Une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques

L. Grugnetti*

Travail interdisciplinaire fondé sur l'histoire des mathématiques et qui représente un exemple du rapport dynamique entre programmes et choix des maîtres. Ce travail concerne des aspects des mathématiques médiévales et leur "entrelacement" avec certains itinéraires didactiques.

1. La situation scolaire en Italie

-L'organisation scolaire

ECOLE	AGE DES ELEVES	OBLIGATION
maternelle	3-5	non
primaire	6-10	oui
moyenne (collège)	11-13/14	oui
supérieure	14-18/19	non

-Les programmes (les réformes)

Il y a quelques années, d'importantes réformes de l'enseignement ont été introduites en Italie.
En 1979, la réforme pour l'école moyenne est entrée en vigueur, tandis que c'est en 1985 qu'a débuté la réforme pour l'école primaire. Depuis 1986 une réforme partielle pour l'école secondaire supérieure est en cours.
Les programmes de mathématiques pour l'école moyenne ont représenté un moment fondamental pour l'enseignement des mathématiques en Italie, à savoir la ratification d'un renouvellement méthodologique qui était dans l'air depuis longtemps.
On peut dire que les réformes nous offrent une chance d'enseigner d'une façon renouvelée et dynamique. Le noeud de la question est maintenant celui qui concerne un recyclage adéquat des maîtres.

-Indication des contenus et suggestions méthodologiques

Dans la désignation des contenus des différents programmes et les suggestions méthodologiques s'y rapportant, on trouve plusieurs éléments essentiels tels que:

- -l'indication des temps à bref et moyen termes dans lesquels les contenus pourront être concrétisés;
- -la suggestion de méthodologies appropriées;
- -l'ouverture vers de nouvelles formes de collaboration didactique entre les différentes disciplines, ce qui donne donc un caractère concret au besoin d'interdisciplinarité.

* Département de Mathématiques, Cagliari.

2. Des programmes au travail en classe

Dans les programmes de l'école moyenne on trouve, entre autre, la phrase suivante:

> <<On suggère de diriger l'élève vers une première réflexion sur la dimension historique de la science...>>

Comment faire?

> << Pour un esprit scientifique toute connaissance
> est une réponse à une question.
> S'il n'y a pas eu de question,
> il ne peut y avoir connaissance scientifique.
> Rien ne va de soi
> Rien n'est donné.
> Tout est construit>>
> (Bachelard "La formation de la pensée scientifique)

On est certainement tous d'accord que l'élève doit non seulement être capable de redire ou de refaire, mais aussi de réinvestir dans des situations nouvelles (pour lui), d'adapter, de transférer ses connaissances pour **résoudre des problèmes nouveaux** (pour lui). Tout ceci nous a amené à considérer **l'importance des problèmes**:

* dans l'histoire
* dans le domaine de la didactique.

2.1 Le problème dans l'histoire

Si on refait, même à grands traits, l'histoire des mathématiques à partir des Babyloniens et des anciens Egyptiens, l'importance attribuée au problème comme chemin préférentiel pour la transmissiondu savoir apparait absolument clairement.

Les mathématiques ont été construites en réponse à des **questions** qui se sont traduites en autant de problèmes.
L'activité de résolution de problèmes a été au coeur même de l'élaboration de la science mathématique (Charnay, 1988).

Par le parcours suivant:

les problèmes (dans l'histoire)
↓
les stratégies (utilisées à differentes époques)
↓
les raisons de ces stratégies
↓
le <u>contexte</u> culturel, socio-économique...

on peut essayer de donner du **sens** au travail historique.

