Problèmes Anciens et Mathématiques Actuelles

Le problème de Délos et les nombres constructibles

R. Couty*

I - LEGENDE ET HISTOIRE

I.1. La légende de Délos

"En ce temps là ..., vers le IVème siècle avant J.C., au cœur des cyclades sacrées, à Délos, patrie d'Apollon, sévissait la peste...". L'oracle consulté déclara que le Dieu voulait que l'on double l'autel cubique qui lui était consacré. On doubla donc le côté, mais la peste ne s'arrêta pas... L'oracle de nouveau consulté fit comprendre qu'il s'agissait d'un volume double. Si donc, la longueur du côté de l'autel primitif est prise pour unité il s'agit de déterminer (avec la règle et le compas) une longueur dont le cube sera égal à 2.

Bien embarrassés les Déliens se seraient adressés à Platon et aux géomètres de son académie. Il est fait état de deux réponses. Platon, dans l'une aurait répliqué que le Dieu ne s'intéressait pas tellement à son autel mais qu'il voulait faire honte aux grecs par ce qu'ils négligeaient les mathématiques et méprisaient la géométrie. Dans une autre réponse il aurait renvoyé les Déliens à Eudoxe de Cnide et à Helicon de Cyzique pour une solution du problème, qui à partir de là sera connu sous le nom de "problème de Délos" ou en termes plus mathématiques : problème de la duplication du cube.

Cette légende est rapportée dans une lettre d'Eratosthène au roi d'Egypte Ptolèmée III Evergète "le bienfaiteur" qui l'avait persuadé de venir d'Athènes à Alexandrie pour être le précepteur de son fils (IIème siècle avant J.C.).

En fait, on n'a pas la lettre d'Eratosthène mais une relation faite par Eutocius d'Ascalon du VIème siècle après J.C. dans un commentaire sur les cylindres et sphères d'Archimède.

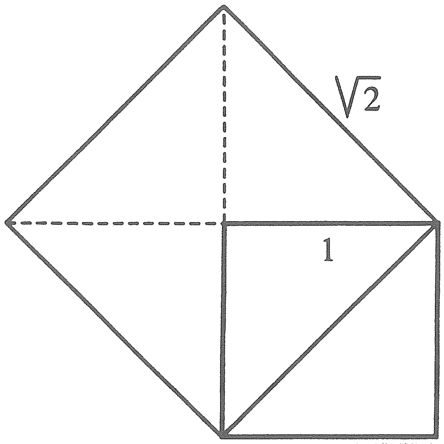
I.2. La duplication du carré et l'irrationnel

En réalité le problème de la duplication du cube est plus ancien puisque la relation d'Eutocius commence par l'histoire où un ancien poète tragique inconnu représente Minos voulant doubler la tombe de Glaucus (roi légendaire de Corinthe), double ses dimensions. On sait aussi qu'Hippocrate de Chios s'était occupé de cette question au Vème siècle avant J.C.

En fait, la question a dû se poser de manière assez naturelle puisqu'on connaissait bien la duplication du carré. On sait que dans le Menon, Platon montre Socrate faisant découvrir cette construction à son jeune esclave.

---

* Professeur à la Faculté des Sciences de LIMOGES



On peut se demander pourquoi les constructions uniquement à la règle et au compas.

Il y a évidemment l'idéaliste Platon qui se méfiait des instruments imparfaits incapables de représenter les figures idéales de la géométrie et n'admettait que la règle et le compas comme étant les moins imparfaits.

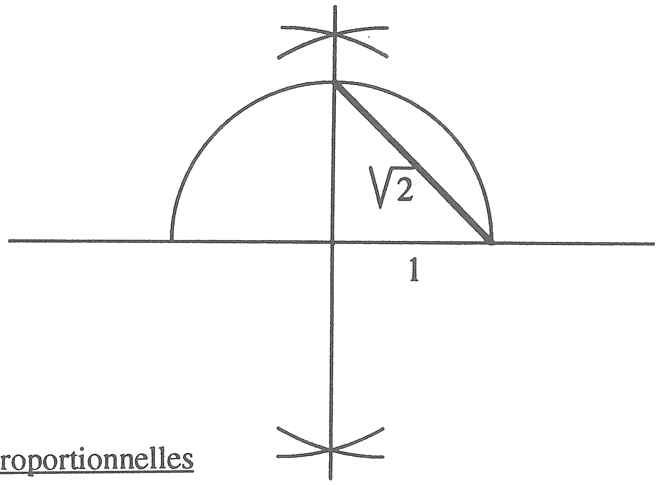
Mais on peut penser à une raison plus profonde provenant de la véritable crise déclenchée par l'apparition de l'irrationnel à la suite du théorème de Pythagore.

Les Pythagoriciens connaissaient bien les nombres rationnels et ont cru que l'on pourrait ainsi mesurer tous les segments ; mais, le théorème de Pythagore fait apparaître une longueur (un nombre) dont le carré est égal à 2, et il n'existe pas de rationnel dont le carré soit égal à 2.

Cette découverte évidemment bouleversa toutes les conceptions antérieures. Un texte du philosophe néo-platonicien Proclus (Constantinople 412 après J.C. Athènes 483) donne une idée de l'impression faite sur les grecs par la découverte de l'irrationnel.

"... L'homme qui le premier fit sortir du mystère la considération de l'irrationnel pour le livrer au grand jour de la publicité périt, dit on, dans un naufrage. Ceci est arrivé parce que l'inexprimable, l'informel aurait dû toujours rester caché. C'est pourquoi l'auteur de ce forfait, pour avoir révélé cette image de la vie au contact de laquelle le hasard l'avait amené, fut transplanté au lieu originel où il demeure à jamais balloté par le flot éternel".

Il fallut bien accepter ces nouveaux "nombres" ; cependant on constate que l'inexprimable $\sqrt{2}$ peut se construire à la règle et au compas.



