

Géométrie et Numérique dans l'Œuvre de Pascal

J.P. Lubet*

*"Les nombres imitent l'espace,
qui sont de nature si différente".*
Pascal. Les Pensées.

Dans le début de sa Géométrie, Descartes introduit un segment qu'il appelle "unité" et qui lui permet d'établir une analogie définitive entre les nombres et les lignes. Auparavant, Stevin a semblé régler le problème des incommensurables en écrivant qu'il n'y a pas de "nombre sourd".

Pascal ne procède pas par des affirmations aussi catégoriques; dans son œuvre, les relations entre les nombres et la géométrie restent plus problématiques. Les textes utilisés lors de cet atelier proviennent de trois groupes principaux :

1. Le "Traité du Triangle Arithmétique" et les traités connexes ont été imprimés en 1654 et diffusés seulement en 1665. Parmi les traités connexes, sont utilisés : "Les Nombres Figurés ou Ordres Numériques" et "La Sommutation des Puissances Numériques".

2. L'opuscule "De l'esprit géométrique" a été probablement écrit vers 1655; exploité du vivant de Pascal, notamment par son entourage de Port-Royal, il n'a été publié qu'au XVIII^{ème} siècle.

3. Les "Lettres de A. Dettonville" constituent un ensemble appelé parfois "les Traités de la Roulette" et publié vers 1659. Dans cet ensemble la "Lettre de A. Dettonville à M. de Carcavy" donne les moyens d'étudier les problèmes de centres de gravité; en matière de relations entre numérique et géométrie, elle constitue sûrement la partie la plus originale de l'œuvre de Pascal en même temps que l'aboutissement de profondes interrogations antérieures. Un court extrait du "Traité des Trilignes rectangles et de leurs onglets" est également mentionné.

Les principales citations sont extraites de l'édition des œuvres de Pascal par Jean Mesnard ; elles sont suivies de l'indication du tome et du numéro de page auxquels elles correspondent.

* Lycée technique Boggio, Lille.

L'ARITHMETIQUE ET LES FORMES GEOMETRIQUES

La mise en évidence des propriétés du triangle arithmétique par Pascal est vraisemblablement consécutive à des travaux sur les *nombres figurés*. Dans sa rédaction définitive, le traité du triangle arithmétique reste d'ailleurs suivi d'un chapitre intitulé "*nombres figurés ou ordres numériques*". Le tableau suivant permet de récapituler quelques indications:

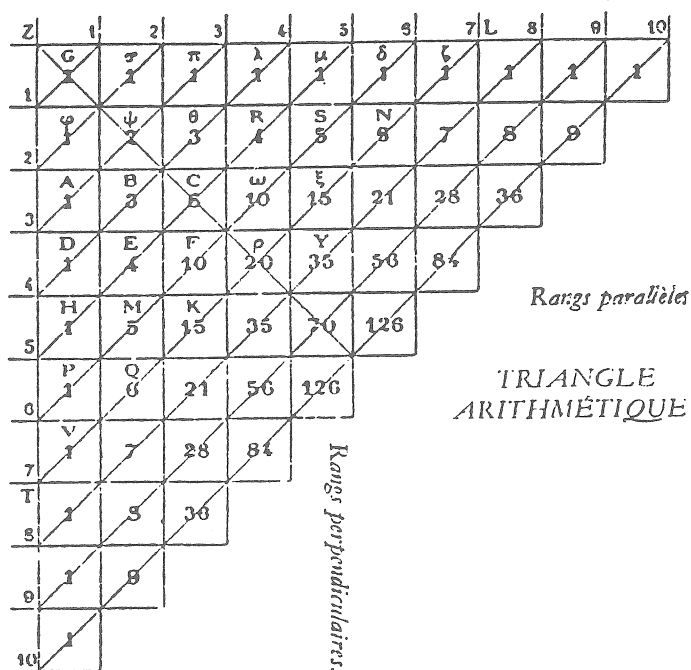
Unités ou premier ordre	1	1	1	1	...
Naturels ou 2ème ordre	1	2	3	4	...
Triangulaires ou 3ème ordre	1	3	6	10	...
Pyramidaux ou 4ème ordre	1	4	<u>10</u>	20	...
Triangulo-triangulaires ou 4ème ordre	1	5	15	35	...

La démarche s'inscrit dans une tradition pythagoricienne; par exemple, le nombre 10 souligné représente l'assemblage de points obtenu en empilant les triangles formés respectivement de 6, 3 et 1 points. Ainsi un procédé purement arithmétique (10 se forme par l'addition des nombres de l'ordre précédent) est mis en place et à partir du 5ème ordre, c'est ce procédé qui prend le pas sur l'interprétation géométrique :

"J'appelle cinquième ordre numérique la suite des nombres qui se forment par l'addition des précédents (ceux du 4ème ordre) et qui peuvent être dits triangulo-triangu-laires".(II, 1196)

Commentant précisément cette situation, D'Alembert pourra écrire:

"Passé les nombres pyramidaux, il n'y a plus de vrais nombres figurés, parce qu'il n'y a point de figure en Géométrie au-delà des solides, ni de dimension au-delà de trois dans l'étendue. Ainsi, c'est par pure analogie et pour simplifier, que l'on a appelé figurés les nombres qui suivent les pyramidaux" (article "figuré" de l'Encyclopédie).



