

Géométrie à l'Université

J. Fresnel*

0. Introduction.

Port d'Albret, juin 1990, **Marc Fort** clôturait le colloque par une conférence-débat sur le constat de la pauvreté de l'enseignement de la **Géométrie** en milieu universitaire :

"l'enseignement de la géométrie a pratiquement disparu des formations universitaires traditionnelles, de telle sorte que les "nouveaux" enseignants arrivant dans leurs classes n'ont comme bagage dans ce domaine que ce qu'ils ont appris au lycée et peut-être travaillé lors de leur préparation au CAPES (ou à l'Agrégation). Leur souci en prenant contact avec leur vie professionnelle n'est pas de prendre du recul par rapport à ce qu'ils enseignent mais de savoir résoudre les problèmes qu'ils vont poser à leurs élèves".

Triste bilan auquel j'aimerais opposer l'expérience de mon Université où un enseignement conséquent de la **Géométrie** en licence et maîtrise existe depuis 15 ans. Un tel enseignement pour exister à l'Université doit être consciemment associé au fait que la recherche en géométries (algébrique, arithmétique, différentielle, analytique...) est une actualité plus que vivante (avec des outils considérablement élaborés). J'aimerais à ce propos donner quelques exemples de problèmes en géométrie algébrique ou arithmétique, soit résolus il y a peu, soit toujours ouverts.

1. Histoire de l'enseignement de la Géométrie à Bordeaux.

1.1. Le bilan à Bordeaux.

Vers les années 1975, on a créé un module de Géométrie en licence de mathématiques de 100 heures environ, et cela à l'initiative des étudiants qui souhaitaient être mieux préparés pour le concours du CAPES qu'ils engageraient l'année d'après. Le regretté professeur **Jean Colmez** (à qui le colloque de port d'Albret était dédié) en fut le premier enseignant.

Actuellement, nous délivrons 100 heures en licence sur un programme de Géométrie affine et de Géométrie euclidienne. En maîtrise il y a plusieurs modules. L'un est de 50 heures sur la géométrie projective, les quadriques et coniques affines, l'inversion et le groupe circulaire ; un autre est de 100 heures sur la Géométrie algébrique ; et enfin un module de 50 heures porte sur la Géométrie différentielle.

Précisons que les filières mathématiques pures et mathématiques appliquées sont parfaitement différenciées et que les modules de Géométrie concernent la filière mathématiques pures. Les étudiants de la licence qui ne vont pas en maîtrise se destinent au CAPES. Environ 3/4 des étudiants de la maîtrise s'engagent dans l'Agrégation.

Pour chacun des concours CAPES et Agrégation, il y a un programme substantiel de **Géométrie** ; ainsi ce que nous proposons n'est que cohérent. Il semble

* Professeur à l'Université de Bordeaux I

que certaines Universités disposent d'un enseignement aussi important (même supérieur) mais d'autres ont quasiment repoussé l'enseignement de la Géométrie dans l'année de préparation au concours.

La situation est maintenant claire. Les Universités proposent des maquettes de programme de licence et maîtrise qui sont acceptées si elles sont raisonnables. Là, où la Géométrie est reléguée dans une soupente, c'est que l'Université l'a bien voulu. Certes, je suis un peu provocateur, et l'histoire explique bien des choses.

1.2. Les programmes universitaires à la fin des années 50.

A la fin des années 50, un élève de classe terminale (i.e. mathématiques élémentaires) recevait un enseignement conséquent de géométrie dont les points forts étaient puissance d'un point par rapport à un cercle, pôles et polaires par rapport à un cercle, l'inversion et les coniques. Enseignement, lui-même précédé dans les classes de seconde et de première de morceaux substantiels de **Géométrie**.

L'heureux élève qui pouvait intégrer une classe préparatoire recevait alors un enseignement de géométrie projective, superbe suite à la géométrie affine et euclidienne.

L'élève qui arrivait à l'Université avec plein de figures dans la tête allait devoir les abandonner pendant plusieurs années puisque **Géométrie** allait bien souvent se réduire à Géométrie analytique (au sens ancien du terme). La **Géométrie** allait commencer sa longue traversée du désert. A cette époque, on ne pouvait rien y faire, ou presque, les programmes étaient essentiellement nationaux.

