Des grandeurs aux nombres rationnels

N. Rouche*

Il est rare de nos jours que l'on manie des grandeurs pour effectuer une mesure : on se contente de consulter des cadrans. Par ailleurs les grandeurs, si importantes chez Euclide, ont, au XXème siècle, disparu des mathématiques et quasiment disparu de l'enseignement. Or c'est la mesure des grandeurs qui, historiquement, a donné naissance aux nombres autres que naturels. Il est donc intéressant de regarder comment, par quelles méthodes diverses, on a enseigné les nombres depuis que les grandeurs se sont estompées.

C'est ce que nous faisons ci-après[1], d'ailleurs sans prétention d'épuiser le sujet. Ce regard critique débouchera sur la question : sachant comment on a enseigné les nombres dans le passé, comment pourrait-on faire à l'avenir ?

Commençons par une histoire belge !

(d'après Philippe Galuck)

1. L'évolution historique des mesures

Depuis que l'homme existe, il perçoit et cherche à exprimer des quantités. Il n'a pas cessé au cours des siècles de créer des moyens de plus en plus commodes, rapides et précis pour mesurer les grandeurs. Jetons un coup d'oeil sur cette évolution millénaire.

Les distances autrefois comptées en heures ou journées de marche sont aujourd'hui fournies automatiquement et directement dans le langage des chiffres par les compteurs kilométriques des automobiles.

L'homme a d'abord mesuré l'écoulement du temps à la hauteur du soleil dans le ciel. Il reconnaissait aussi les saisons au défilé des constellations du zodiaque. Ensuite il a inventé les cadrans solaires : le soleil, source première des divisions du temps, précisait son message sur les heures et les saisons par le truchement de l'ombre d'un bâton. Avec les clepsydres et les sabliers, l'homme a recouru à des mouvements artificiels pour mesurer le temps. Ensuite, il a inventé les horloges mécaniques, bientôt pourvues d'un balancier, puis les horloges à quartz avec encore un cadran à aiguille et enfin les montres digitales. On perçoit l'évolution globale

---

* Département de Mathématiques, Louvain-la-Neuve, Belgique.

[1] Cet exposé explicite et complète certains développements de N. Rouche, *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier-Hatier, Bruxelles, 1992.

qui va d'un contact direct avec "la source principale du temps" (les mouvements du soleil), en passant par les cadrans à aiguilles qui, comme les astres, tournent d'un mouvement uniforme, jusqu'aux montres digitales qui exhibent de purs symboles.

Naguère encore la balance à fléau et le peson exhibaient les lois des leviers, tandis que la balance à ressort, tenue à la main, donnait à la fois la sensation du poids et la connaissance de son action sur le ressort. Les balances digitales d'aujourd'hui ne fournissent que des chiffres. Et même, en donnant directement le prix d'une marchandise achetée, elles évitent à l'utilisateur la fatigue d'un problème de proportionnalité.

De même les mesures de capacités se font aujourd'hui sans qu'on ait à se servir des récipients-unités qui en donnaient une perception directe. Et l'essence d'auto se mesure autant sinon davantage en francs qu'en litres.

Ainsi les manipulations de base des grandeurs (comparaisons, sommes, fractionnements, ...) sont progressivement éliminées de la vie quotidienne. Chaque mesure est, comme le dit R. Bkouche[2], réduite "à la seule opération de lecture d'un nombre sur un cadran". En liaison avec les progrès de la technologie, plus les hommes utilisent des mesures et moins ils ont à exécuter des opérations de mesures.

2. Les grandeurs ont disparu des mathématiques

Si nous considérons maintenant l'histoire des mathématiques, nous y voyons en quelque sorte les nombres prendre la place des grandeurs. Jetons un regard sur cette évolution, elle aussi millénaire.

La théorie des grandeurs du Vème Livre d'Euclide, un des piliers principaux des mathématiques grecques, a été enseignée jusque tard dans le XXème siècle, dans le cadre de la géométrie d'Euclide. Il n'y était question ni d'unités de mesure, ni de nombres (hormis les naturels) susceptibles d'exprimer la mesure d'une grandeur dans une unité donnée.

A côté de cette théorie des grandeurs s'est élaboré au cours des siècles un système de nombres de plus en plus satisfaisant, aboutissant à notre corps des réels. Cette construction des nombres s'est appuyée essentiellement sur la mesure des grandeurs, comme suffit sans doute à en témoigner ce que dit Cauchy au début de son Cours d'Analyse[3] : "Nous prendrons toujours la dénomination de nombres dans le sens où on l'emploie en arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue [non munie d'un signe] des grandeurs."

Mais la construction de l'édifice des nombres s'est renversée dans la seconde moitié du XXème siècle. A cette époque, pour donner aux réels un fondement logique ferme, on a largué leurs amarres historiques à la mesure des grandeurs pour les rattacher à la seule théorie des nombres naturels (puis plus tard, à travers ceux-ci, à la théorie des ensembles).

Ainsi les nombres réels, nés au cours des siècles de la géométrie et de la physique des grandeurs, ne leur devaient dorénavant plus rien. Et non seulement ils avaient conquis leur autonomie, mais encore, à travers la structure d'espace vectoriel, ils ont plus tard servi à (re)fonder la géométrie[4] . Dans ce cadre nouveau, le corps des nombres est construit avant même qu'on aborde la géométrie. Les premiers objets à mesurer, par exemple les segments sur un axe, sont en quelque sorte mesurés d'avance. Toute la problématique de la mesure, issue des difficultés de manipulation des grandeurs les plus concrètes, a proprement disparu, et les grandeurs se sont évanouies des mathématiques.