Si l'on consent à oublier le point de départ des nombres figurés, pour ne plus voir que l'inscription réglée de nombres dans un tableau qui va constituer le *triangle arithmétique*, c'est un autre rapport de ces nombres à l'espace géométrique que l'on voit s'établir. Un ensemble de définitions à support géométrique permet de décrire et de faire fonctionner la structure ainsi mise en place : les nombres s'inscrivent dans des cellules, lesquelles se

répartissent en rangs parallèles, en rangs perpendiculaires, en bases; les cellules peuvent être réciproques, ou contiguës, l'une peut être supérieure à l'autre ; dans ce langage se démontrent et s'énoncent les 18 "conséquences" qui constituent le traité du Triangle Arithmétique ; ainsi la conséquence douzième :

"En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusque au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusque en bas inclusivement."(II,1294)

On peut se retrouver au voisinage des spéculations sur les nombres figurés (triangulaires et pyramidaux) avec les définitions sur lesquelles s'ouvrent les "traités de la roulette" :

"S'il y a tant de quantités qu'on voudra A, B, C, D, lesquelles on prenne en cette sorte: premièrement, la somme de toutes, A, B, C, D; puis la somme des mêmes excepté la première, savoir B, C, D; puis la somme des mêmes excepté les deux premières, savoir C, D; et ainsi toujours, comme on les voit ainsi marquées:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & B & C & D \\ & & C & D \\ & & & D \end{array}$$

j'appelle la somme de ces quantités, prises de cette sorte, la somme triangulaire de ces mêmes quantités, à commencer par A."(IV,414)

Le triangle est ainsi obtenu en individualisant les colonnes qui donneraient le nombre triangulaire :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}$$

Les "quantités" dont il est ici question vont être systématiquement représentées par des nombres entiers dans les propositions qui suivent immédiatement la définition. Mais la voie est libre pour l'utilisation des sommes triangulaires dans le cas où ces quantités deviennent des longueurs, des aires ou des volumes.

Les sommes triangulaires sont d'emblée présentées comme l'instrument permettant de traiter les problèmes d'équilibre et de centres de gravité :

"... je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette connaissance. J'ai considéré une balance B, A, C,

$$\begin{array}{ccccccc} & B & & & A & & C \\ \hline 4 & & 5 & & 3 & & 9 & & 8 \end{array}$$

suspendue au point A, et ses bras de telle longueur qu'on voudra, AB, AC, divisés en parties égales de part et d'autre, avec des poids pendus à chaque point de division, savoir, au bras AB, les poids 3, 5, 4, et au bras AC, les poids 9, 8..

...Pour faire que les poids d'un bras soient en équilibre avec ceux de l'autre, il faut que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres, à commencer toujours du côté du point A..."(IV,414)

A la suite de Pierre Costabel, remarquons que la notion introduite diffère sensiblement dès la définition de notre notion de *moment statique*; certes, Pascal justifie son propos en invoquant "*les forces des poids (qui) sont en raison composée des poids et des bras*". Mais quand le poids 8 par exemple est compté deux fois dans la somme :

$$\begin{array}{c} 9 \\ 8 \\ 8 \end{array}$$

il faut y voir un ordre de multiplicité lié au nombre de parties égales logées entre A et C et non pas le produit du poids 8 par la *distance* AC. Cette nuance dans la définition affirme le caractère très arithmétique des sommes triangulaires ; ce caractère se trouve confirmé dans propositions qui suivent les définitions : les démonstrations procèdent chaque fois de manipulations numériques où l'inscription des nombres dans des tableaux triangulaires joue un rôle déterminant.

Concluons cette partie consacrée au Traité du Triangle Arithmétique et aux premières définitions des Traités de la Roulette. Des nombres (figurés) naissent de formes géométriques; puis, en retour, l'inscription de nombres le long des subdivisions d'une droite (la balance) ou dans les cellules d'un triangle permet de démontrer et d'énoncer des propriétés arithmétiques.

LES GRANDEURS CONTINUES ET LES NOMBRES

Mais si l'arithmétique des entiers et la géométrie peuvent ainsi se prêter main forte, il reste que leur mutuelle adéquation est loin d'être parfaite: les Grecs ont rencontré l'obstacle des incommensurables. Au XVII^{ème} siècle certains esprits, "très habiles d'ailleurs", continuent de professer que l'espace est formé d'indivisibles et "ne sauraient concevoir un continu divisible à l'infini". C'est en dernier ressort l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que Pascal utilise pour confondre ces tenants d'une sorte d'atomisme géométrique:

"...s'il était véritable que l'espace fût composé d'un certain nombre fini d'indivisibles, il s'ensuivrait que deux espaces, dont chacun est un carré c'est-à-dire égal est pareil de tous côtés, étant doubles l'un de l'autre, l'un contiendrait un nombre de ces indivisibles double du nombre des indivisibles de l'autre...Mais si la chose est naturellement impossible, c'est-à-dire s'il y a impossibilité à ranger des carrés de points, dont l'un en ait le double de l'autre, comme je le montrerais en ce lieu même si la chose valait qu'on s'y arrêtât, qu'ils en tirent la conséquence.("de l'esprit géométrique"; (III,405)).

Qu'on ne se méprenne pas sur l'argument de l'incommensurabilité utilisé ici; il ne s'agit pas de séparer irrémédiablement les nombres d'un côté, les grandeurs continues de l'autre. La démarche générale de l'opuscule "de l'esprit géométrique" consiste au contraire à établir une analogie entre les propriétés des nombres et celles des grandeurs continues: espace, temps, mouvement. Pour les uns comme pour les autres, il s'agit d'ensembles que nous appellerions aujourd'hui "archimédiens" :

"Ainsi il y a des propriétés communes à toutes ces choses, dont la connaissance ouvre l'esprit aux plus grandes merveilles de la nature....

