LA NOTION D'EQUILIBRE

Bernard PINET
Groupe de Géométrie - IREM de BORDEAUX

LA NOTION D'EQUILIBRE

- Ses origines - Sa nature - Son rôle
- Sa place dans un apprentissage scientifique
- Ses champs d'intervention
- Ses modes d'intervention - Ses prolongements

/I/ LA NOTION D'EQUILIBRE : OBJECTIFS, DEMARCHE ET GENESE.

1°) Etat des lieux.

Aussi bien dans ses caractérisations que dans ses différentes interventions, le Barycentre n'apparaît que comme dépendance du calcul vectoriel et non comme un outil spécifique.

Il est surtout exploité comme élément de réduction.

La lourdeur des notations,
l'insuffisance de l'image mental associée,
la forme des caractérisations qui le privilégient,
sa faible disponibilité au niveau des configurations,
rendent son emploi difficile et peu performant.

2°) Objectifs et démarche.

Le désir de rendre plus sensible le barycentre, conduit à lui faire correspondre une situation physique et sa représentation sur un schéma traduisant l'équilibre associé et le visualisant.

Ce schéma d'équilibre pourra être associé à plusieurs traductions barycentriques de la même situation.

La volonté de considérer le barycentre comme un outil spécifique de résolution de problèmes, conduit :

(1) à s'intéresser à une formulation qui ne privilégie aucun point
2) à rechercher des écritures plus facilement manipulables
3) à faire en sorte que reste disponible une image mentale globale associant l'équilibre et son schéma
4) à étudier les configurations qui sont le support de propriétés exploitables en terme de barycentre et d'équilibre.

.../...

3°) Genèse de la Notion d'Equilibre.

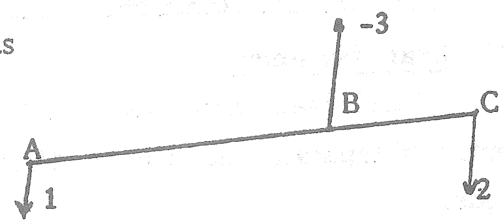
C'est en cherchant à faire du barycentre un outil spécifique de résolution de problèmes que les objectifs précédents sont successivement apparus.

La notion d'équilibre en résulte.

Disons aussi que c'est en insistant, à propos du barycentre, sur le schéma (alors controversé) de la situation physique de l'équilibre de 3 forces parallèles que le concept s'est dégagé.

(1) L'exemple physique du champ de la pesanteur (localement à forces parallèles) permet de rendre sensible la recherche du point d'équilibre et de visualiser dans les cas simples un barycentre.

(2) On est ainsi conduit à des schémas d'équilibre du type :



(3) . Un équilibre peut être caractérisé vectoriellement par $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MAi} = \vec{0}$ et $\sum_{i=i}^{n} \alpha_i = 0$

Fonction vectorielle de Leibniz nulle à somme de coefficients nulle.

(4) . Cette définition ne privilégie aucun point et permet (si $\alpha_i \neq o$) de caractériser chacun d'eux comme barycentre des autres.

(5) . Notations : L'équilibre ci-dessus est noté $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}\right\}$

Il a trois traductions du type :

C est le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array}$

Ces notations allégées permettent de passer facilement à des coefficients proportionnels.

(6) . Le retour de la notation vers le schéma permet de percevoir l'équilibre physique associé et d'éviter un formalisme prématuré.

4°) L'importance de la notion de Barycentre dans la formation scientifique reste entière, quelle que soit sa place dans les programmes scolaires. C'est un concept unificateur entre des domaines variés, mais, actuellement, le barycentre sert surtout comme élément de réduction d'expressions vectorielles ou numériques et sa présentation est plutôt un prétexte au calcul vectoriel.