Bien entendu, elles n'ont pas en même temps disparu de la physique, dont elles sont le matériau même. Ainsi au cours de la première moitié du XXème siècle, les mathématiques se

2 Voir la préface, par R. Bkouche, de l'ouvrage cité à la note 1.

3 A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, Debure, Paris, 1821, (rééd. J. Gabay 1989).

4 Il faut considérer comme située un peu à part de ce courant général "l'algèbre géométrique" de Artin, qui effectivement part de la géométrie (mais non des grandeurs...) pour aboutir aux nombres, et non l'inverse. Cf. E. Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

sont éloignées de la physique dans la mesure sans doute où elles avaient rompu leur très ancien ancrage dans les grandeurs pour en établir un nouveau dans la théorie abstraite des ensembles[5].

3. Les grandeurs dans l'enseignement aujourd'hui

Voyons maintenant comment cette évolution s'est répercutée dans l'enseignement.

Au niveau secondaire tout d'abord, là où les enseignements de mathématiques et de physique sont le plus souvent séparés[6], la situation est en gros la suivante. Les grandeurs sont traitées en physique. C'est là que l'on affronte l'impossibilité d'un rapport entre deux grandeurs d'espèces différentes, les systèmes d'unités, la possibilité d'un rapport entre les mesures de deux grandeurs d'espèces différentes et la conceptualisation par ce biais de nouvelles grandeurs (vitesse, densité,...), les formules complexes associant toutes sortes de grandeurs et la théorie des "équations aux dimensions".

Toutes ces choses sont par contre ignorées dans le cours de mathématiques. Dans celui-ci, un mouvement est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la vitesse est la dérivée.

Quelle difficulté y aurait-il à considérer le rapport d'un espace à un temps, puisque de toutes façons espace et temps sont d'avance de même nature : ce sont deux nombres réels ? Il reste à ce stade comme une trace de la difficulté primitive à mettre en rapport une distance et un temps dans la remarque (éventuelle) que le graphe position-temps doit être interprété en géométrie affine et non métrique.

Beaucoup d'enseignants de mathématiques sont embarrassés lorsqu'ils butent sur un symbole de grandeur[7] tel que kg ou m (pour mètre). Ces choses ne sont pas prévues dans la théorie et ils ne savent qu'en faire. Nombre d'entre eux ont d'ailleurs une répugnance pour la physique[8]. Mais ce n'est pas ici le lieu d'analyser plus en détail les raisons du véritable divorce entre les enseignements de mathématiques et physique à l'école secondaire.

La situation est différente à l'école primaire. Là, l'apprentissage des mathématiques est tellement proche de ses sources dans le monde familier qu'un divorce consommé entre physique et mathématique y est impossible. Ce que l'on constate en gros, mais qui mériterait une confirmation attentive,

- c'est que l'apprentissage des grandeurs à l'écart des nombres et donc avant toute idée de mesure est assez peu développé ;
- que beaucoup de phénomènes qui ont vocation de conduire à la construction des fractions et des rationnels sont ignorés dans l'enseignement[9] ;
- que les mesures d'aires et de volumes débouchent trop vite sur des formules, au détriment d'une construction des idées de mesure correspondantes ;

---

5 Si la divergence des mathématiques et de la physique s'est effectivement accentuée au début du XXème siècle, il n'y a toutefois jamais eu de vrai divorce : il suffit pour s'en convaincre d'évoquer les contributions de H. Weyl à la théorie de la relativité et de J. von Neumann à la théorie quantique.

6 Une notable exception : dans la pédagogie Decroly, qui n'a malheureusement pas fait école, les enseignements de mathématiques et de sciences ne sont pas séparés.

7 Il est intéressant de savoir que S. Banach, ayant à faire un enseignement de mécanique rationnelle, n'a pas négligé de donner un traitement soigné des unités et équations aux dimensions : voir S. Banach, *Mechanics*, Nakladem Polskiego Towarzystwa Makematycznego z Subuencji Ministerstwa Szkol Wyszzych i Nauki, Varsovie, 1951. On trouvera une explication du traitement des symboles d'unités dans H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973, pp.204-205.

8 Cf. H. Freudenthal, op. cit. : "The pure mathematician of course, detest concrete numbers and leaves them ungrudgingly to the mercy of the physicist."

9 H. Freudenthal émet l'hypothèse que si beaucoup d'élèves ne comprennent pas les fractions, c'est parce qu'elles sont abordées d'une seule façon, c'est-à-dire à partir d'un seul modèle, alors qu'elles plongent des racines multiples dans la réalité et la pensée commune. Voir H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983; p.134.

- et enfin que sous le titre de *grandeurs* ne se retrouve dans le programme qu'une nomenclature du système décimal des poids et mesures, accompagnée de nombreux exercices de changement d'unités.

Au total donc, l'enseignement semble bien ne pas accorder beaucoup d'attention à la genèse de l'idée de mesure, liée à l'apprentissage des nombres.

4. Quelques propositions d'enseignement au XXème siècle

La situation que nous venons de décrire au triple niveau de la vie quotidienne, de la science mathématique et de l'enseignement pose au moins deux questions.

1) Comment amener les enfants d'aujourd'hui, qui bien entendu auront accès aux chiffres et aux nombres d'une manière ou d'une autre, à comprendre le sens des résultats de mesures, à savoir les décoder et les utiliser ?

2) Plus généralement, les manipulations de base des grandeurs ayant constitué pour les hommes d'autrefois le contexte intuitif dans lequel les grandes structures numériques prenaient racine, comment faut-il organiser l'apprentissage des mesures et des nombres pour les enfants d'aujourd'hui, compte tenu des évolutions respectives des mathématiques et de la civilisation technologique ?

