées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antécédents sont chacune également contenues dans chaque conséquent."

autrement dit, soient a, b, c, d quatre grandeurs, a et b homogènes, c et d homogènes, nous dirons que la raison de a à b est égale à la raison de c à d (a est à b comme c est à d, ce qu'Arnauld note $a.b :: c.d$)) si x et y étant deux mêmes parties aliquotes de a et c (c'est-à-dire telles que $a = mx$ et $c = my$, m étant un nombre entier) l'une des deux assertions est vérifiée:

i) si x est précisément tant de fois dans b, alors y est autant de fois dans d, auquel cas la raison de chaque antécédent à son conséquent est de nombre à nombre.

ii) si x n'est jamais précisément tant de fois dans b, mais toujours avec quelque résidu, alors y est autant de fois dans d mais avec quelque résidu, auquel cas la raison est sourde.

Arnauld remarque alors que, si aucune partie aliquote de a n'est contenue un nombre entier de fois dans b, il se pourrait que pour l'une d'entre entre elles, la partie aliquote de c correspondante soit contenue un nombre entier de fois dans d; il montrera plus loin que cela est impossible. Nous proposons , à titre d'exercice, que le lecteur vérifie cette proposition qui

---

[24]Stevin, *Théorie des incommensurables grandeurs* (1585), cité dans *Mathématiques au Fil des Ages* [GIIE].

[25]On peut lire à ce sujet l'article *"Nombres"* dans l'Encyclopédie (cf. *Encyclopédie Méthodique* [Enc], section Mathématiques, tome deuxième, p. 464 et sq.); nous renvoyons aussi à l'article cité d'Eliane Cousquer [Cou2]

[26]Il faudrait citer les travaux de Viète qui, distinguant le calcul numérique (calcul sur les nombres) et le calcul spécieux (calcul sur les grandeurs), les unifie via le calcul littéral.

[27]Arnauld [Arn1], livre II.

prouve qu'une raison sourde ne peut être égale à une raison de nombre à nombre, assurant la cohérence de la théorie des proportions selon Arnauld.

Arnauld peut alors étudier les propriétés des proportions ce que nous ne ferons pas ici, renvoyant à l'ouvrage d'Arnauld. Toutefois nous proposons au lecteur, à titre d'exercice, de montrer, façon Arnauld, les propriétés suivantes[28]:

i) $a/b = c/d$ implique $b/a = d/c$

ii) $a/b = c/d$ implique $(a + b)/b = (c + d)/d$

iii) si a, b, c, d sont des grandeurs homogènes, alors $a/b = c/d$ implique $a/c = b/d$

Notons que Arnauld ne dit pas qu'une raison est un nombre.

Arnauld donnera une nouvelle formulation de la théorie des proportions dans les éditions ultérieures de son ouvrage[29], se proposant de rendre plus accessibles les seconds et troisième livres (ceux consacrés à la théorie des proportions et au calcul des raisons).

La raison devient *"la quantité relative d'une grandeur comparée à une autre"*[30], ce qui, à défaut de clarifier le concept de raison, en souligne le caractère quantitatif par rapport à la *"manière"* de la première édition (laquelle n'est pas sans rappeler la définition 3 du Livre V des *Eléments* d'Euclide).

En précisant que la raison est une quantité, Arnauld exprime que l'on peut comparer les raisons:

"Comme la raison est une quantité, quoique relative, toutes les propriétés de la quantité lui conviennent; c'est pourquoi une raison est égale, ou plus grande, ou plus petite qu'une autre raison"[31]

Arnauld distingue encore raison de nombre à nombre et raison sourde; si la raison de nombre à nombre est représentée par une *"fraction"* ou *"nombre rompu"*, la raison sourde *"ne peut être marquée par aucun nombre"*[32]

Arnauld énonce alors plusieurs axiomes sur les proportions qui vont lui permettre d'énoncer le théorème suivant:

"Deux raisons sont égales quand toutes les aliquotes communes pareilles de chaque antécédent sont également contenues dans son conséquent"[33]

Ainsi Arnauld démontre ce qui lui servait de définition de l'égalité des raisons dans la première édition.

Le théorème est évident dans le cas des raisons de nombre à nombre.

Dans le cas des raisons sourdes, Arnauld utilise le fait que, des raisons étant des grandeurs, on peut les comparer. Il montre alors, en utilisant la classique double réduction à l'absurde (la méthode d'exhaustion des géomètres grecs[34]) que si les aliquotes pareilles des antécédents sont également contenues dans les antécédents, alors les raisons sont égales.

---

[28]ibid p. 5 et 6.

[29]une seconde édition sera publiée en 1683, puis corrigée en 1693; cette dernière est publiée dans le tome 42 des *Oeuvres complètes* d'Arnauld.

[30]Arnauld [Arn2], p. 39.

[31]ibid.

[32]ibid.

[33]ibid. p. 49.

[34]rappelons l'ambiguïté du terme *"exhaustion"* inventé par Grégoire de Saint-Vincent pour lequel il signifie *"l'épuisement"* d'une surface ou d'un volume par une somme infinie de surfaces polygonales ou de volumes polyédraux (cf. l'article de Jean-Pierre Le Goff [LeG] cité dans la bibliographie). En ce qui concerne les géomètres grecs, lorsqu'on parle de la méthode d'exhaustion, il s'agit de l'exhaustion des cas: deux grandeurs étant données, l'une d'elle est nécessairement supérieure, inférieure ou égale à la seconde, si l'on montre que les deux premiers cas conduisent à une contradiction, alors l'égalité est vraie. La méthode d'exhaustion des Grecs participe ainsi du raisonnement par l'absurde.

En effet, considérons les raisons a/b et c/d (notons que dans la troisième édition, Arnauld emploie la notation a/b pour désigner la raison de a à b, a étant appelé le numérateur et b le dénominateur) telles que les aliquotes pareilles de a et c sont également contenues dans b et d; cela signifie que si α est une partie aliquote de a et γ la partie aliquote pareille de c, soit

$$a = n\alpha \qquad\qquad c = n\gamma$$

alors b contient un même nombre de fois α augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que α et d contient le même nombre de fois γ augmenté éventuellement d'un résidu plus petit que γ, soit

$$b = p\alpha + \varepsilon \qquad\qquad \varepsilon < \alpha$$

$$d = p\gamma + \eta \qquad\qquad \eta < \gamma$$

Si a/b et c/d ne sont pas égales, alors a/b est supérieure ou inférieure à c/d.

Supposons a/b supérieure à c/d, alors en augmentant le conséquent b, on diminue la raison a/b jusqu'à la rendre égale à c/d (le fait que a/b diminue lorsque b augmente est une conséquence des axiomes énoncés par Arnauld[35]). On peut alors trouver z tel que $a/(b + z) = c/d$; si on prend une partie aliquote de a inférieure à z, on arrive à une contradiction comme le vérifiera aisément le lecteur. Ainsi a/b ne peut être supérieur à c/d. Un raisonnement analogue montre que a/b ne peut être inférieur à c/d. On en conclut l'égalité des deux raisons.

Ici encore, Arnauld utilise le raisonnement par l'impossible. Ce caractère incontournable est lié à *"la divisibilité à l'infini"* comme le remarque Arnauld qui écrit:

"Or il est clair que tout ce qui tient de l'infini ne saurait être compris par un esprit fini tel que celui de l'homme."[36]

Il s'ensuit que l'on ne peut avoir pour des raisons sourdes *"des notions aussi claires"* que pour les raisons de nombre à nombre; Arnauld distingue ainsi les preuves négatives dans lesquelles intervient le raisonnement par l'absurde des preuves positives. Le terme *négatif* marque ici la limite de la compréhension humaine; on le retrouve dans la classique notion de *théologie négative*, laquelle se propose moins de dire ce que Dieu est que d'approcher la connaissance de Dieu en exprimant ce qu'il n'est pas.

Pour une étude plus complète de la théorie des proportions chez Arnauld et de la comparaison des éditions successives des *Nouveaux Elémens de Géométrie*, nous renvoyons à un article à paraître de Anne Chevalier[37].

3. *La théorie des parallèles*

Au livre VI de ses *Nouveaux Elémens de Géométrie*, Arnauld énonce deux manières de considérer des parallèles, l'une négative et l'autre positive:

"La négative est de ne se rencontrer jamais, quoi que prolongée à l'infini."

"La positive, d'être toujours également distantes l'une de l'autre, ce qui consiste en ce que tous les points sont également distants de l'autre: c'est-à-dire que les perpendiculaires de chacun des points d'une ligne à l'autre ligne, sont égales."[38]

et l'auteur remarque que la notion négative est une conséquence de la notion positive.

---

[35] Arnauld [Arn2], troisième axiome p.46.
[36] ibid. p. 97.
[37] Anne Chevalier [Ch2]
[38] Arnauld [Arn1], livre VI, p. 103-104.

Avec la définition dite positive, Arnauld admet implicitement qu'une ligne dont les points sont à une même distance d'une droite donnée est encore une droite, on sait aujourd'hui que cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles. La définition positive permet à Arnauld d'énoncer que si deux droites sont perpendiculaires à une droite donnée, alors toute perpendiculaire à l'une d'elle est perpendiculaire à la seconde (sixième lemme) et d'en déduire que ces deux droites sont parallèles (première proposition).

Par contre, pour montrer l'égalité des angles alternes-internes, Arnauld a besoin de la mesure des angles qu'il relie à la mesure des arcs de cercle, et ce n'est qu'au livre VIII qu'il énonce la propriété suivante:

"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."[39]

Etant donnée l'importance de cette propriété, nous expliquons comment Arnauld la démontre.

Arnauld montre d'abord la possibilité de définir la mesure des arcs de cercle indépendamment du rayon, pour cela il énonce (huitième théorème du livre VII):

"Quand plusieurs circonférences sont concentriques et que du centre on tire des lignes indéfinies, les arcs de toutes ces circonférences compris entre ces deux lignes sont en même raison à leurs circonférences."

La démonstration repose sur la théorie des proportions précédemment définies.

Notons d'abord que, dans un cercle ou dans deux cercles égaux, l'égalité des arcs soutenus par des cordes égales et l'égalité des cordes soutenant des arcs égaux (pourvu que ces arcs soient plus petits qu'un demi-cercle, sont posées en axiome (cinquième axiome du livre V), conséquence *"évidemment nécessaire de l'entière uniformité de la circonférence"*[40].