5°) <u>INTERDISCIPLINARITE :</u> L'apprentissage proposé pour la notion d'équilibre se fait à partir du point de vue physique et le retour à celui-ci est toujours possible : les manipulations d'écritures correspondent à des réalisations physiques. Le calcul dans le modèle colle au plus près avec les concrétisations que l'image mentale peut produire. le sens du concept peut être préservé tout au long de son emploi, ce qui est favorable à sa compréhension, à son enseignement, à sa mise en oeuvre.

Citons ici le "Rapport de la mission de réflexion" (Didier Dacunha-Castelle)
p. 2 : "L'évolution du système éducatif passe par une interdisciplinarité bien comprise".
p. 42 : "La géométrie élémentaire s'élabore sur la base de perceptions physiques".
p. 49 : "Au Lycée, certaines notions mathématiques peuvent prendre du sens en physique.

L'important est de préparer le terrain pour que les objets mathématiques introduits par la physique puissent être repris par l'élève en mathématiques dans de bonnes conditions".

p.70 : "(Favoriser) l'acte de chercher - (Illustrer) les liens avec d'autres domaines et entre différentes parties des mathématiques.
On procède bien ici à un passage du "sensible au rationnel".

6°) <u>LES CHAMPS D'INTERVENTION</u> sont essentiellement les problèmes d'alignement, de concours et de parallélisme, puis de convexité, d'harmonicité...

L'outil-équilibre, joint à d'autres outils permet de traiter des questions de bissectrices, d'isogonales, d'isotomiques...

C'est sa facilité d'emploi qui incite à le faire intervenir. On dispose, en effet, de caractérisation en termes d'équilibre pour de nombreuses configurations : alignement, milieu, parallélogramme, trapèze, quadrilatère complet, Céva, Ménélaüs...

7°) <u>LES CONCLUSIONS DE LA MISE A L'ESSAI</u> confirment les avantages du point de vue proposé :

* Techniquement, il se révèle d'une grande facilité.
* Pédagogiquement, il permet de travailler au niveau du sens.
* Du point de vue de l'apprentissage, prenant appui sur un aspect physique, sensible, facile à mémoriser et à visualiser, il permet de dégager immédiatement une image mentale.
* Du point de vue de la méthode, il est spécifique et se substitue à un apprentissage de procédures calculatoires utilisant la relation de Chasles.

8°) <u>PLACE DANS LE COLLOQUE</u> : Le concept proposé contribue à l'élaboration de ceux de répartition de masse en physique et de point moyen en statistique. Il conduit à une mise en oeuvre sensible de la proportionnalité à une approche des procédures linéaires d'élimination (jusqu'à la méthode du Pivot de Gauss).

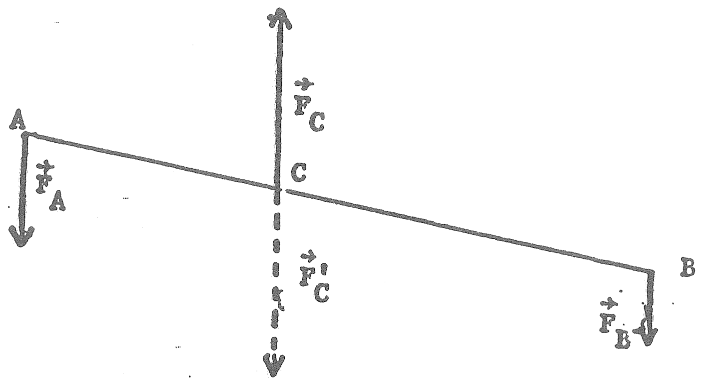
La présentation de la notion est donc justifiée :
1) par son ancrage physique et son rôle dans la culture scientifique.
2) par sa place dans une problématique d'accés au linéaire.

Une caractérisation plus symétrique du barycentre.