Examinons certaines des réponses les plus significatives qui ont été données à ces questions depuis quelques dizaines d'années.

Au début du siècle déjà, Weber et Wellstein d'une part, et Burkhardts de l'autre (cités par F. Klein[10]) proposaient, chacun à sa façon, de construire les nombres rationnels à partir de la seule connaissance des nombres naturels, et donc sans s'appuyer sur les grandeurs et la mesure des grandeurs, quitte à s'occuper de ces dernières après. La démarche de Weber et Wellstein est classique[11]. Elle consiste à définir les rationnels comme classes d'équivalence de couples de naturels, et à définir ensuite l'addition et la multiplication par des règles opératoires où ne sont engagés que des naturels. La proposition de Burkhardts est moins connue. Elle consiste à définir une "fraction" comme la composée de deux opérations agissant sur un naturel : le premier est la multiplication par un naturel et le deuxième la division par un naturel. Bien entendu, la division n'est pas toujours possible. Mais les règles de calcul applicables à de telles fractions sont les règles habituelles, et on les déduit des propriétés des seuls nombres naturels.

F. Klein s'oppose, dans les termes suivants, à une telle organisation de l'apprentissage" : "[...] *certainement la présentation moderne* [celle des deux auteurs cités] *est plus pure, mais par ailleurs elle est aussi plus pauvre* [que la présentation habituelle jusqu'alors]. De ce que l'étude traditionnelle offre *comme un tout*, elle ne donne en fait qu'*une moitié* : *l'introduction abstraite et logiquement complète de certains concepts arithmétiques - nommés "fractions" - et des opérations qu'on leur applique.* Mais alors *une question totalement indépendante et non moins importante demeure pendante* : *peut-on aussi réellement appliquer la doctrine théorique ainsi déduite aux grandeurs mesurables qui se présentent évidemment à nous* ? On pourrait de nouveau appeler cela un problème de "mathématiques appliquées", pouvant faire l'objet d'un traitement entièrement séparé; mais il faut évidemment se demander en outre si une telle séparation est aussi *pédagogiquement* opportune.

---

[10] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Vol.1, Springer, Berlin, 1908, (4e édition 1933). Une construction des nombres analogue à celle qui est envisagée ici est donnée par E. Landau, *Foundations of analysis, the arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers*, Chelsea, New York, 3e éd. 1966. Nous mentionnons cet ouvrage parce qu'il est un modèle du genre, mais ne le commentons pas, car il ne vise ni directement, ni indirectement l'apprentissage élémentaire des nombres : il constitue l'introduction à un cours universitaire d'analyse. Par ailleurs, l'existence même des enseignements de Weber-Wellstein et Burkhardts au début du siècle montre que les "maths modernes" ne datent pas d'hier.

[11] Toutes les parties soulignées du texte de Klein le sont par Klein lui-même.

Chez Weber-Wellstein, cette division du problème en deux parties s'exprime d'ailleurs de façon très caractéristique : après l'introduction abstraite du calcul des fractions, la seule dont nous ayons parlé jusqu'ici, il consacre une section particulière [...] - intitulée "les proportions" - à la question de l'application effective des nombres rationnels au monde extérieur ; et là aussi sa présentation est assurément plus conceptuelle qu'intuitive".

Tout autre est l'enseignement conçu par G. Papy[12] dans les années soixante pour les élèves de douze à quatorze ans et dont il a puisé l'inspiration théorique dans la *geometric algebra* de E. Artin[13]. Ce dernier avait bâti axiomatiquement la géométrie affine plane sans présupposer l'existence de nombres, mais au contraire en construisant le corps de la géométrie comme un corps d'objets géométriques (les transformations préservant la trace). Bien sûr, ce corps s'avère isomorphe à celui des réels, mais il ne devient corps de nombre qu'*a posteriori*.. A l'usage des classes cette fois, G.Papy construit lui aussi les réels en même temps qu'une géométrie axiomatique du plan affine. Dans ce cadre, les droites du plan sont graduées et sous-graduées dans le système binaire, et les nombres réels représentés par les nombres binaires illimités à virgule, sont associés bijectivement aux points de la droite. Les nombres décimaux sont introduits ensuite. L'addition des réels est définie à partir de la somme des vecteurs parallèles, et le produit des réels est obtenu comme rapport de la composée de deux homothéties.

Les rationnels comme classes d'équivalence de fractions n'apparaissent pas dans un tel exposé. Mais le choix de construire les réels dans un cadre géométrique manifeste le souci de les associer intuitivement aux mesures de longueurs[14].

Une autre conception intéressante est celle de H.G. Steiner[15], a peu près contemporaine de celle de Papy. Mais alors que le texte de ce dernier s'adresse, comme nous l'avons dit, aux élèves de douze à quatorze ans, celui de Steiner est un texte mathématiquement dense proposant un fondement axiomatique pour soutenir l'apprentissage des nombres à partir du plus jeune âge. Il n'est donc nullement destiné aux élèves, mais aux responsables de l'enseignement élémentaire. Dans la théorie de Steiner, les nombres naturels d'abord et les rationnels positifs ensuite sont engendrés comme opérateurs sur un domaine de grandeurs. L'addition de ces nombres est donc interprétée comme addition d'opérateurs, et le produit des nombres comme composition d'opérateurs. Steiner exprime l'espoir que la connaissance d'un tel système conduira à trouver les moyens adéquats pour enseigner ces matières et ramener l'attention sur un point de vue négligé dans l'enseignement : la relation des nombres aux mesures et leur usage comme opérateurs.