Donc, pour la duplication du cube on va chercher à construire $\sqrt[3]{2}$ avec la règle et le compas.

I.3. Hippocrate de Chios et les moyennes proportionnelles

Les premières recherches qui nous ont été rapportées sont celles d'Hippocrate de Chios qui vivait au Vème siècle avant J.C.. Par ses essais d'organisation systématique des mathématiques il apparaît comme un authentique précurseur d'Euclide.

Il constate que le problème de la duplication du carré est résolu si on sait trouver une moyenne proportionnelle entre deux nombres données a et b $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab$ et si $a = 1$, $b = 2$ alors $x^2 = 2$

En ce qui concerne la duplication du cube, à défaut d'une solution, il montre que l'on saura résoudre le problème si on sait résoudre le problème qui dans le langage de l'époque s'exprime de la façon suivante : insérer deux moyennes proportionnelles x et y entre deux nombres donnés a et b. C'est à dire, étant donné deux nombres a et b trouver deux nombres x et y tels que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ on en déduit $x^2 = ay$, $y^2 = bx$ d'où $x^3 = a^2 b$ et si $a = 1$ et $b = 2$ $x^3 = 2$

Evidemment Eratosthène dit qu'Hippocrate ne fait que remplacer un problème difficile par un autre tout aussi difficile

II - LES SOLUTIONS GRECQUES

II.1. Principe des solutions

Les mathématiciens grecs qui se sont intéressés au problème ont constaté qu'ils ne parvenaient pas à le résoudre tel qu'il était posé, construction à la règle et au compas ; ceci tout simplement parce que c'est impossible. Contrairement à ce qui se passe pour \R(2), le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible, on verra pourquoi ; mais cela les grecs ne pouvaient pas le savoir.

Constatant que leurs efforts étaient infructueux, que leur restait-il ? tout simplement ne pas tenir compte des interdits de Platon et utiliser d'autres courbes que la droite et le cercle, ce qui peut fournir une résolution graphique ou une résolution mécanique. Dans le cas d'une résolution graphique les courbes utilisées sont tracées point par point à la règle et au compas.., on peut obtenir un nombre de points aussi grand que l'on veut, mais ce nombre étant toujours fini les courbes sont ensuite complétées d'une manière approchée par continuité.

Dans le cas d'une résolution mécanique, les courbes considérées sont tracées de façon continue par un système mécanique approprié. Le texte d'Eutocius est précieux car il donne une liste des solutions proposées, on y relève en particulier les noms suivants : Archytas, Eudoxe, Menechme, Platon, Eratosthène, Nicomède, Dioclès ...

Nous allons analyser certaines de ces solutions en les exprimant en langage actuel.

II.2. Les coniques de Menechme

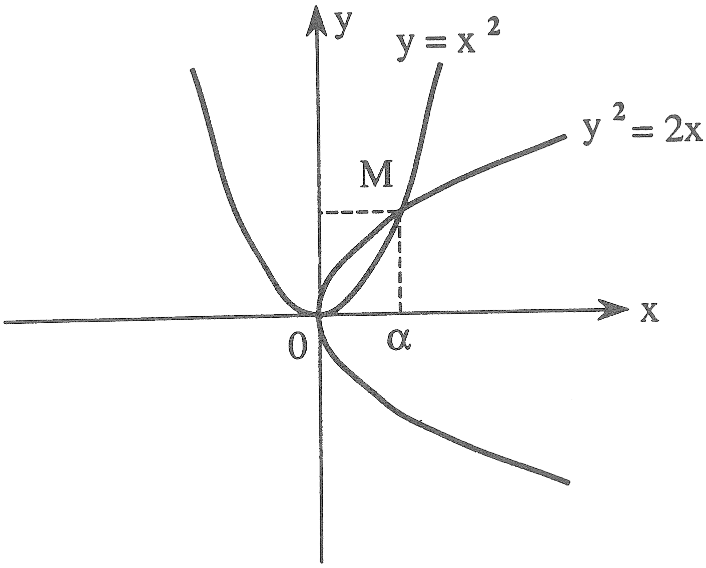
Menechme (Proconèse 375 avant J.C. - 325), élève d'Eudoxe et de Platon. Il semble que ce soit lui qui ait introduit pour la première fois les coniques comme sections planes des cônes. Elles sont étudiées dans le traité d'Appolonius (IIIème siècle avant J.C.). La terminologie ellipse, hyperbole, parabole est d'Appolonius, auparavant on parlait des triades de Menechme.

Si on reprend le problème des deux moyennes proportionnelles d'Hippocrate : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, dans un système d'axes de coordonnées (Ox, Oy), l'utilisation de deux des courbes d'équations $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, $xy = ab$ fournira la solution.

Menechme propose donc deux solutions.

Dans la première, il utilise une parabole et une hyperbole (première et troisième courbe).

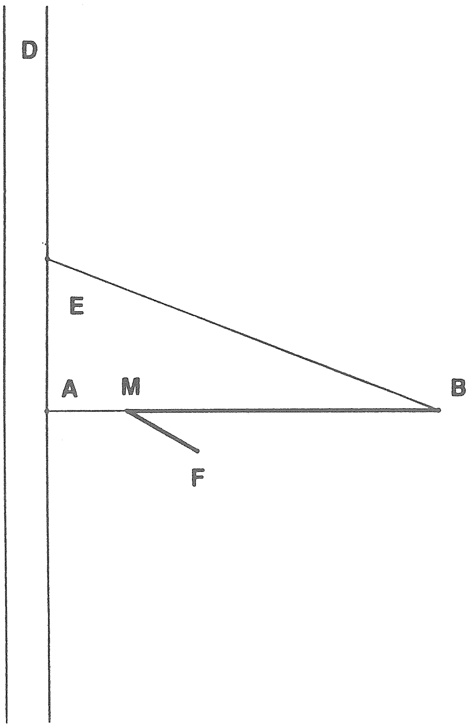
Pour la deuxième solution il utilise deux paraboles.
En particulier pour $a = 1$ et $b = 2$, on considère l'intersection des deux paraboles $y = x^2$, $y^2 = 2x$