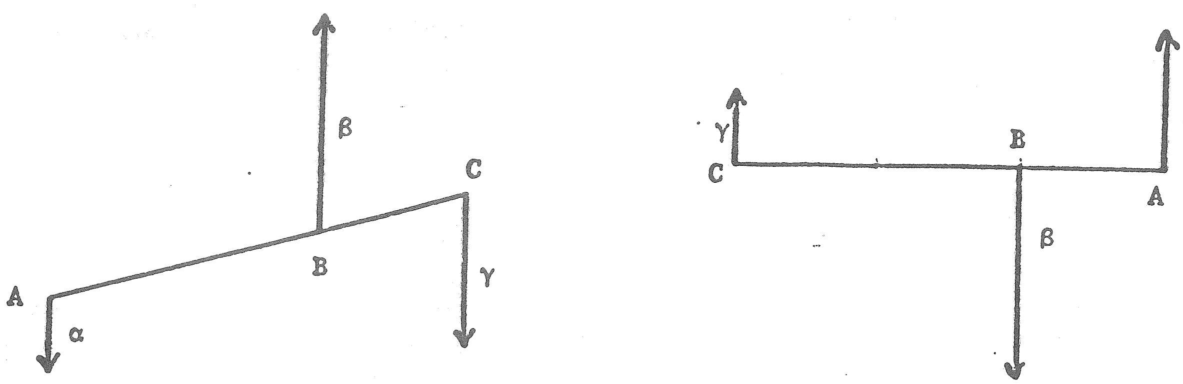
> Soit A, B et C trois points, distincts, les propositions suivantes sont équivalentes:
>
> **1** Il existe un point P du plan et trois réels α, β et γ non nuls et de <u>somme nulle</u> tels que:
>
> $$\alpha.\overrightarrow{PA} + \beta.\overrightarrow{PB} + \gamma.\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$
>
> **2** A est barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$
>
> **3** B est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$
>
> **4** C est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

Schéma d'équilibre associé

A la situation précédente (cas de trois points), on peut associer le schéma d'équilibre d'un solide soumis à trois forces parallèles.



De façon plus générale, étant donné trois points A, B et C affectés de coefficients α, β et γ non nuls et de somme nulle, tels que l'un soit barycentre des deux autres, on peut associer le schéma d'équilibre de trois forces parallèles et d'intensités α, β et γ.



$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Sur le <u>schéma d'équilibre</u> précédent, on peut alors lire de trois façons différentes que chaque point est le point d'équilibre des deux autres points affectés des coefficients correspondants.

Notion d'équilibre.

II.2

On dira que l'on a l'équilibre $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \middle| \frac{A_2}{\alpha_2} \middle| \cdots \middle| \frac{A_n}{\alpha_n} \right\}$.

Si l'un des A_i est barycentre des $\left| \frac{A_k}{\alpha_k} \right|$ pour $k \neq i$

Le système $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \middle| \frac{A_2}{\alpha_2} \middle| \cdots \middle| \frac{A_n}{\alpha_n} \right\}$ est un équilibre

si et seulement si

la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée est nulle.

Le système $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \middle| \frac{A_2}{\alpha_2} \middle| \cdots \middle| \frac{A_n}{\alpha_n} \right\}$ est un équilibre

si et seulement si

1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n = 0$

2) Il existe un point P tel que:
$\alpha_1.\overrightarrow{PA_1} + \dots + \alpha_n.\overrightarrow{PA_n} = \vec{0}$

Equilibres et barycentres

Si G est le barycentre de $\frac{A_1}{\alpha_1} \middle| \frac{A_2}{\alpha_2} \middle| \cdots \middle| \frac{A_n}{\alpha_n}$

alors le système $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \middle| \frac{A_2}{\alpha_2} \middle| \cdots \middle| \frac{A_n}{\alpha_n} \middle| \frac{G}{\alpha} \right\}$,

où $\alpha = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, est un équilibre.