L'ouvrage de A. Kirsch[16], destiné aux enseignants et futurs enseignants, vise de même indirectement les tout jeunes enfants (jusqu'à environ huit ans dit-il). C'est aussi un exposé axiomatique construisant les nombres comme opérateurs sur un domaine de grandeurs, mais où les naturels sont tout de même envisagés d'abord comme cardinaux d'ensembles fini (ce qui n'était pas le cas chez Steiner).

Par delà les différences relevées jusqu'ici entre les contributions de Weber-Wellstein, Burkhardts, Papy, Steiner et Kirsch, un caractère commun les rassemble, à savoir l'idée de mettre à la base de l'enseignement élémentaire des nombres une théorie axiomatique. Et chaque auteur, en proposant la sienne, argumente selon les cas de sa pureté, de sa clarté, de son rapport au vécu quotidien et à l'intuition. Mais dans tous les cas, ce dont il est question, c'est d'une conceptualisation au sens mathématique habituel, débouchant (chez Papy) ou susceptible de déboucher (chez les autres) sur un enseignement effectif.

12 G. Papy, *Mathématique moderne* 2, M. Didier, Paris, 1970.

13 Cf note 5.

14 Au début du XXème siècle, H. Lebesgue avait lui aussi proposé une construction des réels par graduation d'une droite, ce qu'il faisait directement dans le système décimal : voir H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Blanchard, Paris, réed. 1975. Nous ne commentons pas davantage ici cet ouvrage, car comme celui de Landau déjà mentionné, il ne vise pas les jeunes élèves mais ceux des classes terminales du secondaire.

15 H.G. Steiner, Magnitudes and rational numbers, a didactical analysis, *Educ. Stud. in Math.* 2 (1969), 371-392.

16 A. Kirsch, *Elementare Zahlen und Grössenbereiche*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1970.

Tout autre est, un peu plus tard, la démarche de H. Freudenthal dans sa *Didactical phenomenology of mathematical structures* (déjà mentionné à la note 9). L'idée n'est plus ici de construire une structure mathématique déductive qui, représentant le mieux ou le moins mal possible la réalité familière, puisse inspirer un enseignement. Freudenthal cherche d'abord à identifier des *phénomènes*, c'est-à-dire des faits, des relations mathématiques ou mathématisables. La meilleure façon de pénétrer le sens de ce terme clé est sans doute d'en donner quelques exemples (nous prenons ceux-ci dans les mathématiques en général, et pas uniquement dans le domaine des grandeurs) :

- le passage d'une figure à une autre semblable avec la conservation des rapports internes à chaque figure ;
- prendre 2/3 d'une tarte n'est pas la même chose que partager 2 tartes en 3 parts égales ;
- quand on divise 1 par 3, on obtient un nombre décimal infini, impossible à écrire ;
- la somme des n premiers nombres impairs est un carré quel que soit n;
- etc, etc.

En utilisant un vocabulaire qui lui est propre (et qu'il craint de voir jugé un peu abscons), Freudenthal propose d'identifier d'abord le plus possible de phénomènes dans chaque structure mathématique modélisant un (ou plusieurs) secteur(s) de la réalité. C'est ce qu'il appelle une *phénoménologie*.. Il la fait suivre d'une *phénoménologie didactique* et évoque ensuite la possibilité d'une *phénoménologie génétique*. Voici ce qu'il en dit[17] : "La différence entre phénoménologie et phénoménologie *didactique* [Freudenthal souligne] sera bientôt apparente. Dans le premier cas on va traiter une structure mathématique comme un produit cognitif au sens où elle décrit ses objets _ éventuellement non mathématiques ; dans le second cas, on la traitera comme une matière d'étude et d'enseignement, c'est-à-dire comme un processus cognitif. On pourrait penser à reculer d'un pas : vers une phénoménologie génétique des structures mathématiques, qui les étudie comme le processus cognitif de la croissance mentale".

Freudenthal inventorie une quantité extraordinaire de phénomènes divers. Plusieurs fois il s'exclame sur la difficulté d'y mettre de l'ordre : "j'espère au moins" dit-il, "que je ne me noierai pas dans cet océan". Constatant l'absence de cohérence globale d'un ensemble de phénomènes, par exemple celui qui se rapporte aux grandeurs et aux rationnels, il organise localement cet ensemble à l'aide d'objets mentaux. Un objet mental n'est pas un concept construit techniquement comme en mathématique, avec des quantificateurs et d'autres symboles, et inscrit dans une structure déductive. C'est quelque chose de plus familier, qu'on pourrait aussi appeler notion, mais suffisamment élaboré pour en faire précisément un instrument d'organisation d'un champ de phénomènes. Les nombres de tout le monde écrits dans le système décimal, les polygones les plus simples, les graphiques de fonctions sont trois exemples d'objets mentaux, parmi une foule d'autres.

Freudenthal insiste, et spécialement à propos des fractions, pour que, les phénomènes sous-jacents ayant été organisés localement et donc sans qu'on y reconnaisse une cohérence globale, on appuie l'enseignement sur leur ensemble et non sur une partie d'entre eux. L'insuccès bien connu de l'apprentissage des fractions pourrait, selon lui, être dû à une exploration trop incomplète par les élèves des phénomènes quelque peu hétéroclites qui y conduisent.

L'apprentissage des mathématiques selon Freudenthal doit commencer au niveau des objets mentaux, et non tout de suite à celui des concepts mathématiques formels, mais il a pourtant vocation de rejoindre ces derniers. Le but ultime de l'enseignement demeure bien d'enseigner les mathématiques telles qu'elles sont. Mais force est de reconnaître que beaucoup d'élèves abandonnent l'étude des mathématiques en cours de route. Pour ceux-là, mieux vaut s'en aller avec le bagage sensé des objets mentaux qu'avec le vide des concepts formels mal assimilés et dépourvus de contexte significatif.