1.3. Les ouvrages de Géométrie jusqu'en 1975.

Un tour d'horizon (nécessairement incomplet) sur les manuels de l'époque décrit assez bien le climat morose des années 60. En 1964 paraissent chez *Hermann* deux ouvrages sur la Géométrie : l'un de **G. Choquet** *Fondement de la géométrie*, l'autre de **J. Dieudonné** *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Le premier est un livre sévère, le second tient visiblement à traiter de l'algèbre linéaire et bilinéaire. N'oublions pas que paraît outre-atlantique en 1961 le remarquable livre de **Coxeter** *Introduction to geometry*. Vraisemblablement, l'ouvrage traduit en français de **Coxeter** et **Greitzer** *Redécouvrons la géométrie* (chez Dunod) est passé inaperçu en 1971. Arrive en 1973 le livre de **Frenkel** *Géométrie pour l'élève-professeur*, ouvrage qui tente avec un certain succès de réconcilier les anciens et les modernes :

"sans géométrie l'algèbre est aveugle ; sans celle-ci, celle-là est paralytique".

Malheureusement, c'est le moment où il doit déplorer que

"le programme des concours d'entrée aux grandes écoles vient justement d'être amputé des chapitres concernant les espaces projectifs et les quadriques, juste au moment où l'on était en mesure d'en parler correctement et efficacement ; ils auraient pu illustrer des chapitres d'algèbre, que l'on a coupé ainsi de certaines de leurs racines. Gribouille aussi a dû faire des choix".

Enfin 1975, arrive la *Géométrie* de **Berger**. Véritable coup de tonnerre dans les manuels universitaires, ce livre traite de la géométrie élémentaire et ose beaucoup de figures. De l'introduction de l'auteur relevons les deux alinéas suivants :

"Donner beaucoup d'importance à la vision, aux dessins, au côté "art plastique" de la Géométrie.

Ensuite pour chaque notion introduite, donner si possible un théorème fin, qui soit à la fois d'énoncé plaisant et simple et de démonstration cachée ou difficile".

Cet ouvrage est une véritable bible et l'Histoire montrera le bien immense qu'il aura fait pour l'enseignement de la **Géométrie** à l'Université.

1.4. Brève analyse sur le succès de Bordeaux.

Ainsi donc la *Géométrie* de **Berger** devenait une véritable caution : une certaine géométrie ne pouvait plus être qualifiée de poussiéreuse et de rétrograde. En revanche, cela pouvait difficilement servir de manuel à des étudiants de licence ou de maîtrise. Je pense que l'apparition en 1985, dans mon Université, d'un polycopié, suivant d'assez près le programme imposé, et enrichi de nombreux exercices était à la fois un support pour les étudiants et pour les enseignants candidats. Pour qu'un enseignement vive, il faut que des enseignants souhaitent l'assurer, plus ils seront nombreux, plus il vivra longtemps. Pour Bordeaux il y a environ 15 personnes qui ont participé à cet enseignement depuis sa création ; c'est certain, le polycopié existant a eu un effet sécurisant sur les enseignants, en revanche peu l'ont recopié.

Il faut à mon sens garder présent à l'esprit que la recherche en géométrie (algébrique, arithmétique, différentielle, analytique...) est une actualité plus que vivante. Tous les 4 ans le jury **Fields** (équivalent mathématique du prix Nobel) délivre (en général) 4 médailles. A chaque fois, il y a au moins un lauréat géomètre, à titre d'exemples je cite quelques noms : **Atiyah** (1966), **Grothendieck** (1966), **Hironaka** (1970), **Mumford** (1974), **Deligne** (1978), **Connes** (1982), **Faltings** (1986), **Drinfeld** (1990).

J'aimerais maintenant pour illustrer cela présenter quelques exemples de problèmes de géométrie algébrique ou arithmétique, soit résolus il y a peu, soit toujours ouverts.

2. Quelques aspects de la recherche en géométrie algébrique et arithmétique.

2.1. Intersection complète.

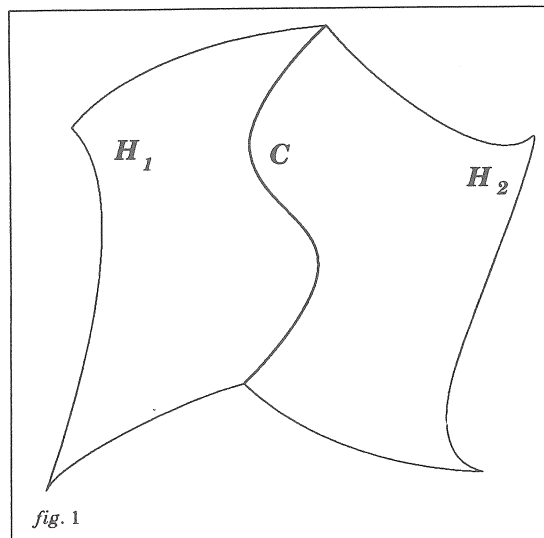
[Ha1] Hartshorne	Algebraic geometry p. 14
[Ha2] Hartshorne	Ample subvariety of algebraic varieties, LN 156 (1970)
[Ha3] Hartshorne	Complete intersections and connectedness, Am. J. of math. 84 (1962) 497-508
[K] Kneser	Ueber die Darstellung algebraischen Raumkurven als Durchschnitte von Flächen, Arch. der math. 11 (1960), p. 157-158

Enonçons de suite le problème.