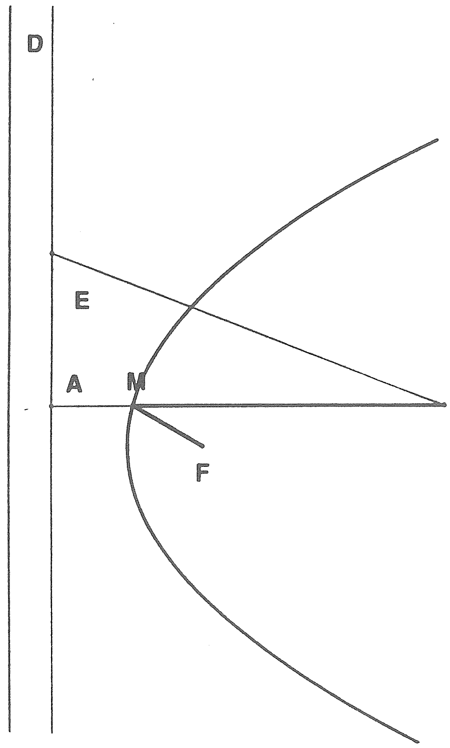


L'abscisse α du point commun M, autre que O, vérifie $\alpha^4 = 2\alpha$, donc $\alpha^3 = 2$. Ces deux paraboles peuvent être tracées point par point à la règle et au compas.

On peut aussi utiliser un système mécanique permettant le tracé continu de la parabole. La propriété Foyer-Directrice que Menechme ne devait pas connaître donne le procédé classique :

D : directrice F : Foyer E : équerre glissant le long de la directrice.
Fil fixé en F et B de longueur AB ; alors MF = MA

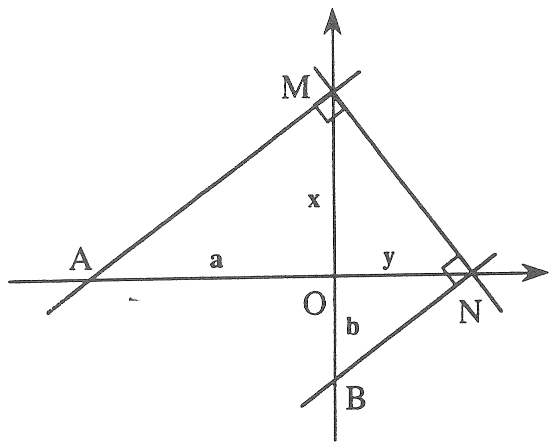




II.3. Solution attribuée à Platon

C'est la première solution indiquée dans le texte d'Eutocius, mais il y a des raisons de penser qu'elle est faussement attribuée à Platon. D'une part Plutarque dit que Platon répondit aux Déliens que le problème des deux moyennes proportionnelles n'était pas facile mais que

Eudoxe ou Helicon de Cyzique le résoudraient pour eux, il ne proposa pas de s'en charger lui-même.D'autre part, on donne une solution mécanique et l'on connaît le peu de goût de Platon pour de telles solutions. Il est probable que cette solution a été inventée à l'Académie Platonicienne et ensuite attribuée à Platon lui-même.



Rappelons qu'étant donné a et b il s'agit de trouver x et y tels que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Considérons la figure ci-contre on porte OA = a , OB = b longueurs données et supposons que les longueurs cherchées soient portées suivant OM = x et ON = y.

On a $x^2 = a\,y$ c'est à dire :

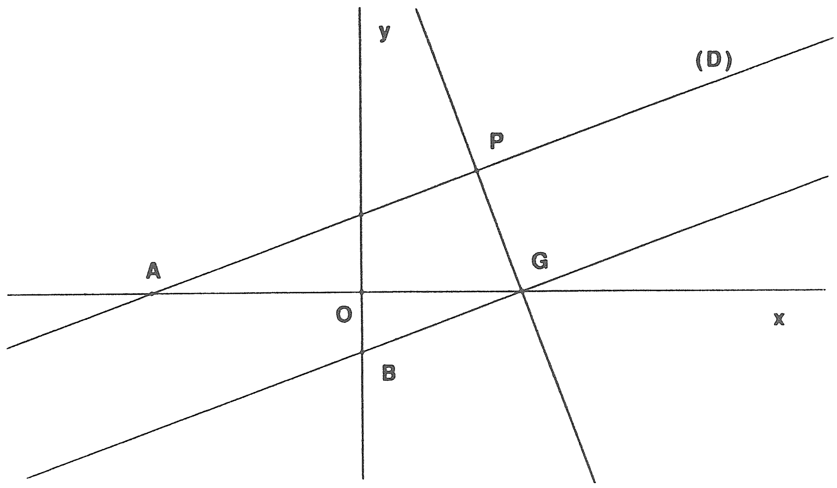
$\overline{OM}^2 = OA.ON$

c'est à dire que le triangle AMN est rectangle en M.

De même $y^2 = bx$: $\overline{ON}^2 = OM.OB$, c'est à dire que le triangle BNM est rectangle en N.

Le problème est donc le suivant : étant donné OA et OB disposés comme sur la figure, construire
le reste de la figure de façon que les angles en M et N soient droits.

On peut considérer une droite variable (D) passant par A. On mène par B la parallèle à cette droite qui coupe (Ox) en G et de G on mène la perpendiculaire à (D) qui la rencontre en P. Le point P décrit une courbe ($\mathcal{C}$) qui peut être construite point par point ; et l'intersection de $\mathcal{C}$ avec (Oy) donne le point M cherché.