Ici s'achève notre examen de quelques propositions faites depuis cent ans pour l'enseignement des grandeurs et des nombres. Il y en a eu, cela va de soi, beaucoup d'autres. Mais celles que nous avons retenues suffisent, du moins nous l'espérons, à poser le problème assez clairement.

Repartons du constat de Freudenthal : il existe un vaste ensemble de phénomènes divers, impossible à organiser globalement, mais qui tous conduisent d'une certaine façon aux grandeurs et aux nombres abstraits et en constituent des facettes concrètes. Acceptons en outre

---

17 Ouvrage cité à la note 9.

l'idée que si dans l'enseignement on néglige une ou plusieurs parties importantes de cet ensemble de phénomènes, on aboutit à une connaissance des nombres à laquelle manquent certains supports intuitifs et qui ne trouve que difficilement certains de ses points d'application dans la réalité.

Si on admet cela, il devient évident que tout enseignement inspiré d'un exposé axiomatique unique tel ceux de Weber-Wellstein, Papy ou Steiner sera *phénoménologiquement trop pauvre*, si on peut s'exprimer ainsi. Bien entendu, ces exposés sont tous ingénieux et intéressants. Chacun, dans un registre théorique, organise et éclaire d'un jour qui lui est propre une partie des phénomènes en cause. Et à ce titre, ces contributions méritent d'être connues des responsables de l'enseignement d'aujourd'hui. Mais force est de reconnaître que tout tirer d'une source axiomatique unique aboutit à n'éclairer qu'une partie insuffisante de la réalité familière.

Il faut donc bien partir de la réalité multiforme, celle des élèves, et l'organiser en structures locales, ce qui implique qu'on ne rassemble pas d'emblée ces structures en un tout cohérent.

5. Critique de la phénoménologie de Freudenthal

Ceci dit, tout reste à faire. Il faudrait que les responsables de l'enseignement mathématique élémentaire abandonnent l'idée d'inculquer les mathématiques comme un produit théorique préparé en dehors d'eux. Il faudrait non seulement qu'ils prennent conscience de la nécessité d'ancrer leur enseignement dans une réalité phénoménologique qui défie tout essai sommaire de structuration *globale*, mais encore qu'ils se familiarisent avec cette réalité, sa richesse et ses incohérences, les obstacles qu'elle oppose à la construction du savoir mathématique ordinaire.

Une réponse d'apparence évidente serait : on n'a qu'à lire et appliquer ce que Freudenthal a écrit[18] puisqu'il semble avoir vu si juste! Essayons donc maintenant, en approfondissant sa contribution, de voir ce qui, peut-être, la rend difficile à saisir et à mettre en oeuvre.

Nous l'avons dit, pour lui la phénoménologie (mathématique) vient d'abord. Cela est très clair dans la construction de son texte. Par exemple, au Chapitre 1, le premier inventaire des phénomènes liés aux grandeurs est réalisé dans le cadre d'un exposé axiomatique de celles-ci. Autre exemple : au Chapitre 5, une partie importante des phénomènes concernant les rationnels est relevée dans une présentation axiomatique partielle de ces nombres considérés comme opérateurs sur un domaine de grandeurs.

Ayant ainsi d'abord identifié les phénomènes mathématiques, il part à la recherche des phénomènes quotidiens qui ont vocation d'y conduire, de les éclairer, d'en être des contreparties intuitives. Il découvre ainsi quelques ensembles de phénomènes familiers, ayant chacun sa cohérence propre. Mais ces ensembles sont en quelque sorte juxtaposés : le principal lien entre eux est qu'ils préfigurent, chacun partiellement, une même théorie mathématique.

Freudenthal relève que certains de ces ensembles ne se regroupent pas d'eux-mêmes pour constituer la théorie visée. Par exemple, ayant développé les fractions comme "opérateurs de fractionnement", ce qui conduit naturellement à leur multiplication, l'auteur ajoute : "l'addition

---

18 L'ouvrage clé de Freudenthal (cité à la note 9), pourtant disponible depuis neuf ans, semble peu lu. Du moins est-ce ce que nous avons cru constater dans une mesure non négligeable auprès du public francophone, mais aussi anglophone. On pourrait voir plusieurs raisons à cela :

- l'ouvrage est vendu à un prix inacceptablement élevé
- il est écrit dans un anglais difficile ;
- plusieurs chapitres commencent à un niveau de technicité mathématique susceptible de dissuader beaucoup d'enseignants de l'école élémentaire ;
- la masse des phénomènes décrits est tellement touffue que l'auteur lui-même, nous l'avons dit, craint de s'y noyer : *a fortiori* le lecteur court-il le même risque.

Les deux premières raisons nous semblent superficielles, la troisième et surtout la quatrième plus convaincantes. Mais il se peut aussi que la difficulté ait une cause plus profonde, à savoir un éclairage insuffisant des contradictions entre structures partielles. C'est ce que nous essayons d'argumenter à la section 5.

manque", laissant entendre qu'il faudra aller la chercher ailleurs[19]. Et il dit encore quelques pages plus loin : "dans cette structure [le produit des fractions vu comme composition d'opérateurs de fractionnement] le modèle du rectangle ne s'insère pas facilement. Ceci ne veut pas dire qu'il faille le négliger." Le "modèle du rectangle" c'est l'ensemble des phénomènes liés aux calculs d'aires de rectangles ayant pour côtés des fractions de l'unité de longueur.