Si le système $\left\{ \frac{A_1}{\alpha_1} \middle| \frac{A_2}{\alpha_2} \middle| \cdots \middle| \frac{A_n}{\alpha_n} \right\}$ est un équilibre

alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que α_i soit non nul,
A_i est le barycentre du système privé du couple $\left| \frac{A_i}{\alpha_i} \right|$

III - Equilibres et configurations

III.1

Equilibre à trois points: Alignement

A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ il existe un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$

(à coefficients non tous nuls)

1° Si $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ est un équilibre,

alors l'une des deux propositions suivantes est vraie:

- $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (On dira que l'équilibre est trivial)
- A, B et C sont alignés

2° Si A, B et C sont alignés, il existe des coefficients

α, β et γ tels que $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array}\right\}$ soit un équilibre.

Cet équilibre sera dit associé aux points alignés A, B et C.

On peut choisir pour α, β et γ les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans une base $\vec{\imath}$, c'est à dire, au signe près, des nombres proportionnels aux longueurs BC, CA et AB.

On peut ainsi s'appuyer sur la notion physique d'équilibre.

Equilibre associé à un quadrilatère ABCD.

Si ABCD est, au sens strict, un quadrilatère,

alors il existe un équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

à coefficients non nuls, uniques à un facteur multiplicatif près.

Etant donné un quadrilatère ABCD et l'équilibre associé $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta = 0$

  L'équilibre associé à un tel trapèze s'écrit donc

  $$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$$

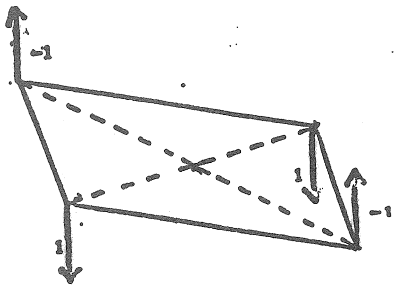
- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta \neq 0$

  Leur point commun I est à la fois

  barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et barycentre de $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \gamma & \delta \end{array}$

III.2 Trapèzes et parallélogrammes

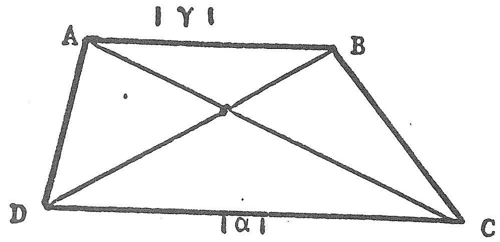
a) Parallélogramme



Les quatre points A, B, C et D déterminent un parallèlogramme ABCD si et seulement si

on a l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right\}$

b) Trapèzes

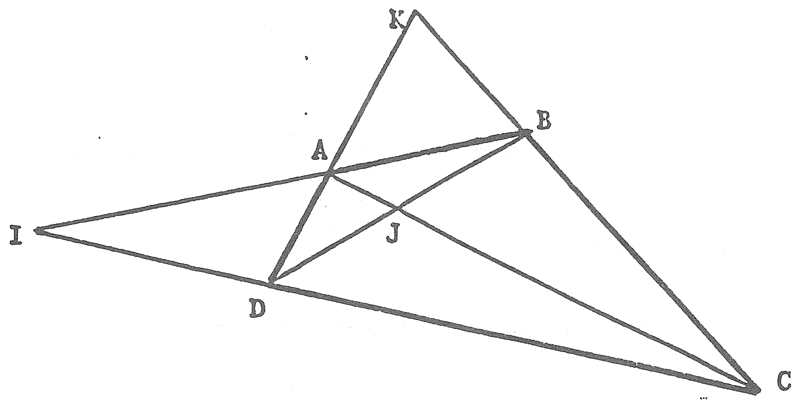


L'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & -\alpha & \gamma & -\gamma \end{array}\right\}$ est caractéristique du trapèze et du parallèlisme: (AB) // (CD) (α et γ non nuls)

Le quadrilatère complet.

Soit ABCD un quadrilatère et

$\left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right\}$ son équilibre associé.



On suppose $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ et $\alpha + \delta$ non nuls.