C'est-à-dire, en un mot, que quelque mouvement que ce soit, quelque nombre, quelque espace, quelque temps que ce soit, il y en a toujours un plus grand et un moindre de sorte qu'ils se soutiennent tous entre le néant et l'infini, étant toujours infiniment éloignés de ces extrêmes".(III,402)

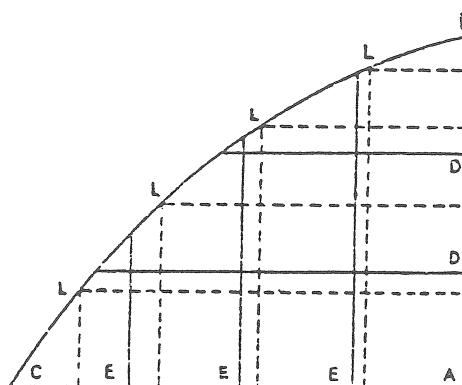
Mais de quels nombres s'agit-il ? Au lecteur du XX^{ème} siècle, le texte peut ne pas paraître explicite. Certes, "les nombres" désigne un terme primitif qui ne doit pas faire l'objet d'une définition : "*Car elle (la géométrie) ne peut définir ni le mouvement, ni les nombres, ni l'espace*". Certes contre Euclide, il faut accepter l'unité au rang des nombres et il faut admettre une extension de la notion de nombre "*pour éviter de dire à chaque fois: en tout nombre, et à*

l'unité et aux fractions, une telle propriété se trouve". Mais au-delà des rationnels ainsi évoqués, on retiendra l'insistance à rapprocher les nombres et les grandeurs continues.

Remarquons enfin que les conceptions ainsi mises en avant dans "de l'esprit géométrique" ne restent pas purement spéculatives; la possibilité de considérer une quantité "moindre qu'aucune donnée" est le fondement ultime des instruments élaborés pour "les traités

de la roulette". Notons dès maintenant comment, au début de la lettre de Dettonville à Carcavy, le rapport de grandeurs incommensurables est banalisé au moyen d'un découpage "indéfini" et par l'évocation d'un procédé d'approximation :

"Soit un triligne rectangle ABC, composé des deux droites AB, AC, dont celle qu'on voudra comme AB sera l'axe, et l'autre la base, faisant angle droit, et de la courbe quelconque BC. Soient divisés en un nombre indéfini de parties égales, tant AB aux points D que AC aux points E et encore la courbe BC aux points L ; et que chacune des parties de AB soit égale à chacune des parties de AC, et encore à chacune des parties de la courbe BC (car il ne faut pas craindre l'incommensurabilité



puisqu'en ôtant d'une des grandeurs incommensurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commensurables)." (IV,433)

LA MESURE DES GRANDEURS :

LE CONTEXTE DU XVII^{ème} SIECLE

L'héritage grec conduit à envisager les problèmes de rectification des arcs, de quadrature ou de cubature à l'intérieur de la théorie des grandeurs; les définitions du livre V des Eléments d'Euclide et la méthode d'exhaustion mise en oeuvre tant par Euclide que par Archimède fournissent des modèles de démonstration. Ces instruments permettent d'établir des comparaisons *directes* entre des figures géométriques, soit pour montrer qu'elles sont équivalentes, soit pour montrer qu'elles ont entre elles une "raison" déterminée. Dans ces démonstrations les aspects numériques sont peu présents ; le traité "de la mesure du cercle" d'Archimède fait exception en cherchant une approximation numérique du rapport entre le périmètre du cercle et son diamètre.

Cette donnée de fait n'est pas immédiatement modifiée au XVII^{ème} siècle par l'intervention des méthodes regroupées sous le nom de *méthodes des indivisibles*.. Celles-ci donnent d'abord des moyens plus expéditifs pour effectuer des comparaisons directes entre figures. Envisageant les segments de droites inscrits dans une figure et parallèles à une droite donnée, Cavalieri tente de donner un statut au concept de "toutes les lignes" d'une figure et de faire entrer ce concept à l'intérieur de la théorie des grandeurs (annexe 1). Pour réaliser la quadrature de la cycloïde, Descartes utilise le même principe de base que Cavalieri. Puis quand il juge que ce principe peut éventuellement être contesté, Descartes donne à sa démonstration un prolongement fondé surtout sur des arguments géométriques et visuels (annexe 2).

Cependant sous certaines de ces méthodes, les nombres entiers viennent à affleurer. Pour éviter les paradoxes liés à l'utilisation de grandeurs hétérogènes certains auteurs envisagent l'épaisseur des indivisibles (Torricelli), d'autres (Roberval, Pascal, Wallis) font

intervenir des rectangles de largeur "infinitement petite". Dans tous les cas, l'attention portée à l'espacement (voire à un espacement *régulier*) des indivisibles, amène à les *énumérer* et à envisager, de fait, le continu comme une *densification d'ensembles dénombrables*. Ainsi Fermat s'excuse d'une interprétation erronée qu'il a faite de la quadrature de la cycloïde par Roberval et il explique :

"Je ne songeai d'abord qu'à la progression arithmétique, sur laquelle, comme sait Monsieur Roberval, la plupart des quadratures sont fondées". (lettre à Mersenne - Juillet 1638).

Dans le cas des "paraboles" ($y = x^n$), définies d'emblée par une relation analytique, cette conception conduit à une quadrature par le moyen d'un calcul.