2.1.1. Problème (*fig. 1*). Est-ce que toute courbe algébrique, irréductible $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{P}^3$, est une intersection complète ensembliste, i.e. est intersection de deux surfaces ?

Ce problème remonte à **Kronecker** (1823-1891), **Cayley** (1821-1895).

Précisons un peu la terminologie. Une courbe $\mathcal{C}$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ sur $\mathbb{C}$ (le corps des nombres complexes) est exactement la donnée d'un idéal premier, homogène $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3] := \mathbb{C}[X]$ tel que l'anneau $\frac{\mathbb{C}[X]}{\mathfrak{P}}$ soit de dimension 2.



Dire que $\mathfrak{P}$ est homogène signifie qu'il est engendré par des polynômes homogènes, dire qu'il est premier signifie que $\mathfrak{P} \neq \mathbb{C}[X]$ et que $UV \in \mathfrak{P}$ implique $U \in \mathfrak{P}$ ou $V \in \mathfrak{P}$. Enfin $\frac{\mathbb{C}[X]}{\mathfrak{P}}$ est de dimension 2 si $\text{Fr}(\frac{\mathbb{C}[X]}{\mathfrak{P}})$ (le corps des fractions de $\frac{\mathbb{C}[X]}{\mathfrak{P}}$) est algébrique sur $\mathbb{C}(Z, T)$, où $Z, T \in \text{Fr}(\frac{\mathbb{C}[X]}{\mathfrak{P}})$ et où $\mathbb{C}(Z, T)$ est isomorphe à un corps de fractions rationnelles à deux variables.

L'ensemble des points de la courbe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{C}$ est

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}) := \{x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid P(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ pour tout } P \in \mathfrak{P}\}.$$

Une surface $\mathcal{H}_i$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est la donnée d'un polynôme homogène $H_i \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ avec $H_i \neq 0$ et degré $H_i \geq 1$. De même $\mathcal{H}_i(\mathbb{C})$, l'ensemble des points sur $\mathbb{C}$ de la surface $\mathcal{H}_i$ est défini par

$$\mathcal{H}_i(\mathbb{C}) := \{x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid H_i(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Ainsi le problème a une réponse favorable pour la courbe irréductible $\mathcal{C}$, s'il existe deux surfaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ avec

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_1(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}_2(\mathbb{C}).$$

D'un point de vue purement algébrique ceci veut dire exactement qu'il existe $H_1, H_2 \in \mathfrak{P}$ et pour tout $P \in \mathfrak{P}$, il existe un entier $n_P \geq 1$ avec $P^{n_P} \in \mathbb{C}[X]H_1 + \mathbb{C}[X]H_2$.

2.1.2. Un résultat de type général est celui de **Kneser** ([K], 1960) affirmant que toute courbe irréductible de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est intersection (ensembliste) de trois surfaces.

2.1.3. La cubique gauche Γ_3 , c'est la courbe de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ paramétrée par

$$\Gamma_3(\mathbb{C}) := \{(tu^2 : t^2u : t^3 : u^3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid (t, u) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

L'idéal premier $\mathfrak{P}$ qui définit Γ_3 est celui des polynômes qui s'annulent sur $\Gamma_3(\mathbb{C})$, il est engendré par

$$A = X_0X_2 - X_1^2, B = X_2X_1 - X_0X_3, C = X_2^2 - X_1X_3.$$

Ici on peut montrer que $\Gamma_3(\mathbb{C})$ est l'intersection des surfaces définies par les polynômes $H_1 = X_1A + X_0B$ et $H_2 = C$.

2.1.4. La courbe Γ_4 , c'est la courbe paramétrée par

$$\Gamma_4(\mathbb{C}) := \{(tu^3 : t^3u : t^4 : u^4) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid (t, u) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

L'idéal $\mathfrak{P}$ qui définit Γ_4 est celui engendré par

$$X_0X_1 - X_2X_3, X_0^2X_2 - X_1^2X_3, X_0^4 - X_2X_3^3, X_1^4 - X_2^3X_3.$$

On ne sait pas si $\Gamma_4(\mathbb{C})$ est intersection de deux surfaces de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

2.1.5. On conjecture que le problème 2.1.1. a une réponse positive. Les résultats dans ce sens sont du type suivant. Soit $\mathcal{S}$ (fixé) une surface de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, $\mathcal{C}$ une courbe dessinée sur $\mathcal{S}$, alors il existe (ou non) une surface $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{C}(\mathbb{C}) = \mathcal{S}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{T}(\mathbb{C})$.