Alors:

- (AB) et (CD) sont sécantes en I barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \gamma & \delta \end{array}$
- (AC) et (BD) sont sécantes en J barycentre de $\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline \alpha & \gamma \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline \beta & \delta \end{array}$
- (AD) et (BC) sont sécantes en K barycentre de $\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline \alpha & \delta \end{array}$ et $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \beta & \gamma \end{array}$

IV. EXEMPLES D'INTERVENTION

IV.1

Exemple 4: D'après Tangente n° 2

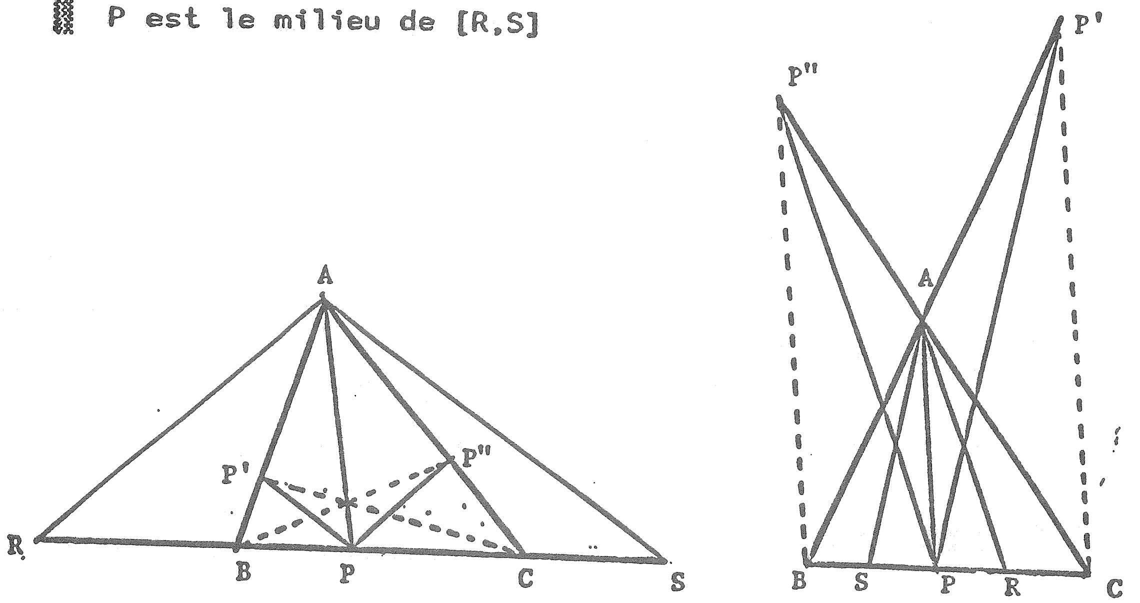
Données:
- Un triangle ABC
- Trois points P, R et S situés sur (BC)
- La parallèle à (AS) passant par P coupe (AB) en P'
- La parallèle à (AR) passant par P coupe (AC) en P"

Démontrer que:

les droites (AP), (BP") et (CP') sont concourantes (ou parallèles)

si et seulement si

P est le milieu de [R,S]



a) Cas de concours

b) Cas du parallélisme

On peut trouver des coefficients α, β et γ (avec α arbitraire) pour avoir les équilibres $\boxed{e1} = \left\{\frac{A}{\alpha}\middle|\frac{B}{\beta}\middle|\frac{P'}{1}\right\}$ et $\boxed{e2} = \left\{\frac{A}{\alpha}\middle|\frac{C}{\gamma}\middle|\frac{P''}{1}\right\}$

En projetant sur (BC) on obtient les équilibres

$\boxed{e3} = \left\{\frac{S}{\alpha}\middle|\frac{B}{\beta}\middle|\frac{P}{1}\right\}$ et $\boxed{e4} = \left\{\frac{R}{\alpha}\middle|\frac{C}{\gamma}\middle|\frac{P}{1}\right\}$ qui par addition donnent

l'équilibre $\boxed{e5} = \left\{\frac{S}{\alpha}\middle|\frac{R}{\alpha}\middle|\frac{B}{\beta}\middle|\frac{C}{\gamma}\middle|\frac{P}{1}\right\}$