Analytiquement, dans le système d'axes (Ox, Oy) on a :

équation de (D) : $y = m\,(x + a)$ (1) équation de (BG) : $y + b = mx$

point G : $y = 0$ $x = \frac{b}{m}$ droite (GP) : $y = -\frac{1}{m}\,(x - \frac{b}{m})$

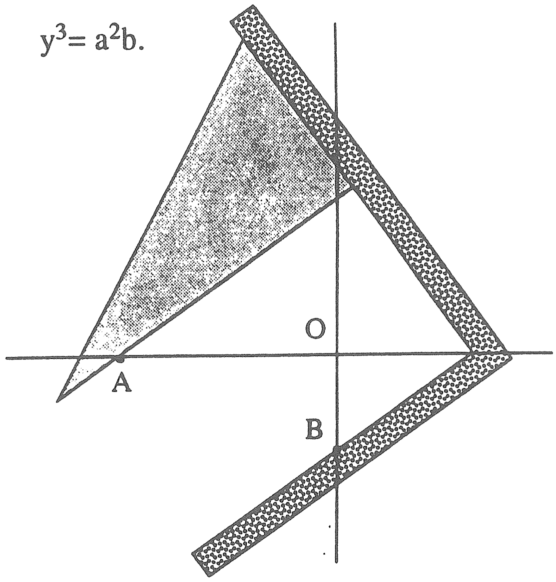
ou $m^2 y = b - mx$ (2). En éliminant m entre (1) et (2) on a l'équation de la courbe décrite par P :

$$\frac{y^3}{(x+a)^2} = b - \frac{xy}{x+a} \quad \Leftrightarrow \quad y^3 + xy\,(a+x) = b\,(a+x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y\,(x^2 + y^2) + axy - b\,(a+x)^2 = 0$$

c'est une cubique circulaire ; son intersection avec (Oy) est le point de coordonnées (x , y) telles que

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y^3 = a^2 b.$$



solution mécanique

Pour la solution mécanique, l'instrument utilisé est un angle droit rigide FGH et une équerre FKL. FK glisse le long de GF , et KL reste constamment parallèle à GH.

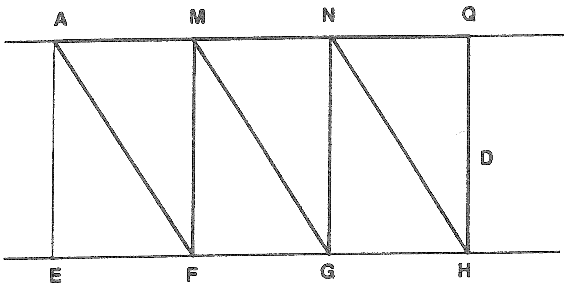
On place l'angle rigide FGH de sorte que GH passe par B et on le tourne jusqu'à ce que le point G soit situé sur la droite (AO).

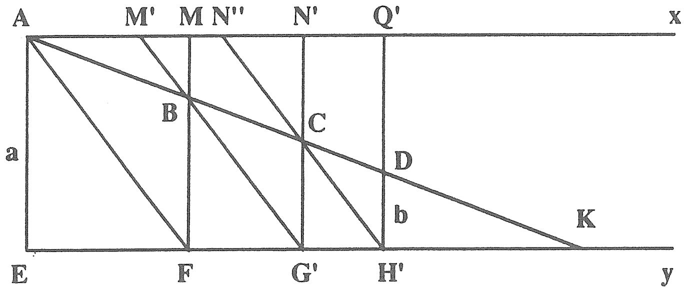
Ensuite, on fait glisser KL qui reste toujours parallèle à GH jusqu'à ce que KL passe par A

Si le point K n'est pas sur la droite BO, l'ensemble doit être de nouveau déplacé jusqu'à ce que le point se trouve effectivement sur la droite BO. On doit prendre soin, pendant tout le mouvement que KL et HG passent par A et B respectivement et que le point G se déplace sur AO.

II.4. Solution d'Eratosthène

C'est encore une solution mécanique effectuée au moyen de trois figures planes (triangles rectangles ou rectangles qui peuvent se déplacer parallèlement (en se recouvrant partiellement) entre deux règles parallèles.





On part de la figure (1) (AE = a, DH = b) et on déplace les triangles MNG , NQH jusqu'à ce qu'ils prennent les postions M'G'N' et N''H'Q' de façon que les points B et C où M'G' et G'N' rencontrent respectivement MF et G'N' soient alignés avec A et D.

Appelons K le point de rencontre de ABCD avec EY , on a :

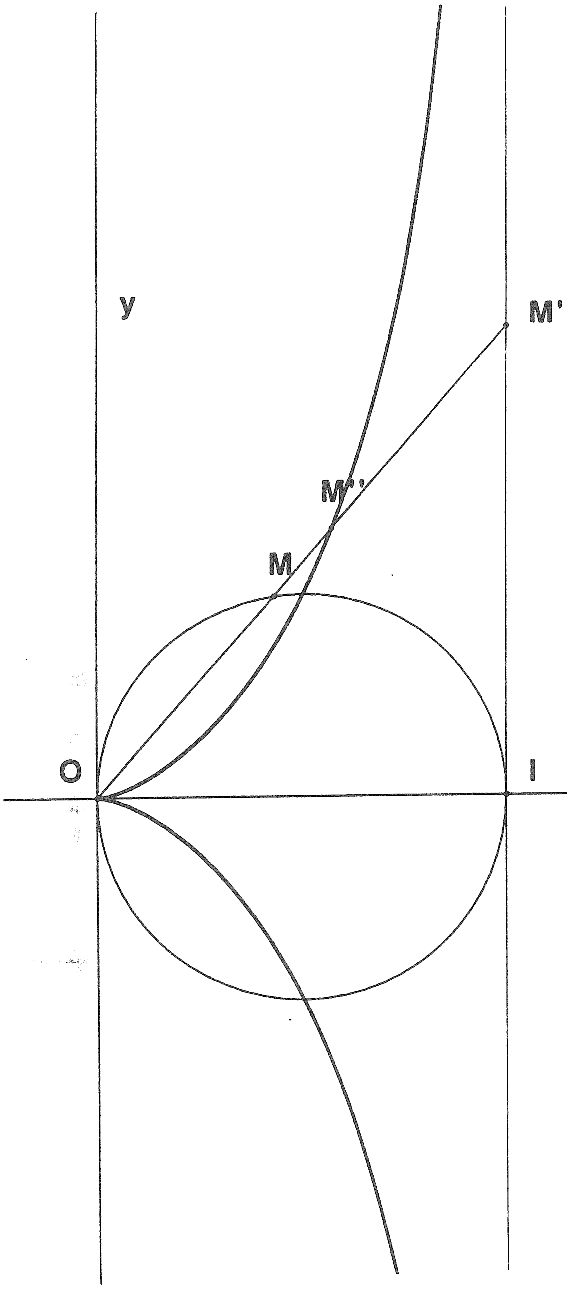
$$\frac{AE}{BF} = \frac{EK}{KF} = \frac{AK}{KB} = \frac{KF}{KG'} = \frac{BF}{CG'} \quad \text{donc} \quad \frac{AE}{BF} = \frac{BF}{CG'}$$