2.2. Points rationnels sur une courbe (problèmes diophantiens ; **Diophante d'Alexandrie** 250 après. J.C.)

[F] **Faltings** Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern Invent. Math. 73 (1983) p 349-366.

[F] **Faltings** version anglaise - Some historical notes - Finiteness Theorems of Abelian variety over number fields, in Arithmetic geometry ed. Cornell, Silverman Springer Verlag p. 1 - 27

[Ha] **Hartshorne** Algebraic geometry Springer Verlag 1977

[L] **Lang S.** Fundamentals of diophantine geometry Springer Verlag 1983

[W] **Weil A.** L'arithmétique sur les courbes algébriques Acta Math. 52 (1928) p 281-315

2.2.1. Variétés algébriques et problèmes diophantiens.

Une variété algébrique affine $\mathcal{X}$ est la donnée d'un nombre fini $P_1, P_2, \dots, P_s$ de polynômes de $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$, où K est un corps.

Une variété algébrique projective $\mathcal{Y}$ est la donnée d'un nombre fini $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ de polynômes homogènes de $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

Faire de la géométrie algébrique, c'est plutôt étudier la géométrie de

$$\mathcal{X}(\mathbb{C}) := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq s\}$$

ou

$$\mathcal{Y}(\mathbb{C}) := \{x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid Q_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq s\}.$$

Faire de la géométrie arithmétique, c'est plutôt étudier

$$\mathcal{X}(\mathbb{Q}) := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \mid P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq s\}$$

ou

$$\mathcal{Y}(\mathbb{Q}) := \{x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) \mid Q_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq s\}.$$

2.2.2. Classification des courbes algébriques projectives non singulières.

Une courbe algébrique affine (resp. projective) $\mathcal{C}$ sur un corps K est la donnée d'un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ (resp. d'un idéal premier homogène $\mathfrak{P}$ de $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$) tel que l'anneau $\frac{K[X_1, X_2, \dots, X_n]}{\mathfrak{P}}$ (resp. $\frac{K[X_0, X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{P}}$) soit de

dimension 1 (resp. 2) ; la notion de dimension est définie comme en 2.1.1. . Si $K \subset \mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{C}$ est non singulière si $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ l'est (en un sens traditionnel).

Le *genre* d'une courbe projective non singulière est un nombre entier qui conduit à une classification grossière, mais déjà très utile des courbes. En gros le genre mesure la difficulté de trouver des fonctions rationnelles avec des pôles prescrits (y compris la multiplicité).

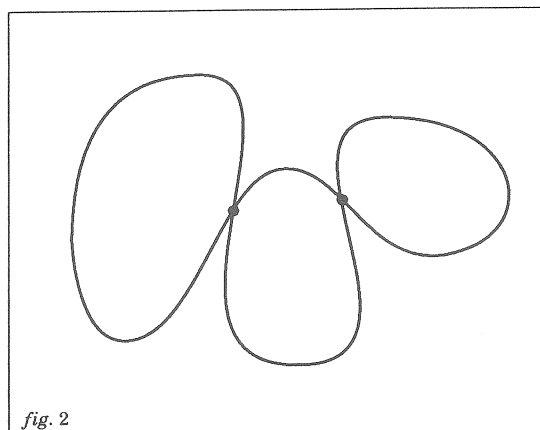
On peut donner quelques exemples.

Le *genre* 0, c'est la droite projective.

Le *genre* 1, ce sont les cubiques planes non singulières (i.e. les courbes planes non singulières définies par un polynôme homogène $P(X_0, X_1, X_2)$ de degré 3).

Le *genre* $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ peut être représenté par les courbes planes non singulières de degré d ; un exemple classique est celui de la courbe de **Fermat** définie par le polynôme $X_0^d + X_1^d + X_2^d$.

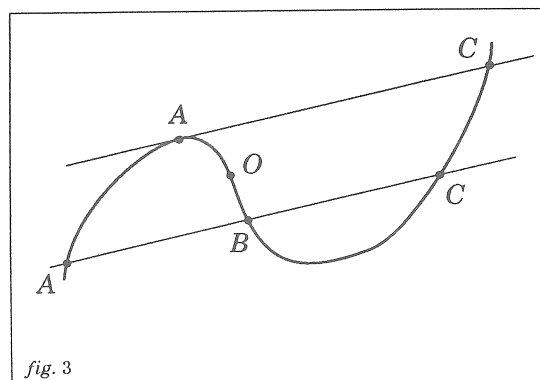
Une courbe plane (fig. 2) définie par un polynôme homogène de degré d dont les seules singularités sont k points doubles ordinaires donne naissance à une courbe de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - k$.