Dans le traité "Somme des puissances numériques", Pascal montre comment calculer des sommes du type :

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

Et il conclut:

"Le parti que l'on peut tirer des résultats qui précèdent pour déterminer les dimensions des espaces curvilignes n'échappent pas à ceux qui sont un tant soit peu versés dans la théorie des indivisibles. Car on peut immédiatement carrer toutes les paraboles de tous les genres, et mesurer très facilement un grand nombre d'autres courbes."(II,1212)

Les explications qui suivent suggèrent alors comment on pourrait obtenir, par exemple l'aire, $1/3$, sous la parabole d'équation $y=x^2$, en considérant :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

La justification donnée mérite d'être lue entièrement :

"... j'ai noté ces résultats en passant; le reste est facile à pénétrer si l'on pose ce principe: dans le cas d'une grandeur continue, des grandeurs d'un genre quelconque, ajoutées, en tel nombre qu'on voudra, à une grandeur d'un genre supérieur, ne l'augmentent en rien. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides, ou pour employer le langage des nombres dans un traité consacré aux nombres, les racines ne comptent pas par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes, les cubes par rapport aux carrés-carrés, etc. Donc les degrés inférieurs doivent être négligés comme dépourvus de toute valeur. Ces points sont familiers à ceux qui ont étudié les indivisibles, mais j'ai cru bon de leur consacrer cette addition, afin que la liaison, digne d'une admiration inlassable, que la nature éprise d'unité établit entre les choses les plus éloignées en apparence ressorte de cet exemple, où l'on peut voir la mesure d'une grandeur continue inséparable de la somme des puissances numériques".(II,1271)

Retenons deux aspects importants :

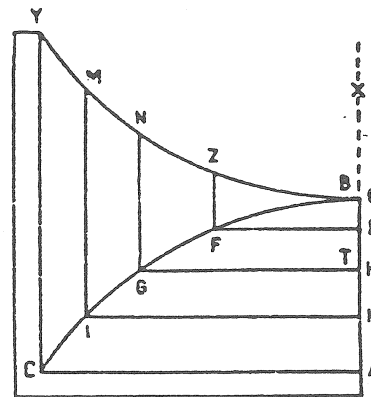
1. La comparaison des genres des grandeurs *géométriques* (points, droites, plans) fournit le moyen de la comparaison des expressions *numériques* de degrés différents. Le caractère *continu* du modèle géométrique conduit finalement à un résultat numérique que nous appellerions une *limite*.

2. L'"admiration inlassable" évoquée ici peut s'interpréter dans le contexte historique que nous avons d'abord évoqué : la mesure des grandeurs conserve une large autonomie par rapport aux problèmes numériques. Dans le cas des "paraboles", c'est la rencontre d'une définition analytique avec la progression arithmétique "sur laquelle la plupart des quadratures sont fondées" qui donne naissance à ce qui peut apparaître comme un cas particulier.

LES SOMMES TRIANGULAIRES APPLIQUEES AUX GRANDEURS CONTINUES

Revenons pour terminer aux sommes triangulaires décrites au début avec leur caractère *arithmétique*. Dans la lettre à Carcavy, leur utilisation est très rapidement étendue à des objets géométriques de type continu: arcs de courbes, surfaces, solides. Limitons-nous au cas d'un arc de courbe :

"Soit donc une ligne courbe quelconque CB, divisée comme on voudra en parties égales ou inégales aux points I, G, F, . Pour prendre la somme triangulaire des portions CI, IG, GF, FB, à commencer du côté de C, il faudra prendre la toute CFB, plus la portion IFB, plus la portion GFB, plus la portion FB.



Car (par la définition) la somme triangulaire de toutes les portions CI, IG, GF, FB se trouve en les prenant en cette sorte: premièrement, toutes ensemble, et ensuite toutes ensemble excepté la première, et puis toutes ensemble excepté les deux premières, etc., en cette sorte:

	CI	+	IG	+	GF	+	FB	ou	la	ligne	CFB
plus			IG	+	GF	+	FB	ou	la	ligne	IFB
plus					GF	+	FB	ou	la	ligne	GFB
plus							FB	ou	la		ligne
FB"											

(IV,420)

Les propriétés vérifiées dans le cas *discret* sont alors étendues au cas *continu*. Ainsi l'énoncé que nous appellerons "proposition 1^{bis}" est pratiquement "décalqué" de la proposition 1 qui a fait l'objet d'une vérification *arithmétique*:

proposition 1^{bis}

"La somme triangulaire de ces portions à commencer par C, c'est-à-dire la simple somme des portions CFB, IFB, GFB, FB, est égale à la simple somme des petites portions CI, IG, GF, FB, c'est-à-dire la ligne CFB, prise autant de fois qu'il y a de points (ou de parties) dans les bras TA, c'est-à-dire multipliée par le bras TA."(IV,427)

proposition 1

"je dis que la somme triangulaire de tous ces poids, à commencer du côté qu'on voudra, par exemple du côté C, c'est-à-dire la somme triangulaire des poids 8,9,5,4,0,7, est égale à la simple somme de ces poids (c'est-à-dire à la somme de ces poids pris chacun une fois), multipliée autant de fois qu'il y a de points dans CA (puisqu'on a commencé par C), c'est-à-dire trois fois en cette figure :

7.0.4.5.9.8.	7.0.4.5.9.8.
7.0.4.5.9.	7.0.4.5.9.8.
7.0.4.5.	7.0.4.5.9.8.
7.0.4.	
7.0.	
7.	

9 9

9 9

(IV,417)

Essayons d'éclairer ces énoncés par quelques commentaires :

La fin de la proposition 1bis d'abord: elle se comprend en imaginant la ligne CFB allongée en un segment de droite de longueur égale à celle de CFB et placé perpendiculairement à TA; lorsque cette extrémité parcourt TA, la ligne CFB balaie un rectangle qui est donc le produit de CFB par TA. La parenthèse suggère une subdivision de TA en parties, supposons que ces parties soient en nombre n, et qu'elles soient égales entre elles, "la ligne CFB prise autant de fois qu'il y a de ces parties" pourrait s'interpréter en $n \times \text{CFB}$; si l'on veut retrouver le résultat annoncé il faut multiplier le tout par la longueur commune de ces parties, soit TA/n .