Arnauld définit alors le *sinus* d'un arc moindre que le quart de la circonférence comme la perpendiculaire menée de l'une des extrémités de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité et remarque que le sinus n'est autre que la moitié de la corde sous-tendant le double de l'arc (notons que le sinus est une ligne), deux arcs égaux ont ainsi même sinus et réciproquement[41]. Arnauld peut alors démontrer le huitième théorème du livre VII.

La démonstration repose sur l'idée qu'une partie aliquote de l'arc de la grande circonférence définit une partie aliquote de l'arc de la petite circonférence et que la première partie aliquote est contenue dans la grande circonférence, avec peut-être un résidu, autant de fois que la seconde partie aliquote est contenue dans la petite circonférence[42].

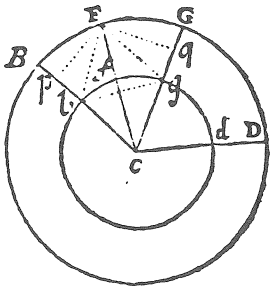

fig. 6

[39]ibid. livre VIII, p. 152.
[40]ibid. livre V, p. 86.
[41]ibid. livre VII, p. 126-127.
[42]ibid. livre VII, p. 128.

On veut montrer que les arcs **BD** et *bd* sont entre eux comme les circonférences qui les portent.

Soit **X** une partie aliquote de **BD**, et **BF** égal à cette aliquote, alors *bf* est la même aliquote de *bd*; pour le prouver, Arnauld construit l'arc **FG** égal à l'arc **BF** et montre que les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

En effet les arcs égaux **BF**, **FG** ont même sinus, alors les droites *pb* et *qg* sont égales (cela résulte de ce que deux cordes égales sont équidistantes du centre, quatrième du livre VII) et par conséquent les droites **F***b* et **F***g* sont égales, la droite **F***c* est donc la perpendiculaire à *bg* passant par son milieu et coupe l'arc *bg* en son milieu (second théorème du livre VII), ainsi les arcs *bf* et *fg* sont égaux.

On laisse au lecteur le soin de terminer.

Le huitième théorème du livre VII permet alors de définir la mesure des arcs, la circonférence ou une partie déterminée de la circonférence étant prise pour unité[43].

L'angle étant défini, au début du livre VIII, comme une surface comprise entre deux lignes qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, ce point étant le sommet de l'angle, Arnauld peut énoncer la relation usuelle entre angle et arc de cercle, relation qui permet de définir la mesure des angles à partir de la mesure des arcs[44]. En particulier on peut définir le *sinus* d'un angle, un rayon (c'est-à-dire la longueur des côtés) étant donnée. On peut alors énoncer la proposition suivante (premier corollaire du livre VIII)

"Toute oblique entre deux parallèles fait les angles alternes sur ces parallèles égaux, c'est-à-dire que l'aigu qui est d'une part est égal à l'aigu qui est de l'autre part, et par conséquent l'obtus à l'obtus."

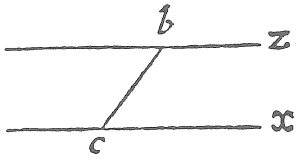

fig. 7

Pour le montrer, Arnauld remarque que, si l'on prend pour rayon la ligne *bc*, les sinus des angles alternes sont égaux.

Arnauld en déduit les deux corollaires (second et troisième corollaires):

"Les obliques égales entre les mêmes parallèles font des angles égaux (avec les parallèles)."

"Les obliques entre parallèles qui font des angles égaux sont égales."

ce qui implique (septième corollaire):

"Plusieurs parallèles étant également distantes les unes des autres, c'est-à-dire la première de la deuxième, la deuxième de la troisième, la troisième de la quatrième..., si une même ligne les coupent toutes, toutes les portions de ces lignes comprises entre deux de ces parallèles sont égales."

---

[43]ibid. livre VII, p. 129.

[44]ibid. livre VIII, p. 142-143.

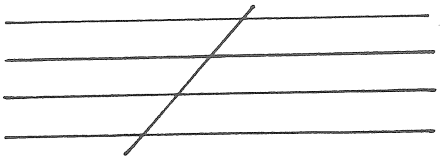

fig. 8

4. *Le théorème des lignes proportionnelles*

Au début du livre X consacré à l'étude des lignes proportionnelle, Arnauld introduit la notion d'espace parallèle, *"un espace compris d'une part entre deux droites parallèles et indéfini de l'autre"*[45].

Après avoir rappelé les résultats du livre VIII, Arnauld peut alors énoncer la proposition fondamentale:

"Lorsque deux lignes sont également inclinées en deux différents espaces parallèles, elles sont entre elles comme les perpendiculaires de ces espaces, et leur éloignement de la perpendiculaire sont aussi en même raison."[46]

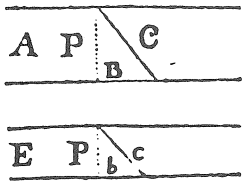

fig. 9

Soient les deux espaces **A** et **E**, on notera **P** et *p* les perpendiculaires respectives dans l'espace **A** et dans l'espace **E**, de même **C** et *c* les obliques respectives, **B** et *b* les éloignements respectifs. Alors **P** est à *p* comme **C** est à *c* et comme *B* est à *b*.

Divisons **P** en parties égales, *x* étant la partie aliquote de **P** ainsi définie, et menons par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace **A**, lesquelles rencontrent **C** qu'elles divisent en parties égales, soit *y* la partie aliquote de **C** ainsi définie; par les points de division de **C**, on mène des parallèles à **P**, lesquelles rencontrent **B** qu'elles divisent en parties égales et on note *z* la partie aliquote de **B** ainsi obtenue; il est clair que **P** contient autant de fois *x* que **C** contient *y* et que **B** contient *z*.

Cela fait, prenons *x* pour mesurer *p* de l'espace **E**, *x* est contenu un certain nombre de fois dans *p* avec peut-être un résidu moindre que *x*, alors en menant par les points de division des parallèles aux droites définissant l'espace E, on divise *c* en autant de parties égales avec peut être un résidu, et en menant par les points de division de *c* des parallèles à *p*, on divise de même *b* en autant de parties égales avec peut-être un résidu; ainsi par la définition des grandeurs proportionnelles, **P** est à *p* comme **C** est à *c* et comme *B* est à b, ce qui prouve la proposition fondamentale.

[45]ibid. livre X, p. 188.
[46]ibid. livre X, p. 190.

Arnauld énonce plusieurs conséquences parmi lesquelles les deux suivantes (premier et second corollaires)[47]:

"Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties, telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième... comme chaque autre toute à la même partie première, ou deuxième, ou troisième..."

"Si plusieurs lignes sont menées d'un même point sur une même ligne, elles sont coupées proportionnellement par toutes les lignes parallèles à celle qui les termine."

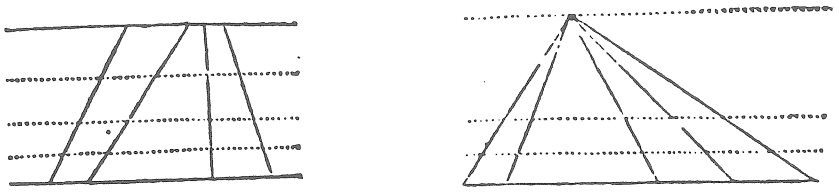

fig. 10

On comparera l'énoncé du premier corollaire du livre X avec celui du septième corollaire du livre VIII, cité ci-dessus.

5. *Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et d'Arnauld*

Après la découverte des irrationnelles le numérique (les nombres entiers et les fractions d'entiers) devenait insuffisant pour construire une théorie de la mesure des grandeurs, la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide se proposait alors de définir la mesure à partir de la seule considération des grandeurs; elle s'appuyait pour cela sur la notion d'ordre et la mesure des grandeurs se définissait comme comparaison de grandeurs indépendamment de toute détermination numérique; en cela la théorie de la mesure se différenciait de la pratique de la mesure. D'une part, mesurer consiste essentiellement, la grandeur unité ayant été choisie, à associer un *nombre* à la grandeur que l'on mesure, savoir, le nombre de fois que la grandeur contient l'unité (ou une partie de l'unité); or la théorie d'Eudoxe élimine le numérique pour les raisons que nous avons dites, elle énonce des règles de comparaison de rapports, non une méthode de détermination de la *valeur* d'un rapport. D'autre part, la pratique de la mesure s'appuie sur la détermination de parties (au sens des sous-multiples) de la grandeur que l'on mesure et de l'unité, alors que la théorie d'Eudoxe s'appuie sur de considérations d'équimultiples.

Nous avons signalé ci-dessus comment des méthodes de calcul approché pouvaient relier ces deux aspects de la mesure, mais sur le plan théorique, la mesure des grandeurs restait indépendante de toute représentation numérique et le restera tant qu'une construction appropriée ne sera pas mise en place, construction qui sera liée elle-même à la mesure des grandeurs, nous y reviendrons.

La problématique d'Arnauld nous semble, au contraire, beaucoup plus proche de la pratique de la mesure: une unité étant choisie, la mesure est définie par le nombre de fois que la grandeur contient l'unité, ou une partie de l'unité, avec peut-être un résidu, c'est la façon même dont Arnauld explicite le rapport de deux grandeurs homogènes lorsqu'il prend comme unité une partie aliquote de la première.

Ainsi deux points de vue apparaissent. Le premier propose une construction rigoureuse s'appuyant sur la notion d'ordre; s'il élimine la difficulté posée par l'incommensurabilité, il s'écarte, pour les raisons que l'on a dites, de la pratique qu'il veut théoriser. Le second reste

[47]ibid. livre X, p. 193-194.

plus proche de la pratique de la mesure, contribuant ainsi à mettre en valeur la relation entre le numérique et le géométrique même s'il reste impuissant à définir ce lien de façon rigoureuse jusqu'à la construction des nombres réels.

C'est ce lien entre le géométrique et le numérique défini par la mesure qui conduisait Descartes, en 1637, à unifier les deux calculs, le numérique et le spécieux (le calcul sur le grandeurs), définis par Viète dans son *Introduction à l'Art analytique* [Vi].

Descartes remarque d'abord, au début de sa *Géométrie*:

"Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire."[48]

Mettant alors en place ce calcul géométrique qu'est la méthode des coordonnées, Descartes remarque que les grandeurs géométriques qu'il considère peuvent être représentées par des nombres dès lors qu'on a choisi une unité de longueur; le calcul géométrique, qui participe du calcul spécieux de Viète, devient ainsi un calcul numérique. Notons que Descartes ne pose pas le problème des irrationnelles, il lui semble évident qu'une unité étant choisie, toute longueur peut être représentée par un nombre et inversement tout nombre peut être représenté par une longueur. Descartes rejoint ainsi le point de vue de Stevin (cf. ci-dessus). Ce point de vue lui permet de représenter le produit de deux lignes par une autre ligne, comme il explique au début de son ouvrage, utilisant le théorème des lignes proportionnelles pour justifier sa construction[49].