Le polynôme $y^2 - (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{2d+1})$ avec $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$, donne naissance à une courbe de genre d , appelée *hyperelliptique*.

2.2.3. Courbes elliptiques (cubiques planes non singulières).

Si $\mathcal{C}$ est une cubique plane non singulière, alors $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ possède neuf points d'inflexion. On a une loi de groupe (commutatif) sur $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ qui s'expriment géométriquement comme il suit (fig. 3). L'élément neutre est un point d'inflexion O . Si A, B, C sont alignés, on a $A + B + C = O$, si la droite passant par A et C est tangente en A à $\mathcal{C}$, on a $2A + C = O$. Si la droite passant par A coupe $\mathcal{C}$ en A seulement (i.e. A est un point d'inflexion), alors on a $3A = O$.



En plus l'application $m : \mathcal{C}(\mathbb{C}) \times \mathcal{C}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{C})$ définie par cette loi est un morphisme de variété algébrique, c'est pourquoi on dit que $\mathcal{C}$ est un *groupe algébrique* ; en plus il existe un réseau Λ de $\mathbb{C}$ et un isomorphisme de groupe $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ sur le groupe $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$.

Seules les cubiques planes non singulières parmi les courbes projectives non singulières peuvent être munies d'une loi de groupe algébrique.

La loi sur $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ induit sur $\mathcal{E}(\mathbb{Q})$ une loi de groupe. Le théorème de **Mordell-Weil** ([W]) dit que $\mathcal{E}(\mathbb{Q})$ est un groupe de type fini ; i.e. $\mathcal{E}(\mathbb{Q}) = T \times \mathbb{Z}^r$ où T est un groupe fini.

Pour la cubique définie par $X_0^3 + X_1^3 - X_2^3$, on a $T = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$, $r=0$; pour $X_1^2 X_3 + X_1 X_3^2 - X_0^3 - X_0 X_3^2$, on a $T = \{0\}$, $r=1$, le point $(0:0:1)$ est un générateur de $\mathcal{E}(\mathbb{Q})$, si $(0:1:0)$ est l'élément neutre de $\mathcal{E}(\mathbb{Q})$ ([H], p 335).

2.2.4. Points rationnels sur une courbe algébrique.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective non singulière (sur $\mathbb{Q}$). Si $\text{genre}(\mathcal{C})=0$, on a $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ est en bijection avec $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Si $\text{genre}(\mathcal{C})=1$, alors $\mathcal{C}$ est une cubique plane et $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ peut être infini, c'est le cas du dernier exemple de 2.2.3. Si $\text{genre}(\mathcal{C}) \geq 2$, alors le théorème de **Faltings** ([F]) (ex-conjecture de **Mordell**) dit que $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ est fini.

En particulier l'équation $x_0^n + x_1^n = x_2^n$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{Q}$ pour $n \geq 3$; mais ce n'est pas encore la conjecture de Fermat qui affirmerait que les seules solutions sont celles obtenues avec $x_0=0$ ou $x_1=0$ ou éventuellement $x_2=0$.

2.3. Empilement de sphères et courbes elliptiques.

- [C-S] **Conway Sloane** Sphere packings, Lattices and groups Springer Verlag
 [E] **Elkies** On Mordell-Weil lattices, Arbeitstagung Bonn (1990)
 [Oe] **Oesterlé J.** Empilement de sphères, Séminaire Bourbaki 1989-90, n° 727
 [S] **Shioda** Mordell-Weil lattices and sphere packings, Am. J. Math. 113 (1991) p 931-948

2.3.1. Empilement et densité.

Soient E un espace euclidien de dimension n , un *empilement de sphères de E* est une famille $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ de boules de même rayon, d'intérieurs mutuellement dis-joints (i.e. deux boules de la famille sont au mieux tangentes).

Lorsque la limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{[\text{vol}(\bigcup_{i \in I} S_i \cap B(0, R))]}{\text{vol}(B(0, R))}$$

existe, elle s'appelle la *densité de l'empilement $\mathcal{S}$* et se note $\delta(\mathcal{S})$ (ici $B(0, R)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R).

Un réseau L de E (i.e. un sous-groupe $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n$ où $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E) définit un empilement de sphères dont les centres sont les points du réseau L et dont le rayon commun est $r = \min_{\ell \in L - \{0\}} \|\ell\|$. Dans ce cas on a une densité d'empilement

$$d(L) = \frac{\text{vol}(B(O, R))}{v} = \frac{b_n r^n}{v}$$

où r est le rayon commun des boules, v est le volume de E modulo L et

$b_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$ est le volume de la boule unité de E . On dit par abus de langage que

$d(L)$ est la *densité du réseau* L .