Mais pour la somme des portions CFB, IFB ... le sens primitif et algébrique qui peut s'imposer d'abord au lecteur moderne ne fournit pas davantage l'interprétation qui convient ; en particulier, si le nombre de points de subdivisions croît indéfiniment pour rendre compte du problème continu qu'il faut traiter, cette somme ne reste pas bornée. C'est alors "dans le langage des indivisibles" qu'il faut entendre la mot "somme" :

"Quand j'ai parlé de la somme des lignes CFB, IFB, GFB, FB, on n'a dû entendre autre chose sinon la somme des rectangles compris de chacune de ces lignes et de chacune des petites portions égales BE, EH, etc.(c'est-à-dire avec chacune des distances égales d'entre deux plans voisins) ; et qu'ainsi cette multitude indéfinie de petits rectangles de même hauteur forment un plan".(IV,427)

De même que la ligne CFB prise autant de fois qu'il y a de points dans TA donnait un rectangle, de même la somme triangulaire utilisée ici s'interprète en terme de surface, par le passage au genre géométrique supérieur.

Finalement, le parallélisme des deux énoncés peut se lire à travers le résumé suivant :

B		A		C
7	0	4	5	9
				8

$$7 \times 6 + 0 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 3 + 9 \times 2 + 8 \times 1 = 33 \times 3$$

A		T		B

$$\text{CFB} + \text{IFB} + \text{GFB} + \dots = n \times \text{CFB}$$

$$\text{CFB.AK} + \text{IFB.KH} + \text{GFB.HE} + \dots = \text{TA.CFB}$$

La justification de ce passage du discret au continu a été donnée dès le début :

"Je sais bien que ces portions de la grandeur proposée ne pendent pas précisément aux points de division de la balance BA, mais je n'ai pas laissé de le dire, parce que c'est la même chose. Car en divisant chacune de ces parties égales de la balance BA par la moitié, ces nouvelles divisions donneront une nouvelle balance, qui ne différera de la première que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée..."

(IV,423)

Soulignons par une dernière remarque l'idée-maîtresse : le *passage en force* de la définition arithmétique des sommes triangulaires à leur interprétation en terme d'aire.

En effet, il ne s'agit pas d'un prolongement d'inspiration mécanique qui conduirait à définir, dans le cas des grandeurs continues, un *moment statique*: une telle conception conduirait à envisager la somme des *moments élémentaires*:

$$BE \times FG + BH \times GI + BK \times IC$$

Dans le traité du triligne rectangle, Pascal constatera que ce moment statique s'identifie à la somme triangulaire (Cf annexe 3) mais il gardera ses distances par rapport à cette notion en ces termes :

"De là paraît la démonstration de cette méthode assez connue, que la somme des poids, multipliée par le bras commun de tous ensemble, est égale à la somme des produits de chaque poids, multiplié par son propre bras à l'égard d'un même axe de balancement.

Je ne m'arrête pas à l'expliquer davantage parce que je ne m'en sers point... Ma méthode m'ayant suffi partout, j'ai mieux aimé n'en employer point d'autre".

(IV,466).

S'il faut conclure et tenter de résumer en quelques mots, retenons ceci: à celui qui les observe avec passion, les *nombres* et l' *espace* révèlent la diversité de leurs insaisissables rencontres. De ces rencontres naissent quelques uns des *instruments spécifiques* de l'œuvre de Pascal.

B I B L I O G R A P H I E

Kristi ANDERSEN - Cavalieri's Methods of Indivisibles. - Archiv for history of exact sciences, 1981.

Antoine ARNAULD - Nouveaux éléments de géométrie. - Réimpression IREM de Dijon. - 1983.

Marie-Christine CARAMATIE et Jean-Pierre CLERO - Divers aspects de l'infini en mathématiques et en philosophie. - CRDP et IREM de Rouen, 1990.

Jean-Pierre CLERO et Evelyne LE REST - La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle. - Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences. numéro 16, 1981.

Pierre COSTABEL - Essai sur les secrets de la Roulette. - Revue d'histoire des sciences, 1962

François de GANDT et alii - L'œuvre de Torricelli: science galiléenne et nouvelle géométrie. - Les Belles Lettres - 1989.

Jean-Louis GARDIES - Pascal entre Eudoxe et Cantor. - VRIN - 1984.

Blaise PASCAL - Œuvres Complètes, édition du tricentenaire par Jean MESNARD - Desclée de Brouwer - (4 tomes parus à ce jour).