Le sens d'une connaissance mathématique se définit:

* **non seulement** par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique;

* **non seulement** par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution,
* **mais aussi** par l'ensemble des conceptions qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, des **économies** qu'elle procure, des formulations qu'elle reprend, etc... (G. Brousseau)

2.2 L'experiénce dans les classes

C'est dans cet esprit qu'on a développé un travail interdisciplinaire selon le projet suivant:

Discipline: histoire

↓

Moyen-âge en Europe et Islam:
l'importance de Leonardo Pisano: le Liber Abbaci

↓

la recherche en bibliothèque
(du Liber Abbaci)

↙ ↘

les élèves (12 ans)
d'une classe du collège

\+

les professeurs de:
langue maternelle,
mathématique,
éducation technique
(la problématique historique
de l'imprimerie)

↓

le problème du langage du Liber Abbaci:
on doit comprendre une autre langue pour comprendre les problèmes de Leonardo Pisano

↓

* une motivation pour analyser une langue qui a précédé la langue italienne

"Une langue étrangère n'est pas nécessairement un <u>obstacle</u> pour les élèves qui se prennent au jeu et ont plaisir à montrer leurs compétence en anglais, voire en latin" (Grégoire, Hallez, 1988)

↓

* l'analyse des stratégies des élèves

↓

* l'analyse des stratégies de Leonardo Pisano

↓

* la création par les élèves d'un problème avec une structure similaire à la structure d'un problème de Leonardo Pisano

Ce projet entre dans un parcours interdisciplinaire plus ample:

MATHEMATIQUE	HISTOIRE ET GEOGRAPHIE	EDUCATION TECHNIQUE
LES SYSTEMES DE NUMERATION: * BABYLONIEN * EGYPTIEN * ROMAIN ... NOMBRES FIGURES	L'EGYPTE LA MESOPOTAMIE L'IMPORTANCE DES FLEUVE ROME LA GRECE AVANT EUCLIDE	LA BALANCE INSTRUMENTS ASTRONOMIQUES LES CLEPSYDRES
LA NUMERATION DECIMALE DE POSITION	LES ARABES	L'ASTROLABE LES MOULINS LES HORLOGES
LA NAISSANCE DE L'ALGEBRE	LE MOYEN-AGE	L'IMPRIMERIE
STATISTIQUE ET PROBABILITE L'ORDINATEUR CHARLES BABBAGE	LA REVOLUTION INDUSRIELLE L'ANGLETERRE	L'INDUSTRIE TEXTILE LE JACQUARD (1801)

3. Pourquoi Leonardo Pisano?

Leonardo Pisano (Pise ~ 1170-id.1240), dit **Fibonacci** est le premier mathématicien de talent de l'Occident chrétien.
Il fut marqué par un séjour à Bougie (Algérie) et des voyages en Egypte, Syrie, Grèce et Sicile.
A son retour en Italie, il publie son Liber Abaci dont la première version date de 1202.
Il reprit les méthodes euclidiennes et progressa en arithmétique ainsi que dans les méthodes de calcul.
Bien délicat est le tri entre ce qui incombe à son talent et ce qui revient aux influences qu'il a reçues (G. Beaujouan, 1985).

La problématique concernant l'influence de la culture arabe sur l'Europe est trop souvent "oubliée" même dans le developpement de la discipline histoire.
George Ghevarughese Joseph dans son travail "Foundations of eurocentrism in mathematics" considère de façon critique les trois figures suivantes:

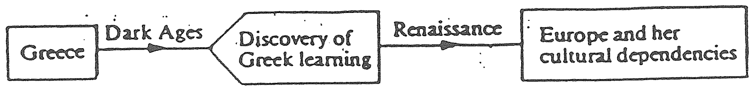


Figure 1: *The 'classical' Eurocentric approach*

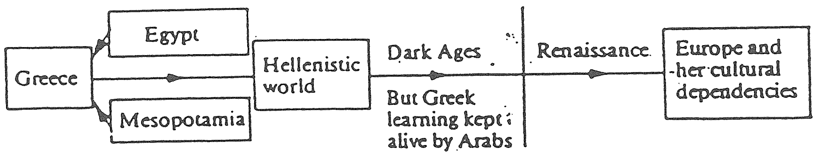


Figure 2: *The 'modified' Eurocentric trajectory*

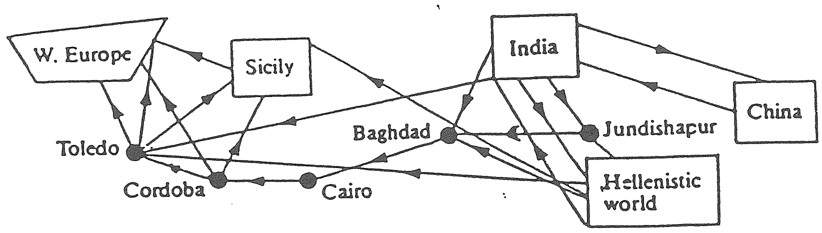


Figure 3: *An alternative trajectory (from 8th to 15th century)*

C'est, en effet, après avoir fait tout le tour de la Méditerranée, que la science grecque arrive enfin en Occident. Elle y parvient, du reste, largement fécondée par des apports iraniens, indiens et arabes.
Le Liber Abaci de Leonardo Pisano va initier les savants italiens du XIIIe siècle à la science mathématique des Arabes et des Grecs. Cette oeuvre s'ouvre sur les neuf symboles indiens de numération ainsi que sur le signe zéro. Il y traite de tous les problèmes d'applications financières et commerciales, de la résolution d'équations du second degré, d'équations indéterminées, des calculs à effectuer avec des radicaux, etc.
Leonardo Pisano présente, pour les innombrables problèmes du Liber Abaci, plus d'un procédé de résolution. On retrouve souvent écrit:
<<**Est enim alius modus in solvendo similes questiones**>>
Dans la Liber Abaci il y a aussi un autre aspect fondamental qui concerne la résolution d'un problème, c'est-à-dire la possibilité que parfois, pour certaines valeurs des données ou à cause de conditions spéciales, le problème ne soit pas résoluble. Fibonacci parle de <<**Questio insolubilis**>>.

4. Comment on a utilisé le Liber Abaci dans les classes

1) Un problème à traduire:

In quodam plano sunt due turres, quarum una est alta passibus 30, altera 40, et distant in solo passibus 50; infra quas est fons, ad cuius centrum uolitant due aues pari uolatu, descendentes pariter ex altitudine ipsarum; queritur distantia centri ab utraque turri

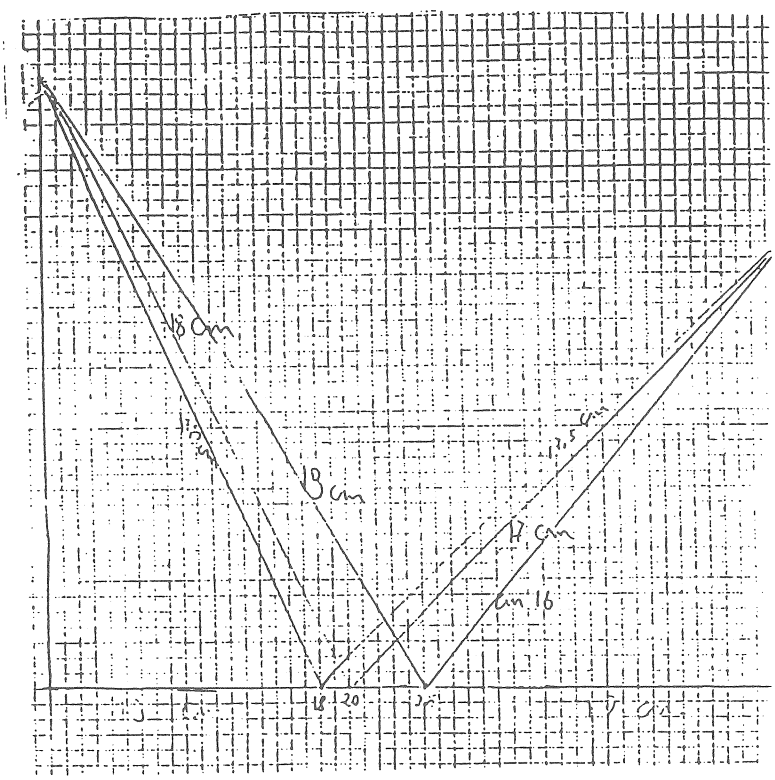
2) Le probleme à resoudre:

<<Deux tours, l'une haute de 40 pas et l'autre de 30 pas, se trouvent à une distance de 50 pas.
Entre les deux tours se trouve une fontaine vers laquelle deux oiseaux, en descendant de chaque tour, se dirigent avec la même vitesse et y arrivent en meme temps.
Quelle est la distance de la fontaine à chaque tour?>>

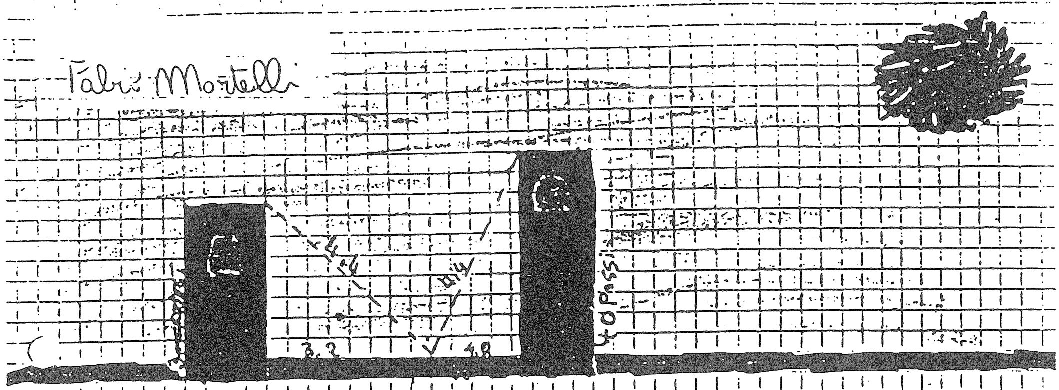
3) Les stratégies des élèves et leurs explications:

* Les élèves de 14/15 ans, qui connaissent le théorème de Pythagore, l'ont utilisé;

* Les élèves de 12/13 ans ont suivi les stratégies suivantes:
  -stratégies graphiques (par tâtonnements):