Dans cette optique, la réalité familière est pourvoyeuse de phénomènes *illustrant* les fractions et les rationnels. Elle n'est pas considérée *d'abord*, indépendamment des mathématiques auxquelles elle conduira plus tard, comme organisable localement à l'aide d'objets mentaux. On n'insiste pas sur le fait que les ensembles locaux de phénomènes structurés sont *impossibles*, si on les prend tels quels, à organiser globalement en une théorie cohérente. Certes, ces ensembles locaux coexistent parfaitement dans la réalité et la pensée communes. Mais lorsqu'on insiste pour mettre en correspondance détaillée les grandeurs et les nombres, on se heurte à des difficultés importantes, des contradictions[20]. Celles-ci sont à la fois des incitants et des obstacles à l'abstraction, à la construction d'une théorie formelle.

6. Affronter les contradictions

Pour pouvoir avancer dans notre réflexion, donnons d'abord l'un ou l'autre exemple de ces structures incompatibles que l'on obtient en organisant localement la masse des phénomènes.

Considérons d'abord l'ensemble des phénomènes liés à la comparaison (plus grand, plus petit) et à l'addition des grandeurs fractionnées. Cet ensemble forme un tout cohérent, bien organisé, où l'on voit commencer à se construire la structure de champ. En particulier l'addition y est une opération binaire interne avec les bonnes propriétés.

La nature des choses veut que cet ensemble ne soit pas muni d'une multiplication, opération binaire interne. Personne n'a jamais obtenu une longueur en multipliant deux longueurs, et jamais non plus une masse en multipliant deux masses. Par conséquent, si on veut construire la structure multiplicative des rationnels, il faut chercher ailleurs.

Mais les fractions (pas les grandeurs fractionnées) peuvent être vues comme opérateurs de fractionnement (de grandeurs). A ce titre, elle forment un *tout autre* ensemble, regroupant une foule de phénomènes familiers. Cet ensemble admet une structure multiplicative correspondant à la composition des opérations de fractionnement, structure qui préfigure une autre facette du champ des rationnels. En contrepartie, les opérateurs de fractionnement ne se laissent doter d'une addition que moyennant beaucoup d'artifice[21].

Les choses rebondissent si on constate que les fractions peuvent aussi servir à *mesurer* des longueurs, des temps, des masses, etc. Or dans le cas des longueurs (et pas directement dans le cas des autres grandeurs), la multiplication des mesures fractionnaires apparaît bel et bien, mais non sous forme d'une opération interne.

Multiplier des mesures de longueurs donne des aires, des volumes ou des hypervolumes selon le nombre des facteurs. Cette multiplication s'exécute d'un point de vue formel comme la multiplication des fractions dans la théorie abstraite des rationnels (on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux). Mais pour qu'elle préfigure la structure multiplicative

---

19 F. Klein (ouvrage cité à la note 9) avait déjà noté que les fractions considérées comme opérateurs sur un domaine de grandeurs ne conduisent pas naturellement à l'opération de somme des fractions.

20 Nous prenons ici le mot *contradiction* non au sens de la rencontre d'une proposition et de sa négation, mais au sens de difficulté essentielle, d'opposition fondamentale entre deux choses. Il nous semble que cette acception existe en français, bien que nous ne l'ayons pas explicitement relevée dans les dictionnaires usuels. A titre de comparaison, voici ce que donne un dictionnaire américain : "a condition in which things tend to be contrary to each other; inconsistency, discrepancy" (Webster's New World Dictionary, 2e éd., Simon and Schuster, New York, 1984).

21 F. Klein (ouvrage cité à la note 9) avait déjà noté que les fractions considérées comme opérateurs sur un domaine de grandeurs ne conduisent pas naturellement à l'opération de somme des fractions.

des rationnels, il faut "oublier" qu'elle n'est pas interne. Il faut *abstraire* la forme de l'opération de son contexte concret (les aires et volumes)[22].

Considérons, en guise de deuxième exemple, les rapports entre grandeurs, avec tous les phénomènes associés aux rapports et aux proportions. A l'intérieur de chaque domaine de grandeurs (c'est-à-dire soit les objets allongés, soit les temps, soit les objets pesants...), on trouve un rapport entre deux grandeurs quelconques, et l'on peut former librement des proportions entre grandeurs. Par contre, il n'y a pas de rapport entre deux grandeurs d'espèces différentes, et si l'on veut former une proportion entre quatre grandeurs, il faut que les deux premières soient de la même espèce, et les deux dernières aussi.

Cette circonstance empêche d'échanger les termes moyens dans une proportion où sont engagées des grandeurs de deux espèces distinctes. Corrélativement, car c'est un autre aspect

du même phénomène, elle empêche l'existence d'un rapport externe dans une application linéaire d'un domaine de grandeurs dans un autre différent.

Pourtant, les nombres rationnels (et puis les réels) qui vont à terme remplacer les grandeurs, devront bien surmonter ces interdits. Au bout du compte, il faudra par le biais des nombres, donner existence à des rapports de grandeurs d'espèces différentes comme on en voit dans les vitesses, les densités, et bien d'autres. Les incompatibilités de départ ne seront vaincues qu'au prix de difficultés supplémentaires, en l'occurrence celles qui naissent du choix *a priori* arbitraire des unités de mesure et de la restriction à un système d'unités cohérent.