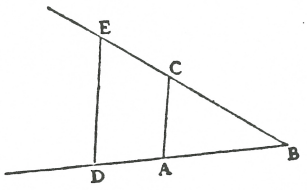

fig. 11

Du point de vue géométrique, alors que les géomètres grecs vont chercher dans la méthode des aires les conditions de la rigueur, la notion d'aire, via une théorisation du découpage et de la recomposition des surfaces, devenant une notion première de la géométrie, Arnauld, conformément à sa recherche du *vrai ordre de la nature*, pose l'antériorité de la ligne par rapport à la surface; c'est cet ordre posé *a priori* qui l'amène à mettre en valeur, d'abord la définition positive des parallèles, ensuite la propriété qui énonce que des parallèles équidistantes découpent sur une sécante des segments égaux, propriété qu'il énonce deux fois, d'abord au livre VIII (septième corollaire), ensuite au livre X (huitième lemme), propriété qui énonce *la raison géométrique* du théorème des lignes proportionnelles, c'est elle en effet qui, une fois définie la théorie des proportions, guide la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, respectant ainsi le *vrai ordre de la nature*.

Notons le détour par la mesure des angles que propose Arnauld pour démontrer l'égalité des angles alternes-internes; les auteurs ultérieurs qui s'inspireront des méthodes d'Arnauld en donneront une démonstration plus simple s'appuyant sur les cas d'égalité des triangles, lesquels ne semblent pas avoir dans l'ouvrage d'Arnauld l'importante place qu'ils occupent dans l'oeuvre euclidienne; cependant la démonstration de la proportionnalité des angles et des arcs proposée par Arnauld restera un point important des traités de géométrie élémentaire.

D'Alembert pourra ainsi affirmer:

[48]Descartes [Des], p. 333.
[49]ibid, p. 334.

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

"Les propositions fondamentales(de la géométrie) peuvent être réduites à deux: la mesure des angles et le principe de superposition."[50]

Euclide, après avoir montré que des angles au centre égaux découpent sur des cercles égaux des arcs égaux (*Eléments* Livre III, Propositions 24, 26, 27), utilisait la théorie des proportions du Livre V pour montrer cette proportionnalité (Livre VI, Proposition 33)[51]. Nous verrons ci-dessous comment les auteurs des grands traités de géométrie ont résolu le problème de la proportionnalité des angles et des arcs d'une façon analogue à celle dont ils démontrent le théorème des lignes proportionnelles.

---

[50]D'Alembert [Dal], *Essai*, p.113; voir aussi l'article *"Géométrie"* dans l'Encyclopédie [Eu].

[51]Notons la difficulté posée par la définition d'un multiple d'un angle ou d'un arc; en effet pour Euclide, la notion d'angle implique que celui-ci est moindre que deux droits, cependant Euclide peut être amené à considérer des sommes d'angles plus grandes que deux droits; pour une discussion de ce problème, nous renvoyons à l'ouvrage cité de Heath [He1] (tome II, p. 275-276). Le point de vue d'Arnauld qui utilise les parties évite cette difficulté.

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. *Sur quelques traités classiques*

On a vu que pour Arnauld la théorie de la mesure des grandeurs relève d'une arithmétique englobant nombres et grandeurs et que la théorie des proportions relève de cette arithmétique. Cette conception, qui remet en question l'ordre euclidien, sera reprise dans la plupart des grands traités de géométrie élémentaire ultérieurs; dans ces traités le chapitre consacré aux lignes proportionnelles, qui devient le chapitre introductif à la mesure des grandeurs, s'appuie sur cette arithmétique préalable qui traite des raisons, mêlant arithmétique des nombres et arithmétique des grandeurs (le calcul numérique et le calcul spécieux de Viète) et précisant parfois, à la façon de Descartes, que le choix d'une unité permet d'*identifier* ces deux calculs; on évite ainsi une définition précise des proportions, se contentant de les définir comme des égalités de rapports sans que la notion de rapport soit toujours explicitée, soit que l'auteur renvoie à un traité d'arithmétique, soit qu'il juge inutile de préciser une notion qui lui apparaît claire.

Citons, parmi ces traités, les *Eléments de Géométrie* [La] de Lamy, publiés en 1685 et plusieurs fois réédités tout au long du XVIIIème siècle, ouvrage proche de celui d'Arnauld dont il reprend certaines parties, parfois textuellement; le projet de Lamy était de compléter l'ouvrage d'Arnauld en y ajoutant la géométrie solide, comme Lamy l'explique dans la préface de son ouvrage.

Lamy s'appuie sur la théorie des grandeurs qu'il a développé dans un ouvrage antérieur et dont il donne un extrait à la fin de ses *Eléments de Géométrie*[52].

Comme dans l'ouvrage d'Arnauld, la raison est *"la manière dont une grandeur contient ou est contenue dans celle avec laquelle on la compare"*[53], une proportion étant une égalité de raison. Si Lamy distingue raison de nombre à nombre et raison sourde, il n'explicite pas l'égalité de raison sourde.

Lamy introduit, comme Arnauld, la notion d'espace parallèle et démontre, utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles, les deux lemmes suivants[54]:

"Les lignes également obliques des espaces parallèles dans des espaces égaux sont égales."

"Les lignes également obliques dans des espaces parallèles inégaux sont inégales; plus grande si l'espace est plus grand, plus petite si l'espace est plus petit."

Il peut alors énoncer le théorème:

"Ayant partagé un espace parallèle par deux ou plusieurs parallèles, la perpendiculaire de l'espace et la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement"

En fait Lamy ne démontre le théorème que dans le cas commensurable, se contentant de remarquer, sans autre précision, que si une division en parties égales de la perpendiculaire laisse une partie soit plus petite soit plus grande, la même propriété aura lieu pour la division définie sur l'oblique. Si ce raisonnement semble renvoyer à celui d'Arnauld, il reste incomplet dans la mesure où l'égalité de raison n'est pas définie.

Notons que si Lamy ne définit pas la raison comme un nombre, il lui associe ce qu'il appelle l'*exposant* de la raison, qu'il définit comme le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, mais le quotient lui-même n'est pas défini; voici ce qu'écrit Lamy:

"Divisant l'un des deux termes d'une raison par l'autre terme, le quotient de cette division est appelé l'exposant de cette raison.

---

[52]Dans l'édition (posthume) de 1753, la théorie des grandeurs est intégrée dans les *Eléments de Géométrie*.

[53]Lamy [La1] p. 338.

[54]ibid. p. 103.

Parce qu'il expose et fait connaître la manière que l'un des deux termes contient l'autre ou en est contenu"[55]

Dans les *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Arnauld avait défini l'exposant d'une raison de nombre à nombre; pour une telle raison, l'exposant est représenté par la fraction irréductible qu'elle détermine[56]; deux raisons de nombre à nombre sont alors égales si et seulement si elles ont le même exposant. Arnauld précisait que cette dernière proposition ne peut s'étendre aux raisons sourdes, la notion d'exposant ne pouvant être définie dans ce cas[57].

Lamy ne semble pas prendre de telles précautions; d'une certaine façon, l'exposant, même s'il n'est pas un nombre, se comporte comme un nombre. Tout cela nous montre l'ambiguïté de la mise en place d'une relation entre grandeurs et nombres, ambiguïté née du coup de force de Stevin, ambiguïté qui marque une étape obligée dans le développement de la notion de nombre comme nous le verrons avec les traités de Legendre et de Lacroix.

Les idées développées par Arnauld seront reprises tout au long du XVIIIème siècle, nous ne pouvons ici citer tous les ouvrages traitant de la théorie des proportions géométriques, nous arrêtant seulement à deux traités, les *Elémens de Géométrie* de Clairaut qui restent l'un des meilleurs ouvrages d'introduction à la géométrie écrit jusqu'à ce jour (ouvrage malheureusement ignoré par l'enseignement) et le *Traité Elémentaire de Géométrie* de Bossut pour la démonstration qu'il donne du théorème des lignes proportionnelles.

Dans la préface de son ouvrage, Clairaut précise ses conceptions quant à l'enseignement de la géométrie insistant sur la nécessité de construire cet enseignement à partir d'une problématique bien définie. C'est ainsi qu'il s'appuie sur la mesure des terrains, problématique qu'il a choisi dans la mesure où elle lui sert *"d'occasion pour faire découvrir les principales propriétés géométriques"*[58].

C'est la nécessité de représenter à l'échelle les terrains que l'on veut mesurer qui conduit Clairaut à introduire la notion de figures semblables.

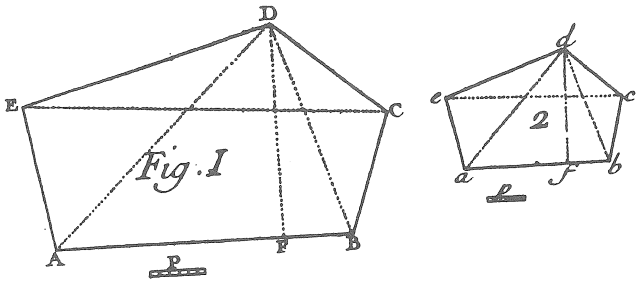

fig. 12

Deux figures **ABCDE** et *abcde* (fig. 12) sont semblables si d'une part les angles **A**, **B**, **C**, **D**, **E** sont respectivement égaux aux angles correspondant *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et si chacun des cotés *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* de la seconde figure contient une partie *p* autant de fois que chacun des côtés correspondants **AB**, **BC**, **CD**, **DE**, **EA** contient une partie **P**[59]. C'est cette dernière condition qui définit, selon Clairaut, la proportionnalité[60].

Dans un premier temps, Clairaut développe la théorie des figures semblables pour les seuls rapports commensurables; il montre en particulier que deux triangles équiangles sont

---

[55]ibid. p. 341.
[56]Arnauld [Arn1], p. 60 et Arnauld [Arn2], p. 92.
[57]Arnauld [Arn2], p. 102.
[58]Clairaut [Cl], p. xiv.
[59]ibid. Livre I, Article XXXIII.
[60]ibid. Livre I, Article XXXV.

semblables, de façon précise si les triangles **ABC** et *abc* sont équiangles et si *ab* est égal à une fraction de **AB**, alors *ac* (resp: *bc*) est égal à la même fraction de **AC** (resp: **BC**)[61].