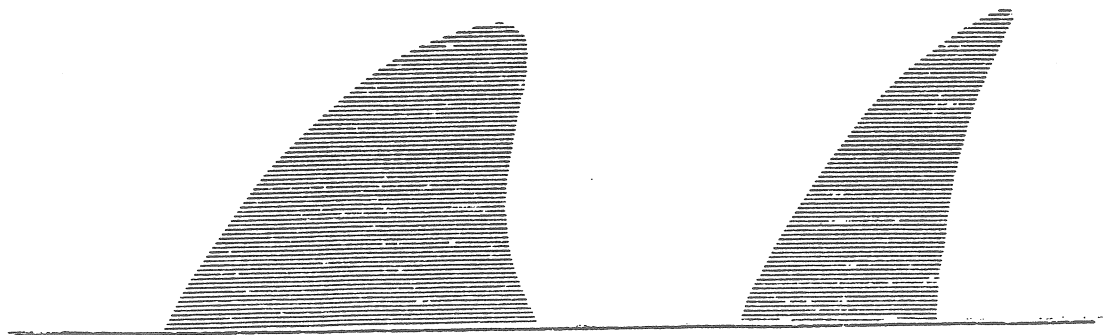
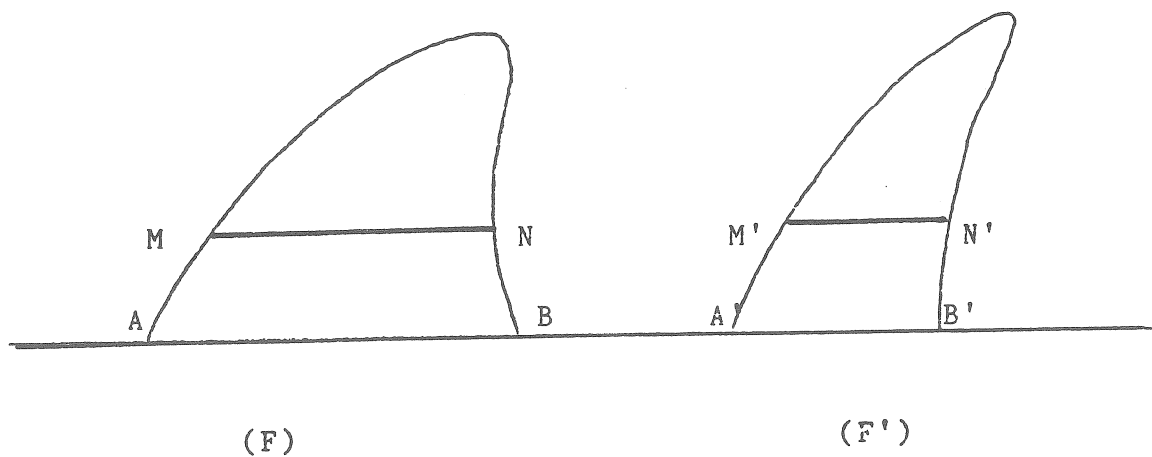
Michel SERRES - Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques. - PUF - 1968.

A N N E X E 1

Le théorème 3 de la "Geometrica Indivisibilibus" de Cavalieri énonce :

"Il y a même proportion entre deux figures planes qu'entre toutes les lignes de ces deux figures, déterminées suivant une règle commune".

Explicitons sur l'exemple de la figure ci-dessous. Si pour chaque segment MN de la figure (F) parallèle à la règle ABA'B', le segment M'N' correspondant dans la figure (F') vérifie $MN = 2 M'N'$, alors les aires respectives des figures vérifient $S = 2S'$.



A N N E X E 2

Dans la lettre à Mersenne du 27 juillet 1638, Descartes veut démontrer l'égalité de l'aire du demi-cercle (C') et de la portion de la cycloïde limitée par l'arc AKB et la corde AB (figure 1); il démontre :

$$MH + M'H' = UV$$

Par une symétrie par rapport à I le triangle mixtiligne AKI est ramené le long du côté IB (figure 2) ; l'égalité $UV = MM'$ permet de démontrer l'égalité des aires de (F) et de (C') (figure 3), en vertu d'un théorème que Descartes énonce ainsi :

"Lorsque deux figures ont même base et même hauteur, et que toutes les lignes droites, parallèles à leurs bases, qui sont dans l'une, sont égales à celles qui s'inscrivent à l'autre à pareilles distances, elles contiennent autant d'espace l'une que l'autre".

Puis il indique que *"c'est un théorème qui ne serait peut-être pas avoué de tous"*. Il confirme alors son résultat en démontrant que de l'égalité des "indivisibles UV et MM', on peut passer à des égalités d'aires successives (figure 4) : les triangles ace et a'c'e' sont équivalents, puis la somme des aires des triangles abc et cde est égale à la somme des aires de a'b'c' et c'd'e', et un processus de remplissage équivalent des figures (F) et (C') peut se poursuivre ; Descartes peut conclure cette fois de façon définitive, *"car toutes les parties d'une quantité étant égales à toutes celles d'une autre, le tout est nécessairement égal au tout"*.

Pour ce passage des indivisibles aux aires triangulaires, on peut prendre un peu de distance avec la démonstration effectivement donnée par Descartes et en avoir une idée rapidement: si les domaines convexes (D) et (D') (figure 5) sont formés de segments indivisibles égaux, les trapèzes de la figure sont équivalents, de même que les trapèzes de la figure 6, par différence les triangles de la figure 7 vérifient alors :

$$T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2$$

Puis en intercalant de nouvelles droites horizontales, on borde les triangles précédents par de nouveaux triangles dont les aires se correspondent suivant le même principe (figure 8).