Fabri Mortelli



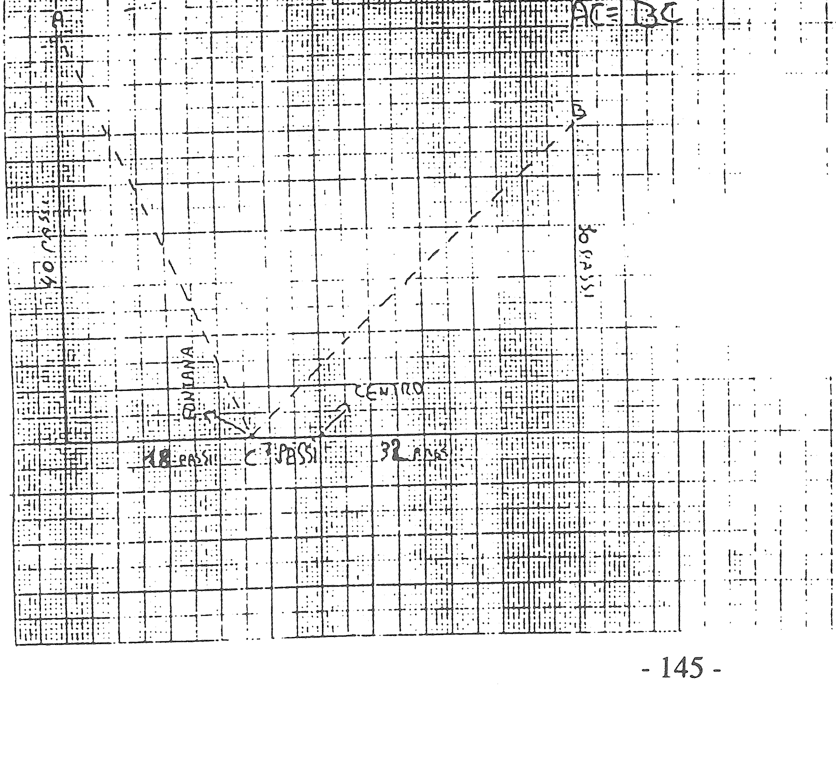
3,2 x 10 = 32 passi

1,8 x 10 = 18 passi

Ho calcolato la stessa di lunghezza che parte dall'estremità delle due torri, fino a quando toccano la base in lunghezza uguale. Poi ho calcolato le distanze che c'è tra le torri e il punto d'incontro, e ho trovato le distanze.

Parà Alfonso 2G

In un piano ci sono 2 torri delle quali una è alta 30 passi, l'altra 40 passi, e distano nel suolo 50 passi. Fra queste c'è una fontana verso il cui centro volano due uccelli alla stessa velocità che discendono insieme dall'altezza delle stesse. Si chiede la distanza del centro da ciascuna torre.

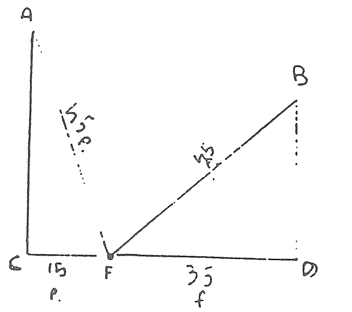


La mia Spiegazione

Prima di tutto mi son fatto il disegno delle 2 torri poi ho trovato la metà del suolo (25 passi). Con il compasso sono andato a tentativi e puntando nel centro dovevo trovare una distanza uguale per le 2 torri. Vedendo che non risultava mi son spostato più a sinistra e dopo vari tentativi ho trovato il punto della fontana. Quindi la torre di 30 passi dista dalla fontana 32 passi, mentre la torre di 40 dista dalla fontana 18 passi. Dal centro della fontana ci sono 7 passi

-stratégies additives (évidemment fausses) qui les ont amenés aux résultats: 35 et 15 ou bien 30 et 20

Orrù Michele 3ª Monastir 25-5-89

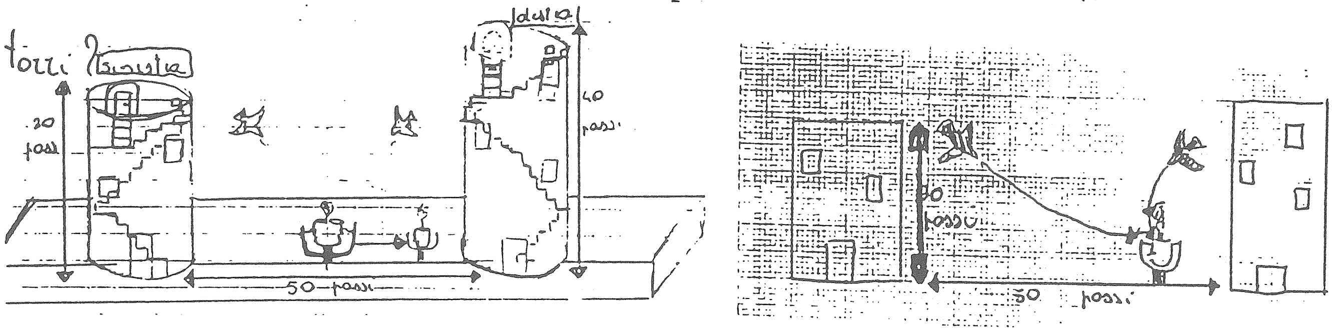


$A = 40$ P.
$\overline{AC} = 40$ P.
$\overline{CF} = 15$ P.
$\overline{BD} = 30$ P.
$\overline{DF} = 35$ P.
$\overline{AF} = 45$ P.
$\overline{BF} = 45$ P.