C'est seulement à la fin du livre II, consacré à des calculs d'aires, que Clairaut étudie le cas des rapports incommensurables en utilisant une méthode d 'approximation proche de celle d'Arnauld[62].

Le traité de Bossut a été rédigé à l'usage des candidats des concours d'entrée aux Ecoles militaires[63].

Dans la section de son traité relative aux lignes proportionnelles, Bossut montre d'abord que, si un côté d'un angle est divisé en parties égales et si l'on mène à partir des points de division des droites parallèles, elles découperont sur l'autre côté des parties égales (proposition I[64]). Il peut alors énoncer que dans un triangle **ABC**, une parallèle **DE** au côté **BC** partage les deux autres côtés en parties proportionnelles (proposition II[65]); lorsque **AB** et **AD** sont des grandeurs commensurables, Bossut divise **AB** en parties égales à une partie aliquote commune et la démonstration se réduit à un comptage, lorsque **AB** et **AD** sont des grandeurs incommensurables, Bossut divise le côté **AB** en *"une infinité de parties égales"*, les parallèles à **BC** menées par les points de division partagent le côté **AC** en parties égales, alors les points **D** et **E** *"tomberont ou seront censés tomber sur deux points de division de* **AB** *et* **AC***"*, ce qui implique la proposition.

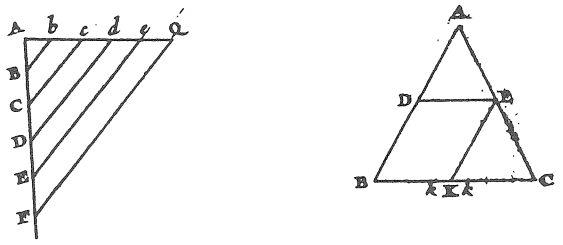

fig. 13

On peut comprendre une telle démonstration si on la relie à la géométrie de l'infini telle que l'ont développée Wallis et plus tard Fontenelle, variante de la théorie des indivisibles, l'infini apparaissant comme un *"nombre"* supérieur à tous les entiers[66].

On pourrait alors poser le problème d'une mise en forme d'une telle démonstration dans le cadre d'une géométrie non-standard qui userait des méthodes proches de celles de de l'analyse non-standard.

2. *Les "Elémens de Géométrie" de Legendre*

Avec l'ouvrage de Legendre[67], c'est un retour à Euclide qui se met en place; nous n'analyserons pas ici l'ouvrage dans son ensemble, renvoyant à un article ultérieur[68], nous nous contenterons ici d'étudier la démonstration du théorème de Thalès et la relation entre le numérique et le géométrique sur laquelle elle s'appuie. Si Legendre revient à la méthode des aires pour retrouver la rigueur euclidienne (on verra en particulier l'utilisation de la méthode d'exhaustion), sa théorie de la mesure s'appuie sur une arithmétique préalable dont il rappelle

---

[61]ibid. Livre I, Article XXXIX.
[62]ibid. Livre II, Article XXVII.
[63]Taton et als [Tat].
[64]Bossut [Bos], chapitre III, section I, p. 83.
[65]ibid, p. 86.
[66]cf. Wallis [Wa] et Fontenelle [Fo]; cf. aussi Anne Chevalier [Ch1] et Michel Blay [Bl].
[67]Legendre [Le].
[68]Bkouche [Bk3].

les résultats au début de son ouvrage, et à laquelle il renvoie les notions de raison et de proportion, comme il l'explique dans la préface des premières éditions :

"Il est nécessaire, pour l'intelligence de cet ouvrage, que le lecteur ait la connaissance de la théorie des proportions, que l'on trouve expliquée dans les traités ordinaires d'arithmétique ou d'algèbre..."[69]

Il peut ainsi mêler dans ses raisonnements, comme nous le verrons, les méthodes euclidiennes et les propriétés numériques.

Au début du livre III, intitulé *Les proportions des figures* Legendre remarque a propos des proportions:

"Si on a la proportion **A**:**B** :: **C**:**D** (**A** est à **B** comme **C** est à **D**), *on sait que le produit des extrêmes* **A** x **D** *est égal au produit des moyens* **B** x **C**."[70],

et il explique

"Cette vérité est incontestable pour les nombres; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres; et c'est ce qu'on peut toujours supposer: par exemple, si **A**, **B**, **C**, **D**, *sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquième, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité; alors* **A**, **B**, **C**, **D**, *représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes* **A**, **B**, **C**, **D**, *devient une proportion de nombres."*

mêlant ainsi, comme le veut la tradition cartésienne (Cf. ci-dessus), calcul numérique et calcul spécieux.

3. *La méthode des aires*

Notons d'abord que l'un des objectifs de Legendre est de démontrer le postulat des parallèles qu'il énonce sous la forme:

"Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits."

Les diverses éditions de son ouvrage correspondent aux différents démonstrations qu'il donne de cette assertion, (notons que dans les neuvième, dixième et onzième éditions, devant les critiques, il renonce à cette démonstration jusqu'à ce qu'il en trouve une nouvelle qu'il publie dans la douzième édition), mais ce n'est pas le lieu d'en parler ici.

Une fois démontrée cette assertion, Legendre peut démontrer la proposition énoncée comme postulat par Euclide, puis l'égalité des angles correspondants et alternes-internes définis par deux droites parallèles coupant une autre droite. Au livre III de son ouvrage, Legendre montre d'abord, à la façon d'Euclide, que les parallélogrammes (resp. les triangles) ayant des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents (c'est-à-dire ont des aires égales), puis il énonce l'assertion (proposition 3):

"Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases."

Lorsque les bases commensurables, l'assertion résulte d'un découpage convenable.

Lorsque les bases sont incommensurables, Legendre utilise la méthode d'exhaustion (c'est-à-dire la double réduction à l'absurde (cf. ci-dessus note 32))

---

[69]Legendre [Le], préface de la troisième édition, p. ii.

[70]ibid, p. 61.

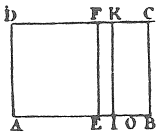

fig. 14

On veut montrer que l'aire **ABCD** est à l'aire **AEFD** comme **AB** est à **AE**, on considère le point **O** défini par la proportion

aire **ABCD** : aire **AEFD** :: **AB** : **AO**

l'existence du point **O** étant assurée par les propriétés arithmétiques des proportions numériques (en particulier le recours à l'arithmétique assure l'existence de la quatrième proportionnelle, dans la mesure où l'on admet que l'unité de longueur étant donnée, à tout nombre correspond une longueur).

On va montrer que **O** et **E** coïncident en prouvant que chacune des inégalités **AO** > **AE** et **AO** < **AE** conduit à une contradiction.

Supposons **AO** > **AE**, auquel cas le point **O** est entre **E** et **B**; divisons **AB** en parties égales à une longueur inférieure à celle de **EO**, il existe alors un point de division **I** situé entre **E** et **O**, auquel cas, considérant le rectangle **AIKD**, on peut écrire

aire **ABCD** : aire **AIKD** :: **AB** : **AI**

et par conséquent,

aire **AIKD** : aire **AEFD** :: **AI** : **AO**

mais **AEFD** est plus petit que **AIKD** et **AO** est plus grand que **AI**, ce qui est contradictoire.

De même, on montre que l'hypothèse **AO** < **A E** est contradictoire, ce qui prouve l'égalité **AO** = **AE**, donc les points **O** et **E** coïncident.

Les ingrédients de la démonstration du théorème de Thalès par la méthode des aires sont ainsi en place, mais le théorème apparaît seulement à la proposition 15; avant d'utiliser la méthode des aires, Legendre explique comment l'on peut dire que l'aire d'un rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur, en reliant cette formule au choix des unités. En fait, Legendre énonce la propriété suivante (proposition 4):

Deux rectangles quelconques **ABCD**, **AEGF** sont entre eux comme les produits des bases multipliés par les hauteurs, de sorte qu'on a

aire **ABCD** : aire **AEGF** :: **AB** x **AD** : **AE** x **AF**

En effet, disposant les deux rectangles comme ci-dessous

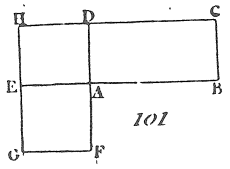

fig. 15

on a les proportions

aire **ABCD** : aire **AEHD** :: **AB** : **AE**

aire **AEHD** : aire **AEGF** :: **AD** : **AF**

on obtient la proportion cherchée par multiplication.

Legendre remarque alors que *"l'on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la base, et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur"*[71].Legendre explique que cette mesure n'est pas absolue, mais qu'elle le devient si on prend comme unité de surface le carré dont le côté est l'unité de longueur.

Cela étant dit, la méthode des aires devient une méthode de calcul et c'est ainsi qu'il l'utilise dans la suite, transformant en calcul le raisonnement euclidien, mêlant calcul numérique et calcul spécieux.

Legendre démontre ainsi plusieurs résultats des livres I et II des *Eléments* d'Euclide, dont le théorème de Pythagore (sa démonstration est celle d'Euclide), le théorème de Thalès est énoncé seulement à la proposition 15, l'énoncé et la démonstration sont ceux d'Euclide.

La suite du livre III est consacrée à l'étude des figures semblables. Il en déduit les classiques relations métriques dans un triangle. Ces relations portent, une fois l'unité choisie, sur les mesures de longueurs; les démonstrations se ramènent ainsi à un simple calcul (en cela Legendre se détache de la tradition euclidienne).

Notons que Legendre utilise la même méthode pour montrer la proportionnalité des angles au centre et des arcs[72]. Il montre d'abord, en utilisant le principe de superposition, la proposition suivante (Livre II, proposition 15):

"Dans le même cercle ou dans deux cercles égaux, les angles égaux **ACB, DCE** *dont les sommets sont au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux* **AB, DE.**

Réciproquement, si les arcs **AB, DE** *sont égaux, les angles* **ACB, DCE** *seront aussi égaux."*

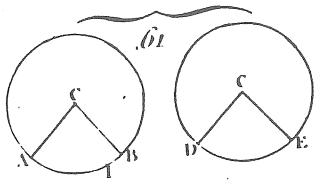

fig.16

Legendre montre alors l'égalité des rapports des angles aux centres et des rapports des arcs qu'ils sous-tendent dans le cas commensurables (proposition 16), puis, utilisant une méthode analogue à celle qu'il utilisera pour la démonstration de la proposition 3 du Livre III (cf. ci-dessus), il montre l'égalité des rapports dans le cas incommensurable (proposition 17). Nous laissons au lecteur le plaisir d'écrire une telle démonstration, sachant que Legendre admet, comme Euclide, l'existence de la quatrième proportionnelle. Ici la démonstration est indépendante de tout recours au numérique.