$$\text{mais} \quad \frac{BF}{CG'} = \frac{BK}{CK} = \frac{KG'}{KH'} = \frac{CG'}{DH'} \quad \text{d'où} \quad \frac{AE}{BF} = \frac{BF}{CG'} = \frac{CG'}{DH'}$$

avec AE = a , DH' = b on trouve donc les longueurs cherchées en BF = x et CG' = y

II.5. La cissoïde de Dioclès

D'autres recherches n'utilisent pas le fait que le problème se ramène à la découverte des deux moyennes proportionnelles.



Au IIème siècle avant J.C. Dioclès introduit une courbe qui lui permet de résoudre graphiquement le problème. Newton (1641 - 1727) donne un procédé permettant le tracé mécanique de cette courbe.

M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de diamètre OI, la droite OM rencontre Δ en M'. La cissoïde est la courbe décrite par le point M" défini par $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{MM'}$.

Cette courbe est évidemment constructible point par point avec la règle et le compas.

Dans le système de coordonnées polaires d'origine O et d'axe Ox le cercle $(\mathcal{C})$ a pour équation

$\rho = \cos\theta$ et la droite Δ , $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

L'équation polaire de la cissoïde $\mathcal{D}$ est donc

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad \text{d'où} \quad \rho\cos\theta = \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

son équation cartesienne est : $x = \dfrac{\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$, ce qui donne

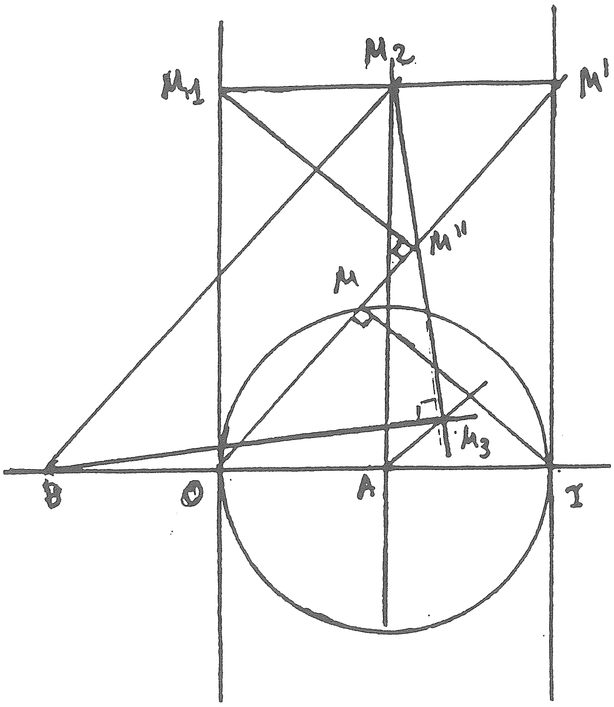
$$x(x^2+y^2) - y^2 = 0$$

Considérons le point U de l'axe (Oy) d'ordonnée 2, la droite (IU) a pour équation $y = 2(1-x)$, elle coupe la cissoïde $\mathcal{D}$ en un point V dont les coordonnées (x_0, y_0) vérifient

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 2(1-x_0) \\ x_0(x_0^2+y_0^2) - y_0^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y_0 = 2(1-x_0) \\ y_0^2\,(1-x_0) = x_0^3 \end{array}\right\} \Rightarrow y_0^3 = 2x_0^3 \Rightarrow y_0 = \sqrt[3]{2}\,x_0$$

La droite (OV) a donc pour équation $y = \sqrt[3]{2}\,x$; elle rencontre la droite (Δ) au point W d'ordonnée $\sqrt[3]{2}$. On obtient ainsi une résolution graphique de la duplication du cube.

Construction mécanique de la cissoïde (Newton 1642 - 1727)



$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{MM'}$ $\quad OI = 1$

Soit M_1 le quatrième sommet du rectangle construit sur OIM'.

Considérons les triangles IMM' et $M_1M''O$

$\hat{O} = \hat{M'}$, $IM' = OM_1$, $OM'' = MM'$ donc les deux triangles sont isométriques alors $\hat{M''} = 1$ Droit

Soit M_2 le milieu de $[M_1 M']$; puisque le triangle $M_1 M'' M'$ est rectangle en M", on a :

$$M'' M_2 = \frac{M_1 M'}{2} = \frac{1}{2}.$$

Soit B le symétrique de A par rapport à O , $BOM'M_2$ est un parallélogramme.

La parallèle à (BM_2) passant par A rencontre $(M_2 M'')$ en M_3.