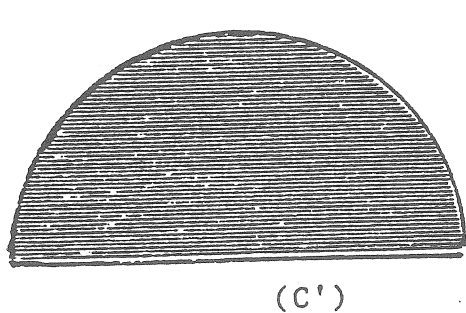
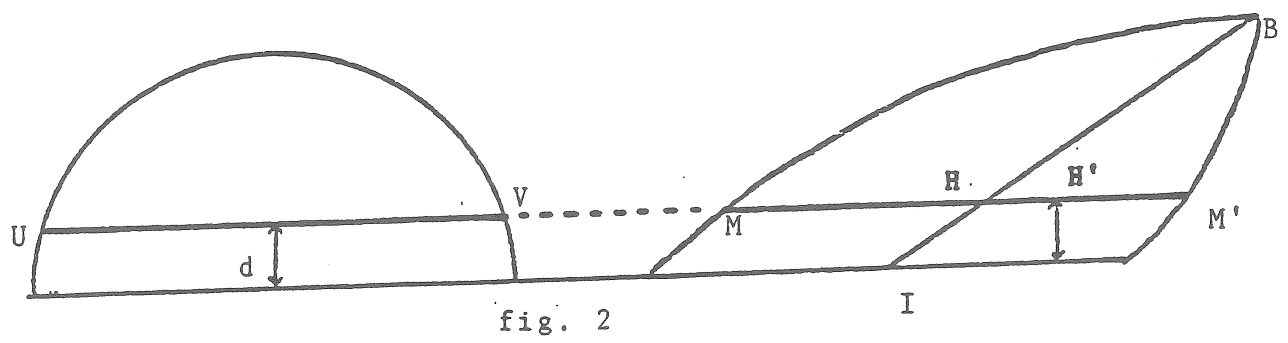
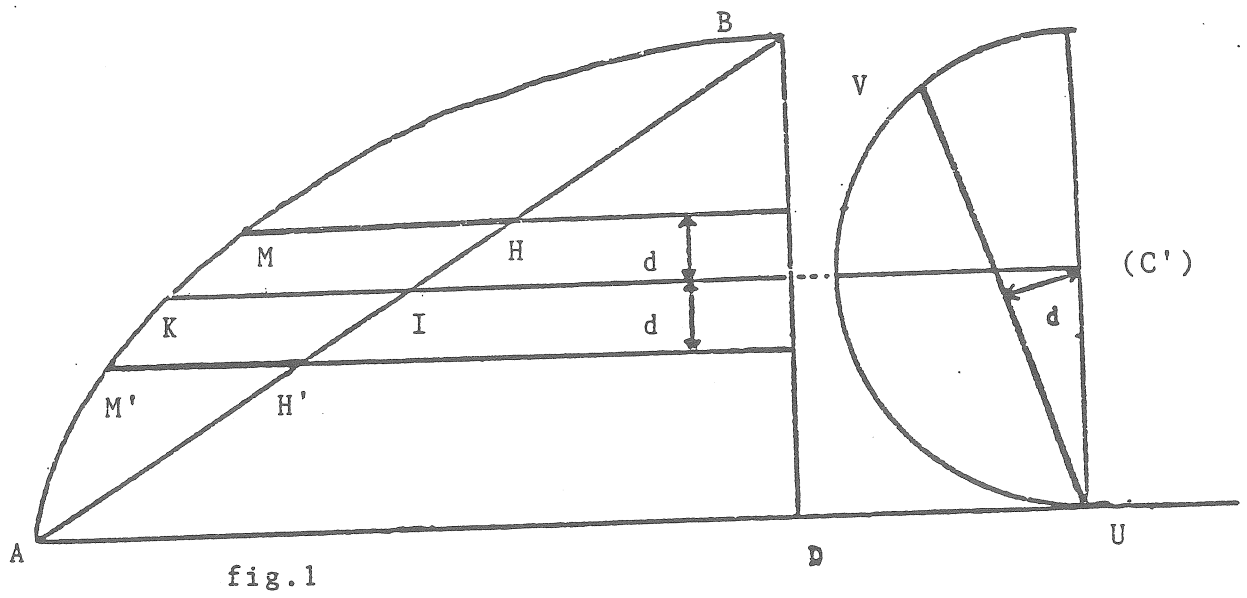
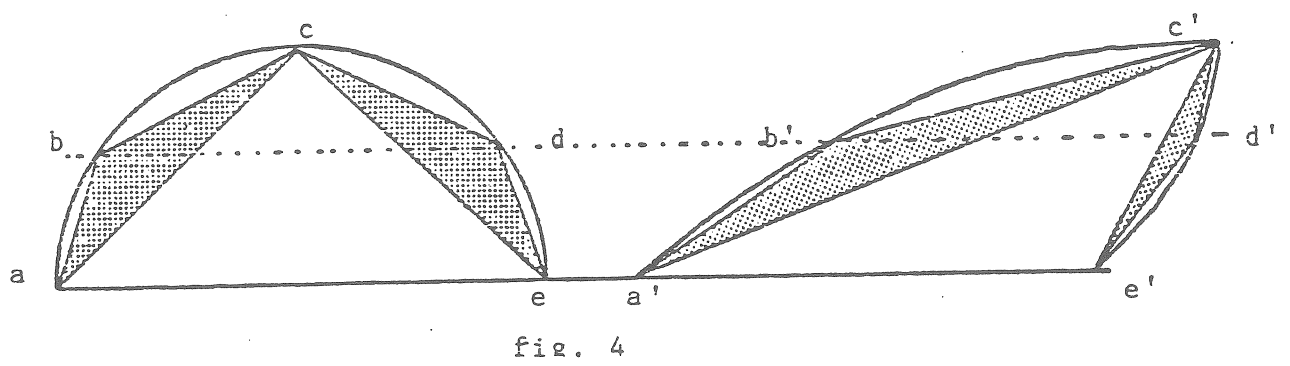
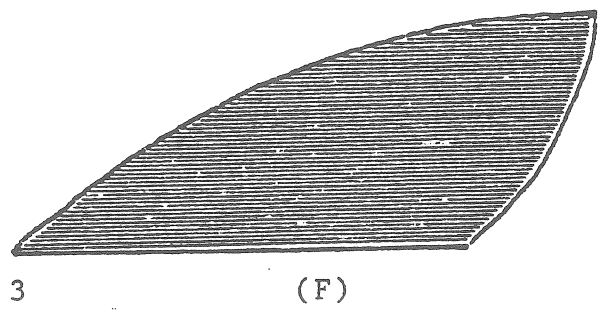