~~tutti~~ Se le due torri fossero tutti e due uguali di 40 passi, la fontana ~~fosse~~ fontana ~~fos~~ sarebbe al centro cioè a 25 passi, siccome una torre e di 10 passi in meno dell'altra la fontana deve essere di 10 passi ~~dalla torre~~ più vicino a quella più grande. Ho misurato con il righello. Avvicinando di 10 passi il punto F al punto la distanza $\overline{CF}$ e 15 passi invece $\overline{DF}$ e di 35 passi. Il punto $\overline{AF}$ e il punto $\overline{BF}$ s rispettivamente di 45 passi e gli uccelli avendo la ste velocita arrivano nello stesso istante.

Marcia Francesco ~~PROBLEMA~~ 2ª G 15/10/91

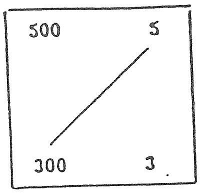
In un piano ci sono due torri una delle quali e alta 30 passi, l'altra 40 passi e distano nel suolo 50 passi fra queste c'è una fontana verso il cui centro volano due uccelli alla stessa velocita che discendono insieme dalla ~~al~~ cima stessa si chiude la distanza del centro da entrambe le torri ~~finestra~~



I due uccelli si buttano insieme dalle torri solo che l'uccello di destra era più molto di quello di sinistra. Quindi se l'uccello di destra ~~..~~ e più molto la fontana sarà ~~..~~ un più a destra

La fontana dista dalla torre piccola 30 passi e dalla ~~fontana~~ torre grande 20 passi

4) Les stratégies de Leonardo Pisano (traduction mot à mot):



<<Si la tour la plus haute est à une distance de 10 de la fontaine, 10 fois 10 font 100 qui ajouté à la tour plus longue multipliée par soi-même est 1600, qui donne 1700, il faut multiplier la distance qui reste, par elle même, qui ajouté à la tour plus petite multipliée par soi-même, à savoir 900, donne 2500.
Cette somme et la précédente diffèrent de 800. Il faut éloigner la fontaine de la tour la plus haute. Par exemple de 5, à savoir globalement de 15, qui multiplié par soi-même est 225, qui ajouté à la tour la plus haute multiplié par soi-même donne 1825.
35 (distance de la fontaine de la tour plus petite) multiplié par soi même est 1225, qui ajouté à la tour plus petite par soi même donne 2125.
Les deux sommes diffèrent de 300.
Avant, la différence était de 800. Donc, quand on a ajouté 5 pas, on a diminué la différence de 500.
Si on multiplie par 300 et on divise par 500, on a 3, qui ajouté à 15 pas, donne 18, qui est la distance de la fontaine à la tour plus haute.>>

En utilisant le théorème de Pythagore, Fibonacci a d'abord supposé que la distance de la tour la plus haute était 10, donc:

(selon les notations modernes)

$$10^2 + 40^2 = 100 + 1600 = 1700 \quad \text{et}$$

$$(50 - 10)^2 + 30^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500$$

(<<Cette somme et la précédente diffèrent de 800>>).
Il Continue:

$$15^2 + 40^2 = 225 + 1600 = 1825 \quad \text{et}$$

$$35^2 + 30^2 = 1225 + 900 = 2125.$$

(<<les deux sommes diffèrent de 300>>)

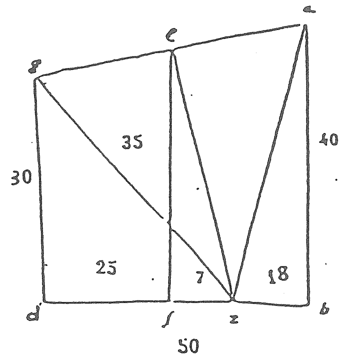
A ce point là Fibonacci, comme il l'explique lui même, utilise un raisonnement proportionnel: <<Avant, la différence était de 800. Donc quand on a ajouté 5 pas, on a diminué la différence de 500. Si on multiplie 5 par 300 et on divise par 500, on obtient 3, qui ajouté à 15 pas, donne 18...>>.