Deux questions fondamentales concernant les empilements de sphères de l'espace euclidien de dimension n sont :

a) Quelle est la densité maximale δ_n d'un empilement de sphères dans E ?

b) Quelle est la densité maximale d_n d'un empilement d'un réseau de E ?

On a bien entendu $d_n \leq \delta_n \leq 1$.

Pour $n=2$ (fig. 4), on a

$$\delta_2 = d_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,9068,$$

c'est le réseau hexagonal.

Pour $n=3$, on a $d_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, l'empilement est celui suivant lequel les épiciers empilent les oranges.

On ne connaît la densité maximale δ_n des empilements de sphères en dimension n pour aucun $n \geq 3$. Par exemple pour $n=3$, on ne connaît aucun empilement de sphères plus dense que celui de l'épicier.

En revanche on connaît des empilements de sphères qui ne sont pas associés à un réseau et dont la densité est d_3 .

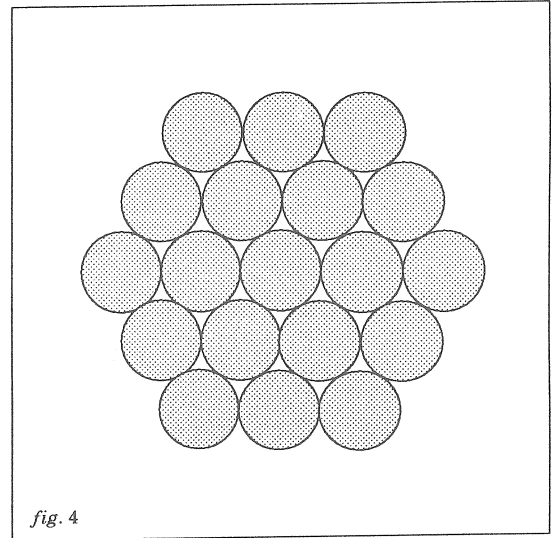


fig. 4

2.3.2. Courbes elliptiques et réseaux d'Elkies et Shioda.

Nous sommes donc à la recherche de réseaux de l'espace euclidien qui donneraient des densités meilleures que celles connues. Il est étonnant de constater qu'on a pu obtenir de tels exemples en considérant des courbes elliptiques définies sur un corps de caractéristique $p > 0$, i.e. quelque chose qui est aussi éloigné que possible de la situation euclidienne !

Décrivons sommairement la situation. Soit K un corps global en caractéristique $p > 0$, i.e. K est une extension algébrique finie sur $\mathbb{F}_q(Z)$, le corps des fractions rationnelles à une variable sur le corps fini à q éléments (où $q = p^\alpha$). Soient $\mathcal{E}$ une courbe elliptique sur K , i.e. une cubique plane non singulière définie par un polynôme à coefficients dans K , $\mathcal{E}(K)$ le groupe des points de $\mathcal{E}$ sur K défini comme en 2.2.3. Ici encore, $\mathcal{E}(K)$ est un groupe (abélien) de type fini (c'est le théorème de **Mordell-Weil**), i.e. $\mathcal{E}(K) = T \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_r$, où T est le sous-groupe de torsion de $\mathcal{E}(K)$ et noté $\mathcal{E}(K)_{tors}$. Alors il existe une application $h : \mathcal{E}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ (appelée hauteur de **Néron-Tate**) qui est nulle sur $\mathcal{E}(K)_{tors}$ et qui induit sur

$L := \frac{\mathcal{E}(K)}{\mathcal{E}(K)_{tors}}$ une forme quadratique définie positive ; ainsi donc L peut être considéré comme un réseau d'un espace vectoriel euclidien, L est appelé *réseau de Mordell-Weil*.

Pour calculer la densité d'empilement associé à L , il convient de déterminer

- i) Le rang r de $L = \frac{\mathcal{E}(K)}{\mathcal{E}(K)_{tors}}$,
- ii) le nombre $m(L) := \inf_{\ell \in L - \{0\}} (\ell | \ell) = 2 \inf_{P \in \mathcal{E}(K) - \mathcal{E}(K)_{tors}} h(P)$ (où $(. | .)$ est le produit scalaire de E),
- iii) le discriminant de L .

C'est donc avec quelques exemples bien choisis de courbes elliptiques $\mathcal{E}$ et de corps K que **Elkies** et **Shioda** ont pu construire des réseaux plus denses que ceux connus auparavant ([Oe] p. 17).

2.4. Configuration de Sylvester-Gallai.

[C-F-G] Croft H.T., Falconer K.J., Guy R.K. Unsolved problems in geometry, Springer Verlag 1991

[H] Hirzebruch F. Arrangements of lines and algebraic surfaces, Arithmetic and geometry ed.