fig. 3



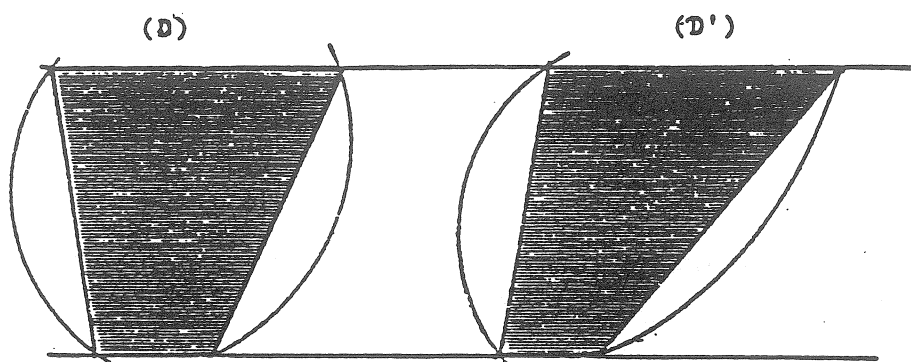


fig.5

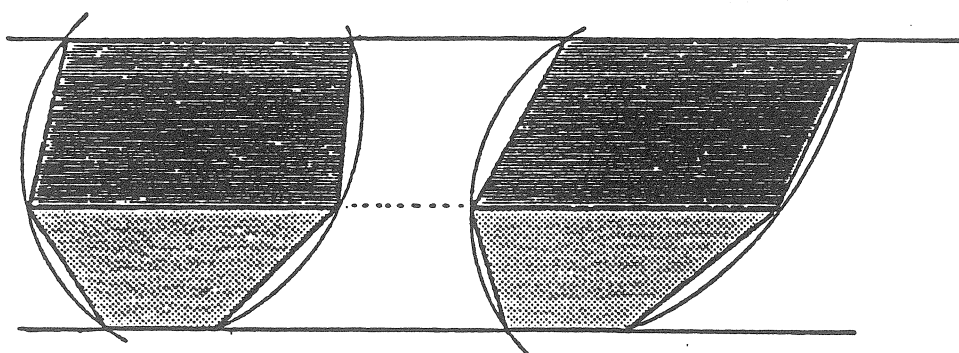


fig. 6

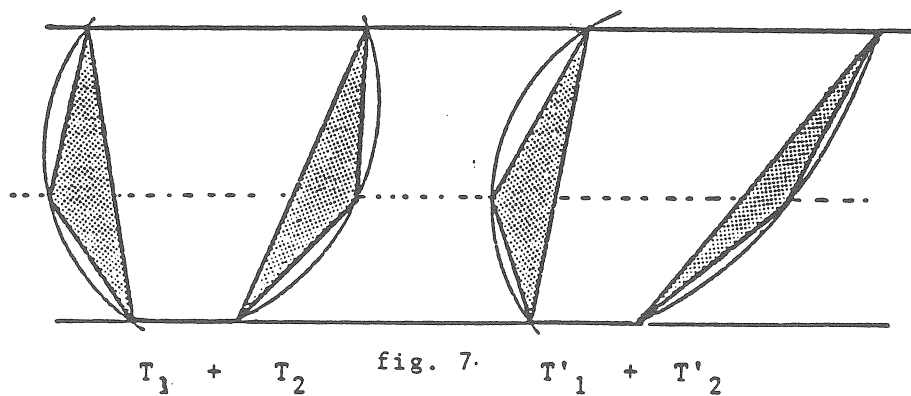


fig. 7.

$T_1 + T_2$

$T'_1 + T'_2$

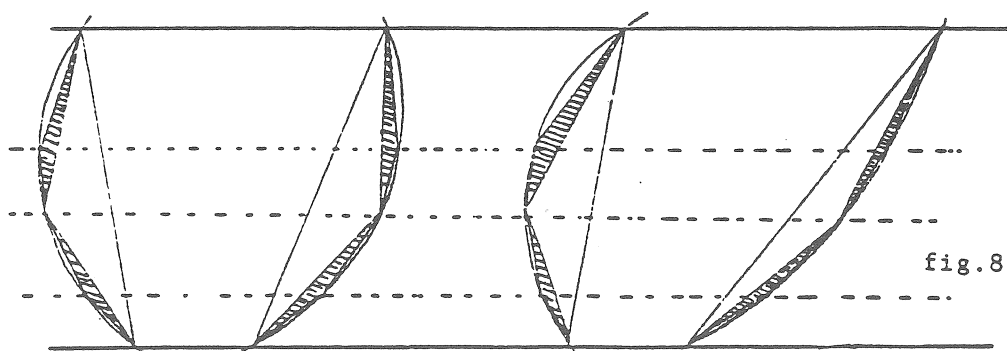


fig.8

A N N E X E 3

La somme triangulaire : $CFB.AK + IFB.KH + GFB.HE...$ s'interprète comme l'intégrale:

$$T = \int_0^b s \, dx$$

(où s représente l'abscisse curviligne sur la courbe BC et b la distance AB)

La somme : $BE.FG + BH.GI + BK.IC + ...$ s'interprète comme la somme des moments élémentaires, donc comme le *moment statique* de la courbe CB par rapport à l'axe Bz :

$$M = \int_0^l (b - x) \, ds$$

(où l représente la longueur de l'arc BC)

Une intégration par parties, par exemple, permet de vérifier que :

$$M = T$$