[71]ibid, p. 66.
[72]ibid, p. 43 et sqq.

Lacroix entre l'empirisme et Port-Royal

On dit souvent que, jusqu'à la réforme dite des *mathématiques modernes*, l'enseignement de la géométrie en France a suivi l'ouvrage de Legendre, c'est en partie vrai[73], mais c'est oublier l'influence de Lacroix et à travers lui de Port-Royal. Lacroix s'appuie à la fois sur les logiciens de Port-Royal et sur l'empirisme des Lumières, en particulier le sensualisme de Condillac, comme il l'explique dans un long discours préliminaire publié dans certaines éditions de ses *Elémens de Géométrie*[74].

1. *Les "Elémens de Géométrie" de Lacroix*

Les Elémens de Géométrie de Lacroix constituent le troisième volume d'un cours élémentaire de mathématiques pures à l'usage des élèves de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations[75], cours qui comprend un *Traité élémentaire d'Arithmétique*, des *Elémens d'Algèbre*, les *Elémens de Géométrie*, un *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, ainsi que des *Compléments des Elémens d'Algèbre*.

Dans le discours préliminaire qui introduit les *Elémens de Géométrie*, Lacroix exprime les principes généraux qui ont guidé l'ouvrage et qui reposent sur *le vrai ordre de la nature* et la correspondance entre cet ordre et l'ordre de la connaissance, *l'ordre des abstractions* pour utiliser le langage de Condillac. En fait, même si les logiciens de Port-Royal refusent l'empirisme[76], un empiriste comme Condillac partage avec eux le principe d'un ordre de la nature et le principe d'une correspondance entre l'ordre de la connaissance et l'ordre naturel. Ainsi Condillac écrit dans son *Essai sur l'origine des connaissances humaines*:

> *"La nature indique elle-même l'ordre qu'on doit tenir dans l'exposition de la vérité."*[77]

C'est ce souci du *"vrai ordre de la nature"* qui conduit Lacroix à reprendre, en ce qui concerne les propriétés des lignes proportionnelles, l'exposé d'Arnauld qui démontre ces propriétés en s'appuyant sur les lignes, évitant le détour euclidien par les aires, mais ce souci du vrai ordre de la nature n'exclut pas la rigueur, et la rigueur est celle d'Euclide, comme l'explique Lacroix dans son discours préliminaire, se proposant de montrer *"qu'on peut accorder l'ordre et la rigueur"*[78], l'ordre de la nature et non l'ordre artificiel de la construction euclidienne, et la rigueur euclidienne trop oubliée dans les ouvrages du XVIIIème siècle.

Nous noterons cependant l'usage de la méthode d'exhaustion dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles, même si Lacroix utilise la méthode des limites pour d'autres questions, méthode qui nous semble plus proche du point de vue d'Arnauld; mais c'est que la relation entre le géométrique et le numérique se heurte encore à la question de la définition des nombres, question qui ne sera résolue que par la construction des réels dans la seconde partie du siècle. Lacroix hésite dans son exposé entre une méthode d'exhaustion qui reste la méthode rigoureuse, même si elle apparaît comme un détour peu naturel, et une méthode des limites plus naturelle mais encore floue. Nous verrons ci-dessous comment Lacroix, à propos des incommensurables qu'il ne sait pas définir rigoureusement, évite la question dans ses *Elémens d'Algèbre* et, pour rendre rigoureux son discours géométrique, admet implicitement, comme le fait Legendre, l'existence d'une quatrième proportionnelle; par contre, pour éviter les difficultés du calcul sur les grandeurs, il exprime, via la mesure, les

---

[73]En particulier la division en Livres du cours de géométrie est restée celle de l'ouvrage de Legendre jusqu'au milieu de notre siècle.

[74]Lacroix [Lac 3], discours préliminaire (publié dans la quatrième édition); pour une étude de l'influence de Port-Royal et des empiristes sur l'enseignement de la géométrie nous renvoyons aux deux articles de Bkouche [Bk2] et [Bk3].

[75]sur l'Ecole Centrale des Quatre-Nations, cf. Taton [Tat], p....

[76]Arnauld, Nicole [AN], p. 69-72.

[77]Condillac [Cn], p. 288.

[78]Lacroix [Lac 3], discours préliminaire, p. xxii; Lacroix se réfère à l'exemple donné par Bertrand qui a publié en 1778 un ouvrage intitulé *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques*, ouvrage souvent cité à l'époque.

relations métriques comme des relations numériques. Nous verrons plus loin quelle fut son influence sur les traités de géométrie élémentaire des XIXème et XXème siècle.

2. *Les proportions*

Les *Elémens de Géométrie* s'appuient sur la connaissance préalable de l'arithmétique dont relève la théorie des proportions; notons que le *Traité d'Arithmétique* ne traite que des rapports entiers ou fractionnaires[79], de même le supplément d'arithmétique placé au début des *Elémens de Géométrie*, qui traite du calcul des proportions. Les nombres irrationnels apparaissent dans les *Elémens d'Algèbre* avec le calcul des racines carrées; Lacroix y montre que la racine carrée d'un entier n'est en général pas un entier mais ajoute:

"Cependant on sent qu'il doit exister une quantité qui, multipliée par elle-même, produise un nombre quelconque..."[80]

ce qui le conduit à distinguer deux sortes de nombres, les nombres rationnels qui sont commensurables avec l'unité et les nombres irrationnels qui sont incommensurables, avant d'exposer la méthode arithmétique de calcul approché des racines carrées.

En ce qui concerne la géométrie, il explique dans les premières pages de son ouvrage comment trouver la commune mesure de deux droites, méthode analogue à la recherche du p.g.c.d. de deux nombres, distinguant deux cas suivant que l'opération s'arrête ou non[81].

3. *Les lignes proportionnelles*

Nous ferons d'abord quelques remarques sur la théorie des parallèles; celles-ci étant définies comme des droites d'un même plan qui ne se rencontrent pas, Lacroix admet l'axiome qui dit que *"une droite perpendiculaire à une autre, est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre"*[82]; rappelons qu'un axiome est, pour Lacroix comme pour Legendre, *"une propriété évidente par elle-même"*.

Il peut alors montrer l'égalité des angles correspondants et alternes-internes en utilisant les cas d'égalité des triangles rectangles[83]:

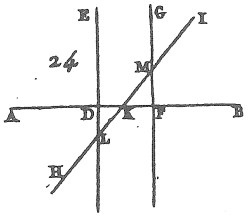

fig. 17

Soit la droite **HI** coupant les parallèles **DE** et **FG** en deux points **L** et **M** et soit **K** le milieu de **LM**, on mène de **K** la perpendiculaire aux deux parallèles données, alors les triangles rectangles **DLK** et **FMK** sont égaux, ce qui implique les égalités cherchées.

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème:

---

[79]Lacroix [Lac 1], n° 108-120.
[80]Lacroix [Lac 2], n° 99.
[81]Lacroix [Lac 3], n° 4-5.
[82]ibid, n° 39.
[83]ibid, n° 44-47.

"Les parties **AC** *et* **BD** *de deux droites parallèles interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement."*[84]

fig. 18

Il suffit de remarquer que les triangles **ABD** et **ACD** sont égaux. On en déduit que deux parallèles *"sont partout également éloignées l'une de l'autre"*[85].

Lacroix peut alors énoncer et démontrer le théorème:

"Si deux droites quelconques **AF** *et* **GM** *sont coupées par un nombre quelconque de parallèles,* **AG**, **BH**, **CI**, *etc. menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties* **GH**, **HI**, **IK**, *etc. de la seconde, seront aussi égales entre elles."*[86]

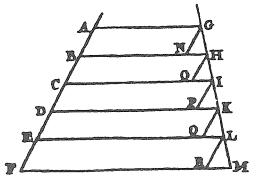

fig. 19

Il suffit de remarquer, d'abord que les droites **GN**, **HO**, **IP**, etc. sont égales, puis que les triangles **GNH**, **HOI**, **IPK**, etc. sont égaux.

On montre alors le théorème:

"Trois parallèles **AG**, **DK**, **FM**, *coupent deux droites quelconques* **AF** *et* **GM** *en parties proportionnelles."*[87]

Si **AD** (Cf. figure ci-dessous) est commensurable avec **AF**, c'est une conséquence du théorème précédent. Lorsque **AD** et **AF** sont incommensurables, Lacroix utilise la méthode d'exhaustion, admettant implicitement, comme nous l'avons déjà dit, l'existence d'une quatrième proportionnelle.

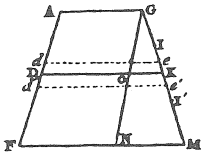

fig. 20

[84]ibid, n° 54.
[85]ibid, n° 55.
[86]ibid, n° 56.
[87]ibid, n° 58.

Soit **I** le point de la droite **GM** tel que

$$\mathbf{AF} : \mathbf{AD} :: \mathbf{GM} : \mathbf{GI}$$

on va montrer que les points **I** et **K** coïncident.

Supposons **GI** < **GK**, et divisons **AF** en parties égales suffisamment petites de sorte qu'il existe un point de division *d* tel que la parallèle menée par *d* à **AG** rencontre **GM** en un point *e* situé entre **I** et **K**, alors

$$\mathbf{AF} : \mathbf{A}d :: \mathbf{GM} : \mathbf{G}e$$

et par conséquent

$$\mathbf{A}d : \mathbf{AD} :: \mathbf{G}e : \mathbf{GI}$$

or **A***d* < **AD** et **G***e* > **GI**, ce qui est contradictoire.

De même si on suppose **GI** > **GK**, on obtient une contradiction, par conséquent **GI** = **GK**, autrement dit **I** et **K** coïncident.

Notons que ce même raisonnement d'exhaustion est employé dans la suite de l'ouvrage pour montrer la proportionnalité entre angles et arcs[88], c'est aussi, nous l'avons vu, la méthode qu'emploie Legendre dans ses *Elémens de Géométrie*.