Artin Tate Progress in math. vol. 36 (1983) p. 113-140

[K] Kelly L.M. A resolution of the Sylvester-Gallai problem of J.-P. Serre, Discrete Comput. Geom. 1 (1986) p 101-104

[M] Motzkin T.S. The lines and planes connecting the point of a finite set, Trans.Am. Math. Soc. 70 (1951) p. 451-464

[S] Serre J.-P. Problem 5.359., Am. math. Monthly 73 (1966) p. 89

2.4.1. Définition des configurations de Sylvester-Gallai

Soient E un espace projectif, ou affine sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$ un ensemble fini de k points de E . On appelle *droite de $\mathcal{X}$* , toute droite D de E telle que $\text{card}(D \cap \mathcal{X}) \geq 2$.

Une partie finie $\mathcal{X}$ de E est dite *configuration de Sylvester-Gallai* si toute droite D de la configuration rencontre $\mathcal{X}$ en au moins 3 points.

2.4.2. Toute configuration de Sylvester-Gallai d'un $\mathbb{R}$ -espace affine est contenue dans une droite (fig. 5).

La démonstration est particulièrement simple. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini d'un $\mathbb{R}$ -espace affine E que l'on peut munir d'une structure euclidienne ; supposons que la variété engendrée par $\mathcal{X}$ soit de dimension ≥ 2 .

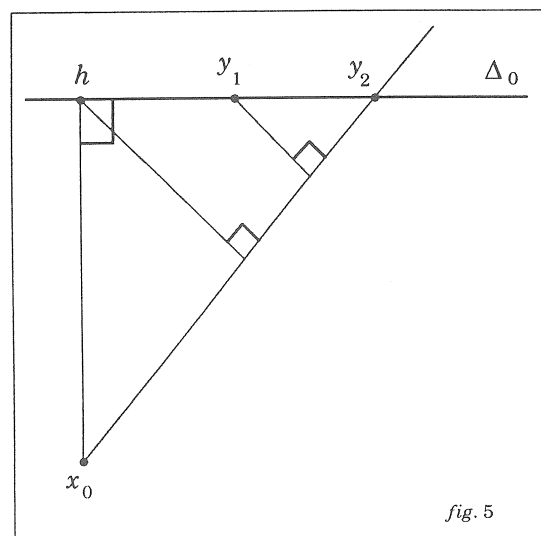


fig. 5

Soit $\mathcal{A} := \{(x, \Delta) \mid x \in \mathcal{X}, \Delta \text{ est une droite de } \mathcal{X} \text{ avec } x \notin \Delta\}$, soit (x_0, Δ_0) tel que $\text{dist}(x_0, \Delta_0) = \min_{(x, \Delta) \in \mathcal{A}} \text{dist}(x, \Delta)$. Alors $\text{card } \Delta_0 \cap \mathcal{X} = 2$. En effet, si Δ_0 contenait au moins 3 points, il existerait $(y_1, y_2) \in (\Delta_0)^2$, d'un même côté par rapport au pied h de la projection orthogonale de x_0 sur Δ_0 . Si $\|h - y_1\| < \|h - y_2\|$, on a $(y_1, V(x_0, y_2)) \in \mathcal{A}$ et $\text{dist}(y_1, V(x_0, y_2)) < \text{dist}(x_0, \Delta_0)$. C'est impossible.

2.4.3. Deux configurations de Sylvester-Gallai à 9 points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

2.4.3.1. Avec le triangle et Ménélaüs. Soient $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$ le groupe des racines cubiques de l'unité de $\mathbb{C}^\times$, $A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$ trois points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$,
 $\mathcal{X} = \{(-\xi:1:0), (0:-\xi:1), (1:0:-\xi) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \xi \in \mathbb{U}_3\}$.

Ces 9 points sont situés sur les côtés du triangle (A, B, C) et la version projective du classique théorème de Ménélaüs montre que toute droite qui passe par un point de $V(A, B) \cap \mathcal{X}$ et un point de $V(B, C) \cap \mathcal{X}$ passe alors par un point de $V(C, A) \cap \mathcal{X}$. Il suit facilement que toute droite de $\mathcal{X}$ contient exactement 3 points de $\mathcal{X}$ et que $\mathcal{X}$ possède 12 droites.