Auparavant on a parlé du "sens d'une connaissance mathématique", par, entre autres, les **économies qu'elle procure**.
La discussion critique, avec les élèves plus âgés, de la première stratégie de Leonardo Pisano, met clairement en évidence **l'économie** des procédures algébriques que les élèves utilisent normale-

ment (je dirais mieux mécaniquement) et qui n'étaient pas encore connues à l'époque de l'auteur du Liber Abaci.

C'est la bonne occasion d'expliquer aux élèves qu'en algèbre, l'usage des lettres est apparu seulement dés le début du XVI siécle.

-Seconde stratégie de Leonardo Pisano:



Après avoir expliqué que le triangle agz est isoscèle sur la base ag (avec ae=eg) par construction, il ajoute:
40 et 30 font 70; la moitié est 35, à savoir la ligne ef.
Les lignes df et fb ont 25 de longueur, la différence entre 35 et la tour la plus petite est 5, qui, multiplié par 35 fait 175, qui, divisé par la moitié de la distance entre les deux tours, à savoir 25, donne 7 (la ligne fz).
Donc dz est 32 et il ne reste que 18 pour la ligne zb.

On peut proposer aux élèves de l'école secondaire supérieure d'essayer de comprendre le procédé de Leonardo Pisano. Procédé, qui, comme on peut le voir, est basé sur la similitude du triangle efz et du triangle ghe où h est l'intersection de ef et de la parallèle à df passant par g.

La chose la plus importante n'est pas forcément la réussite, mais plutôt, les hypothèses que les élèves font et la discussion sur ces hypothèses. En outre on peut mettre en évidence l'usage des Eléments d'Euclide dans le liber Abaci.

5. Conclusions

Cet article, concernant mon atelier, est seulement un exemple du travail qu'on peut développer en classe en partant de l'histoire. Etant donné qu'en général la formation des enseignants de math. ne touche pas le domaine historique, on a peur d'aborder la question en classe.

Mais si on s'aperçoit que l'histoire et l'histoires de mathématiques peuvent être utiles du point de vue didactique, on peut se faciliter la tâche en commençant par une période localisée et riche de possibilités d'implications interdisciplinaires.

Mais quelle période historique n'est pas riche d'idées?

6. Bibliographie

[1] BROUSSEAU G., Les obstacle épistemologiques et les problèmes d'enseignement, RDM n. 4.2, 1983.

[2] CHARNAY R., Apprendre (par) la resolution de problèmes, COMMISSION INTER-IREM "Premier Cycle", ICME 6, 1988, pp. 13-29.

[3] DAHAN DALMEDICO A., PEIFFER J., Une histoire des mathématiques, Point-Sciences, Le Seuil, 1988.

[4] GHEVARUGHESE JOSEPH G., Foundations of Eurocentrism in mathematics, Race & Class, XXVIII, 3, 1987, pp. 13-28.

[5] GRUGNETTI L., The Role of the history of Mathematics in a Interdisciplinary Approach to Mathematics Teaching, ZDM, Karlsruhe, 89/4, pp. 133-138.

[6] GRUGNETTI L., ORRU' G., SUSNIK G., VANNUCCI V., Les programmes de mathématique: évolution en Italie, Actes de la 41e Rencontre internationale de la CIEAEM, Bruxelles, 23-29 juillet 1989, pp. 315-318.

[7] IREM, GROUPE EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE, Mathématiques au fil des ages, Gauthier-villars, 1987.

[8] PISANO L., Liber Abbaci (Sec. XIII), Edizione critica di Baldassarre Boncompagni, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e fisiche, 1857.

[9] STRUIK D.J., A concise history of mathematics, New York,1967.