Une fois démontré le théorème des lignes proportionnelles, Lacroix étudie la similitude et en déduit les relations métriques usuelles dans les triangles; comme chez Legendre, ces relations portent sur les mesures des grandeurs considérées. C'est ainsi que Lacroix énonce le théorème de Pythagore:

".. les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse, est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côté."[89]

En fait il montre d'abord le théorème:

"Si de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on appelle hypoténuse,

1∞. cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux.

2∞. elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou segments, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière.

3∞. La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse."[90]

Dans l'énoncé et dans la démonstration de ce théorème, Lacroix travaille sur les lignes, mais pour effectuer les calculs qui conduisent au théorème de Pythagore, il utilise les mesures, se ramenant à un calcul purement numérique; en cela il se distingue de Legendre qui, comme on l'a déjà remarqué, mêle calcul numérique et calcul spécieux.

Enfin notons que l'ouvrage de Lacroix marque l'abandon dans les traités d'enseignement de la méthode des aires.

---

[88]ibid, n° 109.
[89]ibid, n° 75.
[90]ibid, n∞ 74.

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. *Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire*

Tout au long du XIXème siècle et dans la première partie du XXème siècle[91] on retrouve plusieurs points communs dans la démonstration du théorème des lignes proportionnelles (qui deviendra le théorème de Thalès), lesquels se rattachent essentiellement au point de vue de Lacroix[92].

D'un point de vue géométrique, on abandonne définitivement la méthode des aires et on utilise essentiellement la démonstration de Lacroix, que l'on énonce le théorème pour un triangle ou pour la figure formée par deux droites coupées par des parallèles. Nous n'insisterons pas sur ce point.

En ce qui concerne les rapports de grandeurs, les auteurs s'appuient une arithmétique préalable, soit qu'ils renvoient à d'autres ouvrages, soit qu'ils explicitent cette arithmétique préalable dans leur ouvrage.

Les rapports de grandeurs sont définis via la mesure des grandeurs dont on admet qu'elle est possible (rejoignant ainsi le point de vue de Legendre (cf. ci-dessus)).

Voici par exemple la définition donnée en 1883 par Amiot dans ses *Eléments de Géométrie* (rédigés d'après les programmes de l'enseignement scientifique des lycées):

"Le rapport de deux grandeurs de même espèce est le nombre qui exprimerait la mesure de la première si on prenait la seconde pour unité."[93]

Amiot distingue alors entre rapports de grandeurs commensurables et rapport de grandeurs incommensurables;dans le premier cas, le rapport est un nombre entier ou fractionnaire, dans le second cas, *"il est impossible de mesurer la première en prenant la seconde comme unité"*.[94]

Amiot remarque alors que deux grandeurs **A** et **B** incommensurables étant données, on peut trouver une grandeur **A'** commensurable à **B** *"qui diffère de* **A** *aussi peu que l'on veut"*, et il précise: *"dans les applications numériques, on remplace* **A** *par* **A'**, *et lorsqu'on parle du rapport de* **A** *à* **B**, *il faut entendre celui de* **A'** *à* **B**[95].

L'égalité des rapports se ramène ainsi, sans que Amiot l'explicite plus, à l'égalité des rapports commensurables.

Dans un ouvrage antérieur, le *Cours de Géométrie élémentaire* (à l'usage des Lycées et Collèges et de tous les établissements d'instruction public) publié en 1859, Guilmin , après avoir énoncé le théorème:

"Toute ligne parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles"[96]

et démontré celui-ci dans le cas ou **AB** et **AD** sont commensurables,

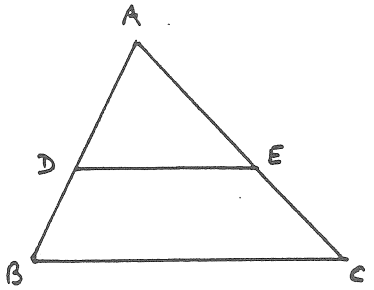

fig. 21

[91]nous ne parlerons pas dans cet article des ouvrages de la réforme de 1970 et des contre-réformes qui ont suivi.
[92]on peut noter ici une continuité depuis le point de vue développé par Arnauld et les Philosophes de Port-Royal.
[93]Amiot [Am], p.55.
[94]Ainsi la question se pose encore de savoir si un rapport incommensurable peut être représenté par un nombre.
[95]Amiot [Am], p. 56.
[96]Guilmin [Gu], p. 77.

expliquait:

"Ce raisonnement démontre le théorème pour tous les cas où il y a une commune mesure, si petite qu'elle soit, entre les segments **AD**, **DB** *du même côté de* **AB**, *ce théorème est donc vrai en général."*[97]

On rencontre de telles explications encore au XXème siècle. Ainsi dans les *Eléments de Géométrie* de Vacquant et Macé de Lépinay (à l'usage des classes de sciences des lycées), les auteurs écrivent, après avoir donné une démonstration de l'égalité des rapports des arcs et des angles qui les sous-tendent en utilisant des approximations rationnelles des rapports incommensurables,

"Pour le commençant, il convient de terminer comme il suit la démonstration (donnée dans le cas commensurable): le théorème étant vrai quelque soit la commune mesure entre les arcs, il est encore vrai quand les arcs sont incommensurables."[98]

La démonstration donnée par Vacquant et Macé de Lépinay met l'accent sur les problèmes de l'incommensurabilité d'une façon qui, si elle reste insuffisante du point de vue canonique (les nombres réels ne sont pas définis), met en valeur les points essentiels du problème; nous indiquons ici les grandes lignes de la démonstration[99].

"Si, des sommets de deux angles comme centre, on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles est égal au rapport des arcs compris entre les côtés de chacun des deux angles."

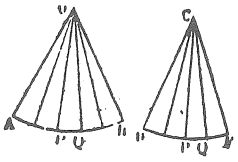

fig. 22

Les auteurs démontrent d'abord le théorème dans le cas ou les arcs **AB** et **DE** ont une commune mesure; c'est alors un simple exercice de comptage.

Dans le cas où les arcs **AB** et **DE** sont incommensurables, on partage **DE** en un certain nombre de parties égales, soit n; supposons que **AB** soit supérieur à m de ces parties mais inférieur à $m+1$ d'entre elles, les auteurs raisonnent de la façon suivante:

"Les nombres m/n et $(m + 1)/n$ sont les valeurs approchées par défaut et par excès, à moins de $1/n$, du rapport des arcs **AB** *et* **DE**. *Or si nous menons les rayons par les points de division des arcs* **AB** *et* **DE**, *l'angle* **DCE** *se trouve partagé en n parties égales, et l'angle* **AOB** *est supérieur à m de ces parties et inférieur à $m + 1$. Les nombres m/n et $(m + 1)/n$ sont donc aussi les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $1/n$, du rapport des angles* **AOB** *et* **DCE**. *Les valeurs approchées à moins de $1/n$ des deux rapports étant égales, quelque soit n, les rapports sont égaux."*

L'argument renvoie à une propriété énoncée au début de l'ouvrage à propos de la mesure des grandeurs.

---

[97]Guilmin [Gu], p. 78.

[98]Vacquant et Macé de Lépinay [VM], p. 81, note 1.

[99]ibid. p. 80-81; en ce qui concerne le théorème de Thalès (ainsi appelé dans l'ouvrage), les auteurs renvoient à cette démonstration, cf. p. 134.

Vacquant et Macé de Lépinay y appelle *"rapport de deux grandeurs de même espèce, rangée dans un certain ordre, le nombre qui est la **mesure** de la première quand on prend la seconde pour unité"*[100].

La mesure est définie soit par un nombre entier ou fractionnaire lorsque les grandeurs sont commensurables, soit comme limite de valeurs approchées lorsqu'on compare la première grandeur à une grandeur commensurable à la seconde (la valeur approchée par défaut à moins de $1/n$ près du rapport de **A** à **B** est le nombre m/n tel que **A** contienne m fois la n-ième partie de **B** mais soit contenu dans $m + 1$ fois cette partie). Cette limite (dont l'existence est admise) est appelée un *"nombre incommensurable"*.

Vacquant et Macé de Lépinay expliquent alors que, quatre grandeurs de même espèce étant données, le rapport de **A** à **B** et le rapport de **C** à **D** sont égaux si ces rapports ont même valeur approchée à moins de $1/n$ près pour toute valeur de n. On peut y voir une forme plus élaborée de la définition d'Arnauld.

On trouve ici la trace de la construction des réels élaborée dans la seconde partie du XIXème siècle et la mise en place d'une théorie de la mesure s'appuyant sur cette construction, même si les auteurs, s'adressant à des élèves de lycées s'en tiennent à un niveau intuitif. En fait, il s'agit moins de donner une construction rigoureuse que d'indiquer les grandes lignes de ce que serait cette construction en précisant la notion d'approximation, celle-ci restant liée à l'opération même de mesure, et l'existence du nombre défini par l'opération de mesure étant admise[101].

On voit ici, par rapport aux ouvrages du siècle précédent, un effort de rigueur dans la définition des rapports incommensurables; en particulier, la mesure n'est plus un simple donné auquel on renvoie comme le fait Legendre, elle est au coeur de la construction et l'arithmétique préalable s'inscrit dans le géométrique[102]. On peut comprendre alors que les auteurs demandent, dans une première lecture, de passer outre et d'admettre le pseudo-raisonnement qu'ils proposent au commençant.

2- *Constructions des nombres réels et mesure des grandeurs*

Nous avons déjà cité dans le paragraphe précédent des ouvrages s'appuyant, implicitement ou explicitement, sur la notion des nombres réels telle qu'elle s'est élaborée dans la seconde moitié du XIXème siècle. C'est l'aspect géométrique (ou plus généralement l'aspect mesure des grandeurs) qui est mis en valeur. Mais la notion de grandeur n'est pas absente de la construction des réels même si cette construction se réduit à des considérations purement arithmétiques (ce que l'on a appelé *l'arithmétisation de l'analyse*), l'arithmétique jouant ici le rôle d'un principe unificateur des mathématiques avant que ce rôle ne soit dévolu à la théorie des ensembles.

Le lien entre arithmétique et géométrie est souligné par Dedekind dans son cours d'analyse lorsqu'il développe la construction des nombres réels par les coupures[103].

Même si la problématique de Dedekind relève de l'analyse (comment fonder le calcul différentiel[104]), c'est la géométrie qui va guider la construction (la *création* dit Dedekind) des nombres réels; c'est pour établir une correspondance biunivoque entre les nombres et les points de la droite et assurer ainsi la continuité des nombres que Dedekind fabrique les nombres réels; en retour, la construction *arithmétique* des nombres réels, indépendamment de tout recours à la géométrie, permet de préciser ce qu'on entend par continuité de la droite[105].