D'après le théorème de Thalès, O étant le milieu de [BA], M" est le milieu de $[M_2 M_3]$ on a donc

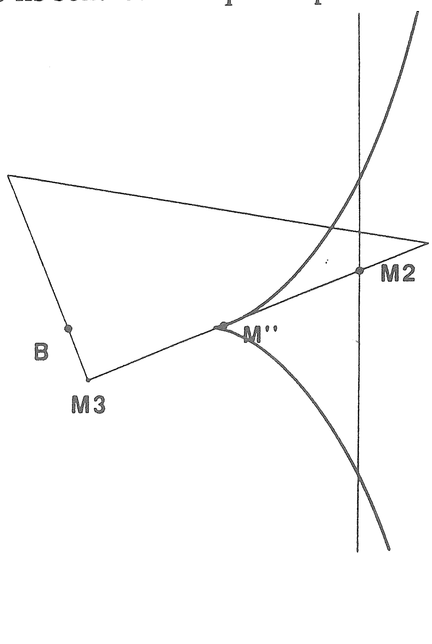
$$M''M_2 = M''M_3. = \frac{1}{2}.$$

D'où $M_2 M_3 = 1$. Le trapèze $BOM''M_2$ étant isocèle, les angles en B et M_2 sont égaux.

Comparons maintenant les triangles BAM_2 et BM_3M_2 on a :

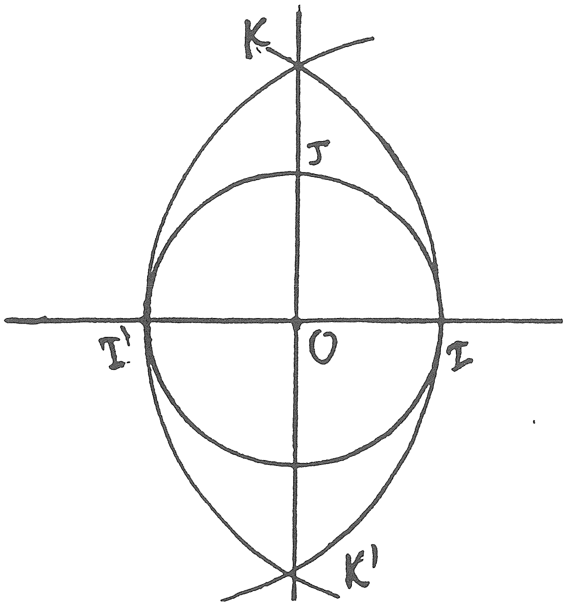
Côté BM_2 commun, $BA = M_2M_3$, $\hat{B} = \hat{M_2}$ donc ils sont isométriques et par suite l'angle $\hat{M_3}$ est droit.

D'où le système imaginé par Newton pour la construction mécanique de la cissoïde : sur le côté d'une équerre de sommet M_3 , on a une pointe traçante M" et unepointe sèche M_2 avec $M_3 M'' = M'' \ M_2$. B est un point fixe du plan . Lorsque M_2 décrit la droite D , le deuxième côté de l'équerre passant par B, le point M" décrit la cissoïde $\mathcal{D}$.



III - LE CORPS DES NOMBRES CONSTRUCTIBLES

III.1. Eléments constructibles



On part de l'ensemble $\mathcal{B}$ réduit à deux points O et I

On dira "élément constructible" pour élément constructible à la règle et au compas à partir de $\mathcal{B}$.

On a O et I d'où la droite OI,

Cercle de centre O et de rayon OI $\rightarrow$ I'

$\left.\begin{array}{l}\text{Cercle de centre I' et de rayon I'I} \\ \text{Cercle de centre I et de rayon I'I}\end{array}\right\}$

$\rightarrow$ K et K'

d'où droite OK perpendiculaire à OI, et le point J. On en déduit le repère orthonormé défini par $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

Définition : Un nombre réel est dit constructible s'il est une des coordonnées dans le repère (O, I, J) d'un point constructible.

Exemple : $\sqrt{3}$ est constructible, en effet le cercle (I', I'I) a pour équation $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ et le point K est le point $x = 0, y = \sqrt{3}$.

III.2. Le corps des nombres constructibles

Théorème L'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Démonstration

1) $\mathcal{C}$ est un sous corps de $\mathbb{R}$

On sait déjà que 0 et 1 sont dans $\mathcal{C}$.

On doit donc montrer a) $u \in \mathcal{C} \Rightarrow -u \in \mathcal{C}$

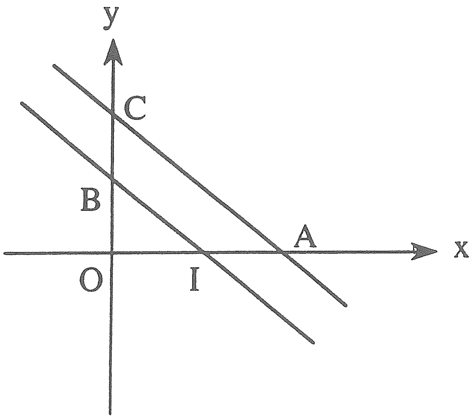
b) $[u \in \mathcal{C} \text{ et } v \in \mathcal{C}] \Rightarrow u + v \in \mathcal{C}$ c) $[u \in \mathcal{C} \text{ et } v \in \mathcal{C}] \Rightarrow uv \in \mathcal{C}$

d) $[u \in \mathcal{C} \text{ et } u \neq 0] \Rightarrow \frac{1}{u} \in \mathcal{C}$

a) Si A est le point de l'axe ox d'abscisse u , en utilisant le cercle de centre O passant par A on construit le point A' d'abscisse - u

b) Si $\overline{OA} = u$, on construit le cercle de centre A et de rayon [v] soit B son intersection avec ox on a $\overline{OB} = u + v$

c) soit $u \in \mathcal{C}, v \in \mathcal{C}$. Si $uv = 0$ on a évidemment $uv \in \mathcal{C}$



supposons alors $uv \neq 0$. Soit I tel que $\overline{OI} = 1$

A tel que $\overline{OA} = u$, B tel que $\overline{OB} = v$

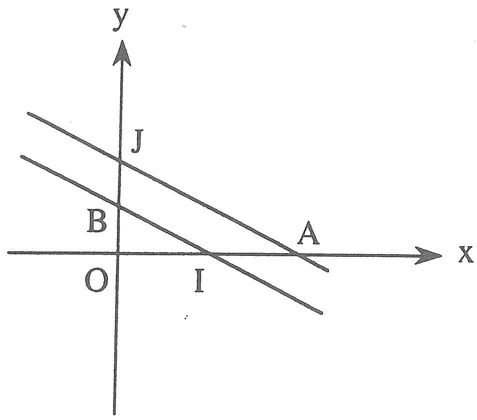
On construit la droite (IB) et la parallèle à (IB) passant par A on a :