Ces deux exemples auront sans doute permis au lecteur de comprendre mieux ce que nous avons appelé structures partielles contradictoires. Ces contradictions sont fondamentales, elles tiennent à la nature des choses, elles font partie de la relation intime de l'homme avec la réalité. A travers les opérations de fractionnement et de mesure, l'homme cherche à mettre en relation les grandeurs et les nombres. Les nombres naturels sont là, au départ, avec leurs propriétés opératoires. Tels quels, ils servent déjà à opérer sur les grandeurs et à les mesurer. Mais viennent ensuite les opérateurs de fractionnement et les mesures fractionnaires. L'homme cherche à étendre à ces objets nouveaux les propriétés opératoires des nombres naturels. Mais cela ne va pas sans peine, sans contradictions, sans quelques ajustements cruciaux. Pour constituer les rationnels en structure abstraite, il faut oublier les connotations concrètes de chaque structure partielle pour n'en retenir que les propriétés formelles, il faut *abstraire*.

Une conclusion s'impose : les rationnels ne sont pas tout formés dans la nature. Il ne suffit pas d'observer celle-ci, fut-ce minutieusement, pour les y découvrir. Les rationnels ne sont pas naturels, ils sont artificiels, il sont le résultat d'une construction de l'esprit humain[23].

Ce n'est d'ailleurs pas par hasard que trois mathématiciens ont affirmé en écho répété à travers le XIXème siècle :

- "Le nombre est un pur produit de notre esprit" (Gauss)[24] ;

---

[22] On pourrait continuer en évoquant la multiplication hybride obtenue en faisant agir un opérateur de fractionnement sur une fraction considérée comme mesure d'une grandeur. Tout cela est exposé amplement dans N. Rouche, *op. cit.* note 1.

[23] Les incompatibilités des structures partielles ne sont pas faciles à surmonter. Elles constituent sans doute une variété d'obstacles épistémologiques au sens de Bachelard. A propos du fait que les rationnels ne se trouvent pas tout faits dans la nature, on peut rappeler la distinction empruntée par B. Charlot à J.T. Desanti entre les *mathématiques du ciel* (celles qu'il faut découvrir dans le paradis des idées platoniciennes), *les mathématiques de la terre* (celles qui seraient cachées dans la nature et qu'une observation attentive permettrait d'y découvrir), et *les mathématiques comme instruments* (celles qui sont créées par l'activité du mathématicien). On voit que c'est plutôt cette troisième espèce de mathématique qui est exhibée par notre analyse. Les rationnels sont constitués comme instrument abstrait à usages multiples (ceux-ci n'étant d'ailleurs possible qu'à cause du caractère abstrait), susceptible d'être embrayé sur divers types de situations particulières. Et il arrivera que lorsqu'on embraye la fonction addition de l'instrument, on laisse la fonction multiplication inoccupée, ou que lorsqu'on embraye la multiplication dans un certain contexte, on oublie qu'elle peut aussi servir ailleurs, etc.

[24] C.L. Gauss, Lettre à Bessel (9 avril 1830), cité par P. Dugac, *Sur les fondements de l'analyse au* XIXe *siècle*, cours polycopié, Université de Louvain, 1980, p. 148.

- "Dieu fit le nombre entier, le reste est l'oeuvre de l'homme" (Kronecker)[25] ;
- "Les nombres négatifs et fractionnaires ont été créés par l'esprit humain" (Dedekind)[26].

Et maintenant que conclure de là sur le plan de l'apprentissage et de l'enseignement ? *Il nous semble intéressant d'aborder franchement dans les classes ce que nous avons appelé ci-dessus les contradictions de la pensée commune dans sa première organisation.* Ces contradictions vaincues donnent son plein sens à la théorie abstraite et seule leur connaissance peut éclairer les limites d'applicabilité de celle-ci aux situations particulières.

Si l'on accepte cette conclusion, deux de ses conséquences doivent être envisagées.

La première est qu'il faut renoncer à l'ambition généreuse des promoteurs des mathématiques modernes d'enseigner d'emblée aux élèves des connaissances définitives.

G. Papy[27] écrivait en 1972 : "il y a moyen d'aller directement de la connaissance commune aux structures et au point de vue moderne". On peut croire au contraire que sur le chemin qui conduit aux grandes structures mathématiques se trouvent beaucoup d'obstacles significatifs qu'il vaut la peine d'affronter et de ranger dans sa mémoire.

La seconde est que, puisque les rationnels ne sont pas "dans la nature", ne sont préfigurés dans la pensée commune que par morceaux incompatibles, il faut renoncer à une pratique assez fréquente dans l'enseignement : présenter comme ayant une portée générale un modèle particulier d'un concept abstrait.

Par exemple, on pensera avoir montré vraiment ce qu'est 3/4 en *identifiant* cette fraction aux trois quarts d'un tout (une tarte, un bâton,...). On oublie en ce faisant que 3/4 apparaît aussi lorsqu'on partage 3 tartes entre 4 amis. On oublie (ou peut-être, pour ne pas perturber les enfants, on s'efforce de camoufler...) le fait qu'on ne peut pas multiplier deux fractions concrètes de ce type : qui a jamais pu multiplier un morceau de tarte par un morceau de tarte ? On pourrait développer cet exemple et en donner beaucoup d'autres. Les contradictions forment obstacle à la construction des rationnels abstraits, mais on peut croire que ces obstacles sont bien plus pernicieux lorsqu'on les ignore. Car alors les élèves passent par des situations embarrassantes, avec en plus le malaise de ne pas comprendre ce qui leur arrive et le risque de conclure que les mathématiques sont une science qui prend les libertés les plus étranges avec la réalité, en somme une science arbitraire.

7. Un peu d'ordre dans beaucoup de phénomènes

Ceci dit, le problème reste entier de savoir quand et comment, avec quels instruments méthodologiques et quelle prudence, proposer aux élèves d'affronter les obstacles en question, c'est-à-dire de construire leur savoir concret et abstrait.