---

[100]ibid. p. 5-7.

[101]On trouve une démonstration analogue (toujours à propos de la mesure des arcs et des angles dans le Cours de Géométrie de Neveu et Bellanger à l'usage des Ecoles Primaire Supérieure [NB] (1ère année, p. 152-156). La démonstration du théorème de Thalès (2ème année, p. 17) renvoie à cette démonstration.

[102]Il faut toutefois noter que les nombres ont ici une existence propre indépendante de la géométrie.

[103]Ce cours eut lieu en 1862-1863 mais ne sera publié qu'en 1872. Il constitue la première partie de l'édition anglaise: *Essay on the theory of numbers* [Ded]. Pour une étude de cet ouvrage, nous renvoyons a l'ouvrage de Pierre Dugac [Dug].

[104]Dedekind [Ded], p. 1.

[105]Comme l'explique Dedekind, la continuité de la droite *"n'est d'autre qu'un axiome"* (ibid, p. 12), l'existence de l'espace n'impliquant pas la nécessité qu'il soit continu. Une fois les nombres réels construits, c'est un axiome géométrique qui précisera la correspondance biunivoque entre les nombres réels et les points de la droite, ce que

En ce sens, c'est la construction du continu arithmétique qui permet de redéfinir le continu géométrique.

Ce n'est pas ici le lieu de raconter l'histoire des nombres réels, celle-ci ne nous intéresse que par ses relations avec la mesure des grandeurs. Une construction purement arithmétique du numérique permet une nouvelle définition de la mesure des grandeurs, définition qui, nous le verrons, est plus proche de la pratique de la mesure (associer un nombre à une grandeur) que la construction d'Eudoxe, tout en apportant du point de vue de la rigueur le fondement qui manquait aux méthodes d'approximations développées aux XVIIème et XVIIIème siècles[106].

C'est une telle construction de la mesure des grandeurs que développe Jules Tannery dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, ouvrage qui s'inscrit dans une collection à l'usage de la classe de Mathématiques[107], collection qui comprend entre autres les *Leçons de Géométrie* de Hadamard.

Les trois derniers chapitres qui *"s'adressent aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques"*[108] exposent la construction des nombres réels (chapitre XII), la théorie de la mesure des grandeurs (Chapitre XIII) et une introduction à la théorie des nombres (chapitre XIV).

Après avoir construit les nombres réels par la méthode des coupures de Dedekind, Tannery définit la mesure des grandeurs comme correspondance entre grandeurs et nombres.Les nombres ayant été construits de façon autonome (c'est-à-dire indépendamment de toutes considérations de grandeurs), Tannery se propose de mettre en forme la définition classique

"On appelle grandeur ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution."[109]

Tannery élimine d'abord de son étude les grandeurs discrètes (dont la mesure ne relève que du comptage) et s'intéresse aux grandeurs satisfaisant la propriété suivante:

"Si l'on compare deux états **A**, **A'** *quelconques, mais distincts, il y a au moins un état intermédiaire* **A''**. *"* [110]

autrement dit, si **A** < **A'**, il existe **A''** tel que **A** < **A''** < **A'** ; Tannery remarque alors qu'il y a une infinité d'états intermédiaires.

Il peut alors établir la correspondance suivante:

"Etant donné deux états **A**, **A'** *de la grandeur* (**G**) *et supposons qu'on ait* **A** < **A'** (...) *imaginons qu'on fasse correspondre aux états* **A** et **A'** *deux nombres entiers,* 10 *et* 20 *par exemple, en ayant soin de faire correspondre le plus petit entier* 10 *à la plus petite des grandeurs* **A**, **A'**.

Aux différents nombres entre 10 *et* 20, *nous allons faire correspondre des états intermédiaires à* **A** *et* **A'** *en observant la condition suivante que j'appellerai la condition fondamentale, si aux nombres distincts b, c, on fait correspondre les états distincts* **B**, **C**, *on aura* **B** < **C** *ou* **B** > **C** *suivant que b < c ou b > c. A des nombres égaux, on fera correspondre les mêmes états de grandeur.*

Aux nombres entiers compris entre 10 *et* 20 *faisons correspondre, d'après une loi déterminée mais d'ailleurs arbitraire, des états intermédiaires à* **A** *et* **A'**, *en observant la graduation précédente.*

On a ainsi établi une certaine échelle des graduations entre **A** *et* **A'**."[111]

---

l'on a appelé *l'axiome de Cantor-Dedekind* (voir par exemple: Valiron [Va], p. 3 et l'article de Enriques dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [Enr], p. 34-36).

[106]Bourbaki [Bou], p. 184-185.

[107]Il s'agit de la classe terminale appelée plus tard classe de *mathématiques élémentaires* devenue après la réforme Fouchet de 1965, la TC (terminale C).

[108]Tannery [TanJ], préface de la première édition (1894), p.vi de l'édition citée. On peut voir, à la lecture de ces ouvrages, que ceux-ci ne se réduisent pas à de simple manuels.

[109]Tannery [TanJ], p. 470.

[110]ibid, p. 471.

[111]ibid, p. 471-472.

On peut alors affiner l'échelle en ajoutant des nombres fractionnaires entre 10 et 20, cet affinement pouvant être mené aussi loin qu'on le veut; on peut ainsi associer à tout nombre rationnel (ici compris entre 10 et 20) un état de la grandeur considérée (**G**).

Tannery remarque alors qu'un état **B** de la grandeur (**G**) est alors soit numéroté par un rationnel, soit n'est pas numéroté. Dans ce dernier cas, il est clair que **B** détermine une coupure donc un nombre irrationnel; à tout état **B** de la grandeur (**G**) intermédiaire à **A** et **A'**, on associe ainsi un nombre réel compris entre 10 et 20. On peut dire que la grandeur (**G**) est *continue* si à tout nombre réel b compris entre 10 et 20 correspond un état **B** de la grandeur (**G**).

La construction se précise lorsque la grandeur (**G**) est additive, c'est-à-dire si l'on sait associer à deux états **A** et **B** de la grandeur (**G**) une grandeur **A + B**, l'opération d'addition satisfaisant aux propriétés suivantes[112]:

i) si **A** et **A'** sont égales, si **B** et **B'** sont égales, alors **A + B** et **A' + B'** sont égales.
ii) l'addition est commutative et associative.
iii) il existe une grandeur nulle, c'est à dire telle que l'addition de cette grandeur à une grandeur donnée ne change pas cette dernière.
iv) si **C** n'est pas la grandeur nulle, alors **A + C > A**.
v) si **A > B**, il existe une grandeur **C** telle que **A = B + C**.
vi) **A** et **B** étant données toutes deux non nulles, il existe un entier m tel que m**A > B** (axiome d'Archimède).
vii) étant donné un entier m, pour toute grandeur **B**, il existe une grandeur **A** telle que **B** = m**A**, autrement dit on peut diviser une grandeur en m parties égales.

Ce sont les propriétés nécessaires pour construire un correspondance additive entre états d'une grandeur et nombres. Tannery montre ensuite quelques propriétés qu'on pourrait énoncer ainsi:

$$m\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$$
$$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$$
$$(mn)\mathbf{A} = m(n\mathbf{A})$$

m et n étant des entiers.

Tannery peut alors définir la mesure d'une grandeur, une unité $\mathbf{A_1}$ étant choisie.

Un état de la grandeur $\mathbf{A_1}$ ayant été choisi comme état unité, on peut définir une graduation de (**G**) associant à tout nombre rationnel p/q la grandeur $\mathbf{A} = p/q\ \mathbf{A_1}$; p/q est appelé la mesure de **A** lorsqu'on a choisi $\mathbf{A_1}$ comme unité, c'est aussi par définition le rapport de **A** à $\mathbf{A_1}$.

Un état **B** de la grandeur (**G**), s'il n'est pas une fraction de $\mathbf{A_1}$ définit de façon évidente une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, donc un nombre réel (nécessairement positif dans le cas qui nous intéresse ici); ce nombre réel a est appelé la mesure de **B** lorsqu'on a choisi $\mathbf{A_1}$ comme unité, c'est aussi le rapport de **B** à $\mathbf{A_1}$.

Ainsi la classique définition du rapport de deux grandeurs comme le nombre qui mesure la première quand on a choisi la seconde comme unité prend tout son sens.

Tannery montre que la mesure ainsi définie est additive, cela est évident pour les nombres rationnels et résulte de la définition de l'addition des nombres réels dans le cas général.

L'étude des changements d'unité montre que le rapport de deux grandeurs est égal, une unité ayant été choisie, au rapport de leurs mesures. La démonstration, facile, est laissée au plaisir du lecteur.

---

[112]ibid, p. 477; noter que Tannery ne considère que des grandeurs positives ou, comme on dit aussi, des *grandeurs arithmétiques*. Les propriétés iv et v expriment alors le lien entre l'ordre et le calcul: "**A > B** *si et seulement si il existe* **C** *tel que* **A = B + C**" (pour une étude historique et épistémologique de ce lien, cf. Sinaceur [Si]).

Enfin une grandeur est *continue* si, une unité ayant été choisie, tout réel (ici il s'agit de réels positifs) est la mesure d'un état; cette propriété est évidemment indépendante de l'unité choisie[113].

3- *Les grandeurs proportionnelles.*[114]

La proportionnalité concerne les grandeurs additives. Nous en rappelons la définition

Etant données deux espèces de grandeurs additives (G) *et* (G'), *une correspondance entre* (G) *et* (G') *est dite proportionnelle si, étant donnés deux états* **A** *et* **B** *de la première grandeur et les états correspondants* **A'** *et* **B'** *de la deuxième grandeur, les rapports* **A/B** *et* **A'/B'** *sont égaux.*

Tannery établit alors la propriété que l'on peut énoncer de la façon suivante:

Considérons une correspondance entre deux espèces de grandeurs (G) *et* (G') *telle que*
i) à deux grandeurs égales de l'espèce (G) *correspondent deux grandeurs égales de l'espèce* (G')
ii) la correspondance est additive, c'est-à-dire qu'à la somme de deux grandeurs de l'espèce (G) *correspond la somme des grandeurs correspondantes de l'espèce* (G')
alors la correspondance considérée est proportionnelle.[115]

Tannery montre d'abord qu'à la grandeur nulle de (G) correspond la grandeur nulle de (G'); en effet la grandeur nulle est la seule qui, ajoutée à une autre grandeur, donne la même grandeur.