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} \text{ d'où } \overline{OC} = u \,.\, v$$

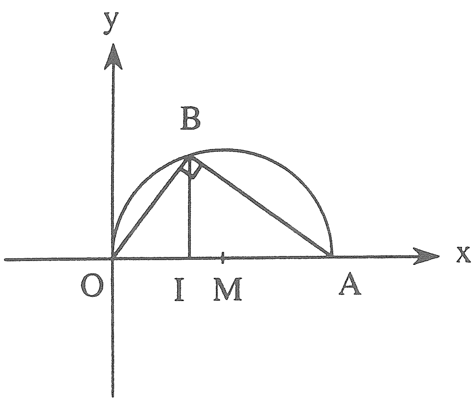
d)

Soit $\overline{OI} = 1, \overline{OJ} = 1$, A tel que $\overline{OA} = u$ $(u \neq 0)$ On construit la droite (AJ), puis la parallèle à (AJ) passant par I ce qui donne le point B.

$$\text{On a :} \frac{\overline{OB}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}} \text{ d'où } \overline{OB} = \frac{1}{u}$$



2) <u>$\mathcal{C}$ est stable par racine carrée</u> C'est à dire que si $u \in \mathcal{C}$, $u \geq o$ alors $\sqrt{u} \in \mathcal{C}$.



Soit I tel que $\overline{OI} = 1$ et A tel que $\overline{IA} = u$.
On construit le cercle de diamètre OA, la perpendiculaire en I à (OA) le rencontre en B.

On a $\overline{IB}^2 = OI \,.\, IA$

donc $\overline{IB}^2 = u$, $IB = \sqrt{u}$

<u>Exemple</u> : $\sqrt{2}$ est constructible, $\sqrt[4]{2}$ est constructible.

On sait d'autre part que $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$. En effet soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$; puisque K est un sous-corps de $\mathbb{R}$, on a $1 \in$ K ; K étant stable pour l'addition on en déduit $\mathbb{N} \subset$ K , K étant stable pour l'opposé on a

$\mathbb{Z} \subset K$, K est stable pour l'inverse donc $\frac{1}{q} \in K$, et il est stable pour le produit, donc $\frac{p}{q} \in K$ on en déduit bien $\mathbb{Q} \subset K$.

Alors si $\mathcal{C}$. désigne le corps des nombres constructibles on a

$$\underline{\mathbb{Q} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{R}}$$

III.3. Caractérisation des nombres constructibles

Rappel : Si K et L sont des sous-corps de $\mathbb{R}$ avec $K \subset L$, on peut considérer L comme un espace vectoriel sur K, si cet espace vectoriel est de dimension finie, on note sa dimension par $[L : K]$. Si on a trois corps K, L, M, avec $K \subset L \subset M \subset \mathbb{R}$, on a : $[M : K] = [M : L] . [L : K]$.

En particulier, si $K \subset \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \notin K$, on note K (a) le plus petit corps contenant K et a
(c'est à dire l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant à la fois K et a)

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on voit facilement que c'est l'ensemble des nombres réels de la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$ avec α et β rationnels.

Si le nombre réel a , n'appartient pas à K, il est possible qu'il soit racine d'un polynôme à coefficients dans K (exemple $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel mais est racine du polynôme $x^2 - 2$ dont les coefficients sont rationnels). On dit alors que a est algébrique sur K. Evidemment si a est racine d'un polynôme P à coefficients dans K, ce polynôme n'est pas unique, car a est aussi racine de tout polynôme de la forme SP, où S est un polynôme quelconque à coefficients dans K. Mais, si a est algébrique sur K et si on impose au polynôme P tel que $P(a) = 0$ les conditions suivantes :

1°) P est irréductible, c'est à dire n'est pas décomposable en un produit de polynômes degré inférieur.

2°) P est unitaire, c'est à dire que le coefficient de son monôme de plus haut degré est l'unité ; alors P est unique il est appelé polynôme minimal de a et si n est le degré de ce polynôme, n est appelé le degré de a sur K. Dans ces conditions n est aussi la dimension sur K de l'espace vectoriel K (a). Tout élément de K (a) peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha_1 + \alpha_2 a + \dots + \alpha_{n-1} a^{n-1} \text{ avec } \alpha_1 \in K, \dots \alpha_{n-1} \in K$$

THEOREME DE WANTZEL (1837)

Soit $a \in \mathbb{R}$; a est constructible si, et seulement si, il existe un entier $p \geq 1$ et une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$: $L_1, L_2, \dots L_p$ tels que $L_1 = \mathbb{Q}$, $L_i \subset L_{i+1}$, $[L_{i+1} : L_j] = 2$ et $a \in L_p$.

Corollaire Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.

Application à $\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, puisque racine du polynôme $X^3 - 2$ qui est son polynôme minimal. En effet, si ce polynôme était décomposable, un des facteurs de la décomposition serait du premier degré et le polynôme $X^3 - 2$ aurait une racine rationnelle ce qui n'est pas le cas. Alors $\sqrt[3]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et de degré 3 ; donc, d'après le corollaire ci-dessus, il n'est pas constructible.