Mais un autre problème se pose d'abord, et c'est celui que Freudenthal a affronté en écrivant sa *Didactical phenomenology*... Comment rendre compte de façon lisible de l'incroyable masse de phénomènes divers qui sont en cause ? Nous avons discuté cette question dans un ouvrage récent[28] dont voici en substance certaines conclusions.

Le fil conducteur ne peut être celui du développement réel des notions dans l'esprit des enfants, et ce pour deux raisons au moins La première est qu'une partie des phénomènes en question peut demeurer (éventuellement sans dommage) définitivement absente de l'esprit de certains enfants. La seconde est que, sur bien des points, chaque enfant progresse à sa façon et qu'il faudrait d'abord dégager une improbable façon moyenne ou typique.

---

25 L. Kronecker, propos rappelé par D.M. Burton, *Elementary number theory*, Allyn and Bacon, Boston, 1980.

26 R. Dedekind, *Statigkeit und irrationale Zahlen*, 1872; repris en traduction anglaise dans *Essays on the theory of numbers*, Dover, New york, 1963.

27 G. Papy, *Mathématique moderne* 3, Didier, Bruxelles, 1972. On se souviendra aussi de Dieudonné qui a écrit : "Je me contenterai de poser aux éducateurs la question de savoir si pour arriver aux meilleurs résultats, il convient de présenter aux élèves une théorie où tout s'ordonne naturellement autour de quelques idées-clés très simples, et qui seront fondamentales dans leurs études ultérieures, ou au contraire les laisser pendant des années aux prises avec une technique inadéquate et qu'il leur faudra oublier aussitôt apprise". (J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, 1966).

28 Ouvrage cité à la note 1.

Le fil conducteur ne peut pas être non plus celui de la genèse historique, car des phénomènes aussi élémentaires et fondamentaux que l'addition des grandeurs, l'ordre, les fractionnements simples, etc. remontent plutôt à la préhistoire, aux balbutiements de l'*homosapiens* perdu dans la nuit des temps.

Dans l'ouvrage cité, nous avons, non sans quelque arbitraire, pris le parti

- d'introduire d'abord les propriétés des grandeurs qui ne les mettent en relation avec aucun type de nombres, pas même les naturels (comparaison et somme de grandeurs) ;
- puis, supposant connues les propriétés élémentaires des naturels, d'introduire la multiplication et la division d'une grandeur par un naturel, et ensuite les nombreux phénomènes résultant des actions conjointes d'un opérateur (naturel) de multiplication et d'un opérateur (naturel) de division ;
- de faire émerger (le plus tard possible) les fractions comme opérateurs sur des grandeurs et comme mesures ;
- d'introduire les rationnels seulement à ce stade avancé ;
- de ne parler qu'ensuite des décimaux ;
- de terminer enfin par les phénomènes liés aux applications linéaires d'un domaine de grandeur sur un autre.

On peut décrire comme suit l'idée directrice de cette suite d'étapes. Les nombres naturels avec leurs propriétés élémentaires représentent le *discret*.. On les suppose connus. Les grandeurs représentent immédiatement le *continu*. Après avoir parcouru les propriétés des grandeurs indépendantes des naturels, on ordonne le reste de l'exposé autour des rencontres du discret et du continu. Ces deux modalités des choses et de la pensée ne s'ajustent pas naturellement entre elles. On peut regarder chaque étape de la construction des rationnels (puis des réels) comme le dépassement d'un conflit entre le discret et le continu, et cela jusqu'à la réconciliation finale, jusqu'au moment où les nombres et les grandeurs s'accordent harmonieusement. Certains reconnaîtront dans cette progression un mouvement dialectique de la pensée.

Bien entendu, tous les phénomènes dont il faut rendre compte ne trouvent pas leur place préparée à l'avance dans un tel schéma. Il nous a semblé toutefois que ce fil conducteur clarifiait les choses et permettait de les ordonner raisonnablement.

Mais attention, un tel exposé n'est pas un projet d'enseignement, ne serait-ce que parce que les premières propriétés des naturels sont présupposées, alors que les tout jeunes enfants progressent de façon simultanée dans la connaissance des premiers nombres et des premières grandeurs.

Il ne s'agit pas non plus, nous l'avons dit, d'un exposé historique. Néanmoins, certains épisodes historiques - bon à connaître - de l'histoire des grandeurs et des nombres se rattachent d'eux-mêmes à la dialectique du discret et du continu.

Il s'agit plutôt d'un exposé stylisé, un *type idéal* au sens de M. Weber[29] Un type idéal est une construction intellectuelle plutôt ordonnée, claire et logiquement cohérente que fidèle à la réalité. C'est un instrument conceptuel commode qui sert à évoquer la réalité, mais est toujours en attente d'une nuance, d'une correction, d'un complément de sens.

Terminons en évoquant l'enseignant dans sa classe au travail. Il est entouré d'enfants qui pensent et discutent. Il doit comprendre au vol, c'est-à-dire très vite, les événements intellectuels dont il est témoin et leurs enjeux. Il doit nécessairement s'appuyer pour cela sur des connaissances nombreuses, claires, non dogmatiques et aisément disponibles. Cette réflexion nous semble indiquer, parmi d'autres sans doute, une perspective pour la formation des maîtres.

---

[29] Voir, par exemple, les textes de M. Weber dans P. Bourdieu, J.-Cl. Chamboredon, J.Cl Passeron, *Le métier de sociologue*, Mouton, 4e éd., Berlin, 1983, pp. 246-252. Voir aussi N. Rouche, Wever's ideal type in the research on mathematical learning, in *The dialogue between theory and practice in mathematics education : overcoming the broadcast metaphor*, 4th SCTP Conference, Brakel, 1990.