Les recherches d'une multiplication dans $\mathbb{R}^3$ au XIXème siècle

L. Sinègre*

INTRODUCTION

A la fin du XVIIIème siècle et au début du XIXème ont émergé, indépendamment les unes des autres et parfois de façon confuse, des justifications géométriques des nombres imaginaires, utilisés depuis la Renaissance sans statut ni définition précis et reconnus.

La "représentation géométrique", qu'Argand introduit en étudiant la quatrième proportionnelle de 3 lignes dirigées du plan, est connue en Angleterre par les travaux de Warren. Dès les années 1830, l'Ecole mathématique de Cambridge, emmenée par Peacock, essaie de rénover le courant scientifique Britannique et, cherchant à dégager une place autonome pour l'Algèbre, qu'elle refuse de subordonner à la Géométrie, critique la position de Warren :

cette représentation ne pourra être qu'une "interprétation" qui donnera un sens, a posteriori, à des règles symboliques prédéfinies.

Se pose donc dès cet instant le problème de la relation qui relie le calcul, érigé en Algèbre, à la Géométrie, relation qui se développe tant sur le plan des définitions et de la prééminence, que sur celui du maniement opératoire.

Nous ne nous sommes pas étendu, dans cet atelier sur ce point bien connu : Hamilton refusant à la fois le point de vue géométrique (de Warren), et surtout le point de vue symbolique (de Peacock), a, en 1835, "construit" les nombres complexes grâce à la théorie des couples et donné à l'Algèbre un statut indépendant reposant sur des principes clairs.

LE CONTENU

Nous avons étudié plusieurs tentatives de généralisation des nombres complexes à $\mathbb{R}^3$, c'est à dire la recherche d'une multiplication $\times$ des lignes de l'espace respectant la loi des modules, c'est à dire telle que

$$\| \vec{x} \| \| \vec{y} \| = \| \vec{x} \times \vec{y} \|.$$

Nous sommes parti des tentatives de généralisation précoces, par exemple celles d'Argand, à partir de i^i pour observer les présupposés géométriques et surtout les questions sans réponses qu'elle posait :

• i^i est -il un nombre imaginaire ordinaire, ou une nouvelle unité, contredisant un résultat qu'avait déjà démontré Euler : $i^i = e^{-\pi/2}$?

• l'ensemble des nombres imaginaires est-il clos ?

• les règles de l'Arithmétique ou de l'Algèbre usuelles, étendues par "permanence" à d'autres champs, doivent-elles avoir le pas sur celles de la Géométrie ?

* Lycée Flaubert, Rouen.

Nous avons regardé ensuite, en détail, deux tentatives de généralisation, proposées par Hamilton dans la Préface des "Lectures on Quaternions"

LA PREMIERE EST ALGEBRIQUE.

Hamilton commence par dissymétriser le produit :

$$(m\,x_1 + n\,x_2 + p\,x_3)\,(r\,I_1 + s\,I_2 + t\,I_3)$$

Le premier triplet sera considéré comme un opérateur, s'appliquant sur le second. L'hypothèse de distributivité du produit en implique alors la linéarité. La multiplication est donc entièrement définie dès qu'on connaît les produits $x_1\ I_1, x_2\ I_2, x_3\ I_3$, c'est-à-dire les actions de la base des opérateurs sur les trois vecteurs I_1, I_2 et I_3.

Hamilton cherche donc un système de 27 constantes qui rendent l'équation

$$(mx_1 + nx_2 + px_3)\,(rI_1 + sI_2 + tI_3) = xI_1 + yI_2 + zI_3 \qquad (*)$$

"inversible", quelles que soient les valeurs de m, n, p, ce qui revient à trouver trois éléments de $GL(\mathbb{R}^3)$ dont le sous espace engendré reste dans $GL(\mathbb{R}^3)$.

Dans la suite il donne un système de constantes (parmi d'autres dit-il) et le mène jusqu'à mettre en défaut la propriété (*)

Nous avons étudié pourquoi de telles constantes avaient été posées. Mais au delà de ce choix particulier (les matrices - en termes modernes - retenues sont symétriques), il est plus intéressant de remarquer qu'il effectue alors une diagonalisation simultanée de x_1, x_2, x_3 (ce qui est toujours possible à cause de leur symétrie et de leur commutation !).

Il finira par affirmer qu'on trouve toujours des valeurs qui rendent l'équation * non inversible.

La deuxième partie du raisonnement est géométrique : il construit le produit des lignes en utilisant le repère des directions propres pour aboutir à la contradiction.

LA SECONDE EST GEOMETRIQUE :

On a aussi regardé, en détail, comment Hamilton tente (en 1831 et 1835) d'introduire une multiplication sur la sphère par deux tentatives, a priori autonomes :

construire une quatrième proportionnelle à trois lignes unités en utilisant
- d'abord le cercle circonscrit à leurs extrémités,
- ensuite des grands cercles s'intersectant également

OA = "1"	OA = "1"
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$
si et seulement si	si AI = ID
AB = CD	et BI = IC
sur le cercle (ABC)	(les cercles sont des grands cercles)

En étudiant leur parenté analytique, déjà remarquée par Hamilton dès 1835, on s'aperçoit que les deux méthodes sont des généralisations directes de celle d'Argand, car on se ramène, pour construire le produit $\overrightarrow{OD}$ (x", y", z") des deux lignes $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ de coordonnées (x, y, z) , (x', y', z') au système d'équations :

(1) $xx'' + yy'' + zz'' = r^2x'$

(2) $x'x'' + y'y'' + z'z'' = r'^2$ si on prend A (1, 0, 0)

(3) $x''^2 + y''^2 + r''^2 = r^2 r'^2$

la troisième égalité traduit simplement la loi des modules : le point D appartient à la sphère de rayon rr' = OB.OC.

Mais, de même, l'angle AOB est connu, et il faut donc pour construire D "par les angles" rechercher l'intersection de la sphère de rayon rr' avec le cône d'axe OC et de demi angle au sommet AOB.

Ce qui explique pourquoi la deuxième équation est celle du cône

$$\cos(AOC) = \cos(BOD)$$

(et aussi la première, par symétrie, à cause de la commutativité).

CONCLUSION

La découverte en 1843 du corps des quaternions par trois symboles tels que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, ne ferme pas le sujet puisque des mathématiciens comme De Morgan ou Graves continuent de chercher après cette date. Mais surtout Hamilton se croit obligé de justifier *a posteriori* la nécessité des deux changements qui heurtent les esprits :

La non commutativité de la multiplication.

Le passage à la dimension 4.

Nous avons donc fini par évoquer les justifications qu'il donne après coup de sa découverte, tout comme les constructions géométriques qu'il invente pour convaincre.

Les rapports Algèbre-Géométrie, dans la première moitié du XIXème siècle ne sont pas exactement ceux que l'on pouvait s'attendre à trouver.

Dans un premier temps la Géométrie sert de guide intuitif, même pour des constructions qui à première vue sont entièrement algébriques.

La géométrie porte aussi la contradiction aux tentatives algébriques Philologiques (élargir le champ d'application des règles de calcul), ce qui incite à préciser les conventions. Toutes ces interventions semblent fécondes.

Par contre, il suffit de rappeler que, même un algébriste créatif et moderne comme Hamilton, s'est senti obligé de consacrer de nombreuses pages à la justification géométrique a posteriori de sa découverte, pour en constater une facette beaucoup moins positive.

Un document a été édité à l'IREM de ROUEN qui reprend et développe le contenu de cette intervention :

QUELQUES ESSAIS POUR MULTIPLIER LES VECTEURS DE L'ESPACE AU XIXème SIECLE.