IV - DEMONSTRATION DU THEOREME DE WANTZEL

Soit $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ le repère orthonormé du plan P construit à partir des points de base O et I.
Soit A, B, C trois points du plan P dont les coordonnées dans le repère (O, I, J) sont respectivement (a_1, a_2) ; (b_1, b_2) ; (c_1, c_2) ; en écrivant les équations, on remarque que la droite D passant par les points distincts A et B a une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α, β, γ appartiennent à $\mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1)$, de même le cercle de centre A et de rayon BC a une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ où α, β, γ appartiennent à $\mathbb{Q}(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$

Soit alors a un nombre constructible, a est l'abscisse d'un point constructible M de l'axe ox

Soit $M_1, M_2, \dots M_n = M$ la suite de points successivement construits pour obtenir le point M
$(M_1 = 0, M_2 = I, \dots)$.

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, notons (x_i, y_i) les coordonnées du point M_i dans le repère (O, I, J).
On a : $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 0$,....., $x_n = a$, $y_n = 0$.

Posons $K_1 = \mathbb{Q}(x_1, y_1) = \mathbb{Q}$

$$K_2 = \mathbb{Q}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \mathbb{Q}$$

$$K_i = \mathbb{Q}(x_1, y_1, \dots, x_i, y_i)$$

. ...

.

$$K_n = \mathbb{Q}(x_1, y_1 \dots\dots\dots, x_n, y_n)$$

On a évidemment $K_1 \subset K_2 \subset \dots\dots\dots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \dots \subset K_n$.

$K_1 = K_2 = \mathbb{Q}$, $a = x_n \in K_n$.

On va montrer que pour tout $i = 1, 2, \dots n - 1$; deux cas seulement sont possibles :
ou bien $K_{i+1} = K_i$

ou bien $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

Pour $i = 1$, le résultat est évident car $K_1 = K_2$. Supposons maintenant $i \geq 2$. Ayant obtenu les points $M_1, M_2 \ldots M_i$, pour le point M_{i+1} trois cas sont possibles.

1°) M_{i+1} est l'intersection de deux droites ; 2°) M_{i+1} est l'intersection d'une droite et d'un cercle ; 3°) M_{i+1} est l'intersection de deux cercles (cercles et droites construits à partir des points $M_1 \ldots M_i$), le 3ème cas se ramène au 2ème.

En écrivant les équations de ces cercles et droites dont les coefficients appartiennent à $K_i = \mathbb{Q}(x_1, y_1, \ldots x_i, y_i)$, on voit que c'est seulement dans le 2ème cas que l'on aura à considérer une équation du second degré, donc dans ce cas on pourra avoir $[K_{i+1} : K_i] = 2$; autrement on aura
$K_{i+1} = K_i$.

A partir de cette suite K_i on pourra construire une suite strictement croissante, en supprimant tout corps égal au précédent. On obtient ainsi une suite de corps $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p$ avec $L_1 = \mathbb{Q}$, $a \in L_p$ et $[L_{i+1} : L_i] = 2$

Réciproquement, supposons que l'on ait une telle suite de sous-corps de $\mathbb{R}$, nous allons montrer que tous ces sous-corps sont contenus dans $\mathcal{C}$, corps des nombres constructibles, ce qui montre bien que a est constructible.

On a :

$L_1 = \mathbb{Q} \subset \mathcal{C}$, supposons $L_i \subset \mathcal{C}$, montrons qu'il en est de même pour L_{i+1}. Soit x un élément quelconque de L_{i+1} ; la famille $1, x, x^2$ n'est pas une famille libre dans l'espace vectoriel L_{i+1} sur L_i car
$[L_{i+1} : L_i] = 2$, il existe donc α, β, γ dans L_i non tous nuls tels que $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Si $\alpha = 0$ on a $x = -\dfrac{\gamma}{\beta} \in L_i \subset \mathcal{C}$ Si $\alpha \neq 0$ on a alors $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, donc $x \in \mathcal{C}$ (puisque $\mathcal{C}$ est stable par racine carrée).

Démonstration du Corollaire

Si $a \in \mathbb{R}$ est constructible, il existe une suite de sous corps de $\mathbb{R}$: $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_p$ telle que
$L_1 = \mathbb{Q}$, $a \in L_p$ $[L_{i+1} : L_i] = 2$.

On a d'autre part : $[L_p : \mathbb{Q}] = [L_p : L_{p-1}] \cdot [L_{p-1} : L_{p-2}] \ldots [L_2 : \mathbb{Q}] = 2^{p-1}$.

On a aussi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a) \subset L_p$ d'où $2^{p-1} = [L_p : \mathbb{Q}(a)] \cdot [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$. Il en résulte que $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$.

est un diviseur de 2^{p-1}, c'est donc une puissance de 2 que nous noterons 2^q.

Considérons maintenant la famille $1, a\ a^2, ..., a^{2^q}$; c'est une famille à 2^q+1 éléments, elle est donc liée dans le $\mathbb{Q}$ espace vectoriel $\mathbb{Q}(a)$; donc, il existe des éléments $\alpha_0, \alpha_1, \ ,$ α_{2^q} dans $\mathbb{Q}$ tels que

$\alpha_0 + \alpha_1 a + ... + \alpha_{2^q} a^{2^q} = 0$, ce qui montre que a est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et que le degré de a sur $\mathbb{Q}$ est $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2^q$.

V - BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Emile ARTIN	*Galois Theory*	University of Notre Dame
J.C. CARREGA :	*Théorie des corps* *La règle et le compas*	Hermann
Egmont COLERUS :	*de Pythagore à Hilbert*	Flammarion
Sous la direction de R. TATON	*Histoire générale des Sciences* *Tome I : La Science antique et médievale*	Presses Universitaires de France
Sir Thomas HEATH	*History Of Greek Mathematics* *(Vol. I, Vol. II)*	Dover Publications New-York