En outre, la définition de la soustraction implique que la correspondance conserve l'ordre[116].

En effet, soit **A** et **B** deux états de la grandeur (G) tels que **A** soit inférieur à **B**, on notera **A'** et **B'** les états de (G') correspondant à **A** et **B**; puisque **A** < **B**, il existe un état **C** tel que **B** = **A** + **C**. Notons **C'** l'état correspondant à **C**, alors **B'** = **A'** + **C'**, ce qui prouve **A'** < **B'**.

Considérons alors deux grandeurs **A** et **B** d'espèce (G) et les grandeurs correspondantes **A'** et **B'** d'espèce (G'),

i) si **B/A** est un nombre rationnel, l'additivité implique l'égalité des rapports **A/B** et **A'/B'**.

ii) si **B/A** est un nombre irrationnel, la conservation de l'ordre implique que **B/A** et **B'/A'** déterminent la même coupure, par conséquent **B/A** = **B'/A'**.

ce qui achève la démonstration.[117].

Le critère de proportionnalité énoncé par Tannery permet d'obtenir les théorèmes de proportionnalité de la géométrie élémentaire: proportionnalité des angles et des arcs, théorème des lignes proportionnelles (théorème de Thalès), calculs d'aires. C'est ainsi que dans ses *Leçons de Géométrie*, Hadamard renvoie au critère de Tannery[118] même si, pour

---

[113]cf. note 105 ci-dessus. On peut rapprocher cette définition des grandeurs continues du dernier groupe d'axiomes de la construction hilbertienne, lequel exprime la propriété de *continuité* de la géométrie (Hilbert [Hi], p. 40-45) ; ce groupe contient deux axiomes, l'axiome de la mesure ou d'Archimède et l'axiome d'intégrité, ce dernier axiome assure l'existence d'une correspondance biunivoque conservant l'ordre entre l'ensemble des points d'une droite et l'ensemble des nombres réels (Hilbert [Hi], p. 88-89); en un certain sens, cet axiome définit une construction géométrique des nombres réels. Notons que l'axiome d'intégrité est lié à la propriété que **R** est *le plus grand* corps ordonné archimédien (Hilbert [Hi], p. 40-45).

[114]ibid, p. 483 et sqq.

[115]On peut rapprocher la proposition de Tannery du classique théorème: *Soit f une application monotone et additive de* **R** *dans* **R**, *alors f est une application linéaire*. Ce dernier énoncé fait apparaître le lien entre proportionnalité et linéarité, nous y reviendrons ci-dessous.

[116]Rappelons que l'on ne considère que des grandeurs positives .

[117]En fait, Tannery ne parle pas en terme de coupures mais renvoie à la notion de graduation telle qu'il l'a définie auparavant.

[118]Rappelons que les ouvrages de Hadamard et de Tannery font partie d'une même collection à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques (cf. note 107 ci-dessus).

des raisons de cohérence interne de l'ouvrage, il indique le principe de la démonstration, remarquant qu'il ne fait que reproduire la démarche de Tannery[119].

BIBLIOGRAPHIE

Amiot A. [Am], *Eléments de Géométrie*, Delagrave, Paris 1883

Archimède [Arc], "La mesure du cercle", in *Oeuvres* (texte établi et traduit par Charles Mugler) Les Belles Lettres, Paris 1970; tome I, p. 135-143

Arnauld Antoine [Arn1], *Nouveaux Elémens de Géométrie* , Paris 1667

Arnauld Antoine [Arn2], *Nouveaux Elémens de Géométrie* (3ème édition), La Haye 1693, publiée in *Oeuvres Complètes*, Paris 1771

Arnauld Antoine, Nicole Pierre [AN], *La Logique de Port-Royal* (première édition 1667), Flammarion, Paris 1970

Barbin Evelyne [Ba], "La démonstration mathématique, signification épistémologique et questions didactiques", *Bulletin APMEP* n°366, décembre 1988

Bkouche Rudolf [Bk1], "De la géométrie et des transformations", *Repères-IREM* n° 4, 1991

Bkouche Rudolf [Bk2], "Variations autour de la réforme de 1902/1905", in Hélène Gispert Hélène et als : *La France Mathématique* Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France 1991.

Bkouche Rudolf [Bk3], "Sur quelques grands traités de géométrie élémentaire", (à paraître)

Blay Michel, "Du Système de l'Infini au Statut des Nombres incommensurables dans les Eléments de la Géométrie de Fontenelle" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Springer-Verlag France, Paris 1992; Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992 (à paraître)

Bossut [Bos], *Traité élémentaire de Géométrie*, Paris 1775

Bourbaki Nicolas [Bou], *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris 1974

Bourlet Carlo [Bourl], *Cours abrégé de Géométrie*, Hachette, Paris 1905

Caveing Emile [Ca], *La constitution du type mathématique de l'idéalité*, Publications de l'Université de Lille, 1982

Chevalier Anne [Ch1], Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie, Brest 1992 (à paraître)

Chevalier Anne [Ch2], "Rapports de grandeurs et proportions dans les «Nouveaux Eléments de Géométrie» d'Antoine Arnauld" (à paraître)

Clairaut Alexis-Claude[Cl], *Elémens de Géométrie* (1743), Gauthier-Villars, Paris 1922

Combette [Com], *Cours de géométrie élémentaire*, Felix Alcan, Paris 1882

Condillac [Con], *Essai sur l'origine des connaissances humaines* (1746), Editions Galilée, Paris 1973

Cousquer Eliane [Cou1], "Le calcul vectoriel" in *La rigueur et le calcul*, CEDIC, Paris 1982

Cousquer Eliane [Cou2], *Histoire du concept de nombre*, IREM de Lille 1992

D'Alembert Jean Le Rond [Da], *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986

Dedekind Richard [Ded], *Essay on the theory of numbers* (translated by W.W. Beman), Dover, New York 1963

Descartes René [Des]: "La Géométrie", in *Le Discours de la Méthode*, Fayard, Paris 1986, livre premier, p. 333

Dhombres Jean [Dh], *Nombres, mesure et continu: épistémologie et histoire*, Cedic-Nathan, Paris 1978

Dugac [Dug], *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques* (préface de Jean Dieudonné), Vrin, Paris 1976

[119]Hadamard [Ha], p. 19-20, 198-199, 239.

Dumont Jean-Paul et als [Dum], *Les Ecoles Présocratiques*, Gallimard, Paris 1991
Encyclopédie Méthodique [Enc]: "Mathématiques", Panckoucke, Paris 1784, réédition ACL Editions, Paris 1987
Enriques Federigo [Enr], "Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées* (édition française), Tome III, Article 1, Gauthier-Villars, Paris et Teubner, Leipzig, 1911; réédition Jacques Gabay, Paris 1991
Fontenelle Bernard de [Fo], *La Géométrie de l'Infini*, Paris 1727
Gonseth Ferdinand [Go], *Philosophie néo-scolastique et philosophie ouverte*, L'Age d'Homme, Lausanne 1973
Groupe Inter-IREM Epistémologie [GIIE], *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris 1987
Gulmin A. [Gu], *Cours de Géométrie élémentaire*, Durand, Paris 1859
Hadamard Jacques [Ha], *Leçons de Géométrie élémentaire*, Armand Colin, Paris 1898/1947, réédition de la dernière édition Jacques Gabay, Paris 1989
Heath Thomas L. [He1], *The thirteen books of Elements of Euclid* (translation, introduction and commentaries) (1908/1925), Dover Publications, New-York 1956
Heath Thomas L. [He2], *A History of Greek Mathematics* (1921), Dover Publications, New-York 1981
Hilbert David [Hi], *Les Fondements de la Géométrie*(1899) (édition critique avec introduction et compléments préparés par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971
Klein Felix [Kl], *Le Programme d'Erlangen*, (1972) (traduction française Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974
Knorr Wilbur Richard [Kn], *The Evolution of Euclidean Elements*, Reidel Publisching Company, Dodrecht, Boston 1975
Lacroix Sylvestre [Lac 1], *Traité élémentaire d'Arithmétique*
Lacroix Sylvestre [Lac 2], *Elémens d'Algèbre*
Lacroix Sylvestre [Lac 3], *Elémens de Géométrie*, quatrième édition, Paris 1804
Lamy [Lam], *Les Elémens de Géométrie*
Legendre Adrien-Marie [Le], *Elémens de Géométrie* (douzième édition), Firmin-Didot, Paris 1823
Le Goff Jean-Pierre [LeG], "De la méthode d'exhaustion, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)" in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Colloque Inter-IREM Epistémologie (Besançon 1989), IREM de Besançon-IREM de Lyon 1990
Legendre [Le], *Elémens de Géométrie* (douzième édition), Paris 1823
Neveu H. et Bellanger H., *Cours de Géométrie* (8ème édition), Masson, Paris 1925
Gauthier-Villars, Paris 1898
Pascal Blaise [Pa], "De l'esprit géométrique et de l'art de persuader", in *Oeuvres complètes* (édité par Lafuma), Le Seuil, Paris 1963
Peyrard [Pe], *Les Oeuvres d'Euclide*, 2 volumes (1819), Blanchard, Paris 1966
Sinaceur Hourya [Si], "La Construction Algébrique du Continu: Calcul, Ordre, Continuité" in *Le Labyrinthe du continu*, édité par Jean-Michel Salanskis et Hourya Sinaceur, Sprincer-Verlag France, Paris 1992
Soussan M'hammed [Sou], *Le traitement des proportions entre Eudoxe et Euclide (la théorie alternative de Knorr)*, mémoire de DEA, Université Charles de Gaulle, Villeneuve d'Ascq 1993 (à paraître)
Tannery Jules [TanJ], *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* (7ème édition), Armand Colin, Paris 1917
Tannery Paul [TanP], *La Géométrie Grecque*, Gauthier-Villars, Paris 1887; réédition Jacques Gabay, Paris 1988
Taton René et als [Tat], *L'enseignement scientifique en France au XVIIIème siècle*, Hermann, Paris 1986
Vacquant et Macé de Lépinay [VM], *Eléments de Géométrie*, (21ème édition), Masson, Paris 1917
Valiron Georges [Va], *Théorie des fonctions*, Masson, Paris 1946
Viète [Vi], *Introduction en l'Art Analytique*, in Vaulézard, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète* (1630), Fayard, Paris 1986
Wallis John, *Arithmetica Infinitorum*, 1655.