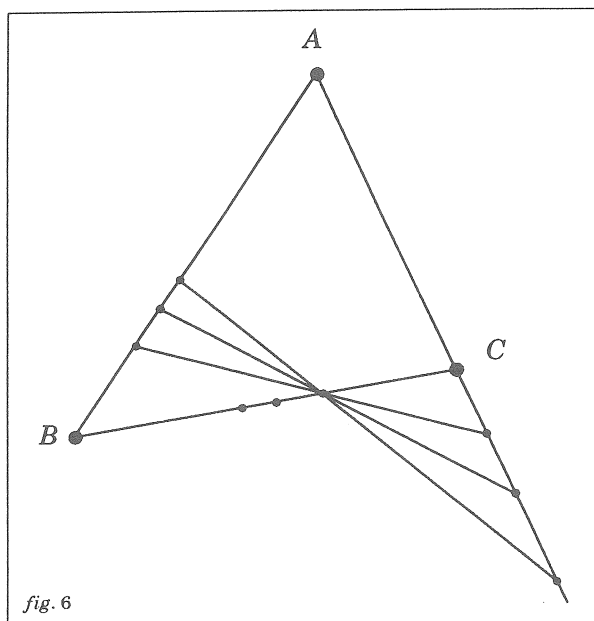


fig. 6

2.4.3.2. Avec les points d'inflexions d'une cubique plane. On peut facilement montrer qu'une cubique plane non singulière $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ possède un ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{C})[3]$ constitué des 9 points d'inflexion.

Selon la loi de groupe définie en 2.2.3., si O , l'un de ces points d'inflexion désigne l'élément neutre de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$, on a $A \in \mathcal{E}(\mathbb{C})[3]$ si et seulement si $3A = O$. Soient $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{C})[3]$, $A \neq B$, alors la droite $V(A, B)$ coupe $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ en un point $C \in \mathcal{E}(\mathbb{C})[3]$ et $C \notin \{A, B\}$. En effet on a $A + B + C = O$ et donc $3C = O$, i.e. $C \in \mathcal{E}(\mathbb{C})[3]$. Supposons que $A = C$, par exemple, alors $2A + B = O$ et comme $3A = O$, on aurait $A = B$, c'est impossible. Ainsi donc $\mathcal{E}(\mathbb{C})[3]$ est une configuration de Sylvester-Gallai à 9 points dans laquelle toute droite contient exactement 3 points.

2.4.3.3. En fait on peut montrer qu'il y a unicité, à homographie près de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, de la configuration de Sylvester-Gallai de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, à 9 points, dans laquelle toute droite possède exactement 3 points.

2.4.4. Une configuration de Sylvester-Gallai de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ à $3n$ points.

Soient $\mathbb{U}_n = \{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{2\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{(n-1)\frac{2i\pi}{n}}\}$ le groupe des racines n -ième de l'unité de $\mathbb{C}^\times$, $\mathcal{X} = \{(-\xi:1:0), (0:-\xi:1), (1:0:-\xi)\} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \xi \in \mathbb{U}_n\}$. De même qu'en 2.4.3.1. le théorème de Ménélaüs montre que $\mathcal{X}$ est une configuration de Sylvester-Gallai avec $3n$ points, n^2 droites possédant 3 points et 3 droites possédant n points.

2.4.5. Sous-groupes finis de $PG\ell_2(\mathbb{C})$ et configuration de Sylvester-Gallai.

Soient $G \subset PG\ell_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini, $u, v \in G$ avec $o(u) = o(v) = 2$ et $u \neq v$; alors $u, v \in G$ ont des droites stables distinctes. Facilement u, v, uvu^{-1} sont distincts et les droites d'invariant se coupent en un point. Ainsi on obtient une configuration finie de droites telle que tout point commun à deux droites l'est au moins à une troisième; c'est donc le dual d'une configuration de Sylvester-Gallai.

Ainsi le groupe $G_{168} \simeq PSL_2(\mathbb{F}_7) \subset PG\ell_2(\mathbb{C})$ donne naissance à une configuration de Sylvester-Gallai à 21 points, 28 droites à 3 points, 21 droites à 4 points. Le groupe $G_{360} \simeq \mathfrak{A}_6 \subset PG\ell_2(\mathbb{C})$ donne naissance à une configuration de Sylvester-Gallai à 45 points avec 120 droites à 3 points, 45 droites à 4 points, 36 droites à 5 points.

2.4.6. Toute configuration de Sylvester-Gallai de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est contenue dans un plan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. C'est un résultat de Kelly ([K], 1986). En plus, pour toute configuration de Sylvester-Gallai de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui n'est pas contenue dans une droite, il existe une droite avec exactement 3 points.

3. En conclusion, la discipline **Géométrie** est plus vivante que jamais, il est du devoir de chaque Université de dispenser en licence (resp. maîtrise) un tel enseignement à l'intention des étudiants qui se destineront au CAPES (resp. à l'Agrégation); n'oublions pas que les 2/3 (si ce n'est plus) des étudiants qui suivent les filières de mathématiques pures deviendront professeurs de lycées ou collèges. Pour chacun d'eux la **Géométrie** sera une discipline qu'il devra maîtriser au même titre que les autres.

Militer pour un enseignement décent de **Géométrie** dans son Université, c'est une question d'honnêteté vis-à-vis de ses étudiants.