P milieu de [R,S] $\Leftrightarrow$ $\boxed{e6} = \left\{\frac{S}{-\alpha}\middle|\frac{R}{-\alpha}\middle|\frac{P}{2\alpha}\right\}$ est un équilibre

$\Leftrightarrow$ $\lambda\boxed{e5} + \mu\boxed{e6}$ est un équilibre et $\mu \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{e5} + \boxed{e6} = \left\{\frac{B}{\alpha}\middle|\frac{C}{\gamma}\middle|\frac{P}{1}\right\}$ est un équilibre

$\Leftrightarrow$ $\boxed{e1}$, $\boxed{e2}$ et $\boxed{e5} + \boxed{e6}$ sont des équilibres

$\Leftrightarrow$ (AP), (BP") et (CP') sont concourantes ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) ou parallèles ($\alpha + \beta + \gamma = 0$)

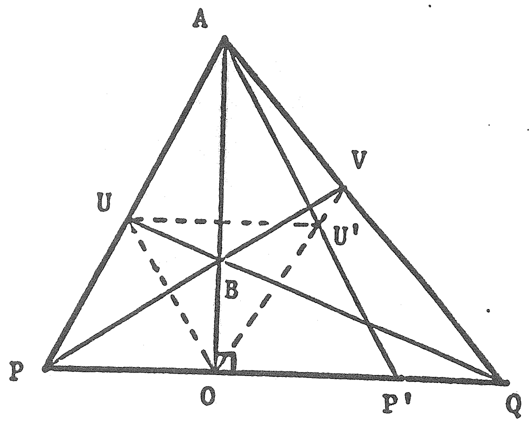
(Hypothèses du théorème de Céva)

Exemple 5-c-Robl

IV.2

Soit un triangle APQ et (AO) la hauteur issue de A.
Pour tout point B de (AO) on appelle U et V les intersections de (QB) et (PB) avec (AP) et (AQ).
La droite (AO) est axe de symétrie de la paire de droites {(OU),(OV)}

La démonstration ci dessous donne un exemple d'intervention des **équilibres dans un problème de symétrie** (et d'alignement).



Soit $U' = s_{(OA)}(U)$ et $P' = s_{(OA)}(P)$.

Montrer que $(OV) = s_{(OA)}(OU)$, équivaut à montrer que O, U' et V sont alignés.

Il existe un équilibre $\boxed{e1} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & P & Q & B \\ \hline a & p & q & / \end{array}\right\}$ qui entraîne

les équilibres $\boxed{e2} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & U & P \\ \hline a & -a-p & p \end{array}\right\}$, $\boxed{e3} = \left\{\begin{array}{c|c|c} P & O & Q \\ \hline p & -p-q & q \end{array}\right\}$

et $\boxed{e4} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & V & Q \\ \hline a & -a-q & q \end{array}\right\}$

La symétrie conduit à l'équilibre $\boxed{e5} = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & U' & P' \\ \hline a & -a-p & p \end{array}\right\}$

On a aussi l'équilibre $\boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c} P & O & P' \\ \hline p & -2p & p \end{array}\right\}$ car O est milieu de [P,P']

On peut donc repérer P' sur [O,Q] par l'équilibre $\boxed{e7}$ tel que

$\boxed{e7} = \boxed{e3} - \boxed{e6} = \left\{\begin{array}{c|c|c} Q & P' & O \\ \hline q & -p & p-q \end{array}\right\}$.

En faisant intervenir U' en considérant l'équilibre $\boxed{e8}$ tel que

$\boxed{e8} = \boxed{e5} + \boxed{e7} = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & U' & Q & O \\ \hline a & -a-p & q & p-q \end{array}\right\}$

En reprenant $\boxed{e4}$ pour tester l'alignement de V avec O et U' on obtient l'équilibre $\boxed{e9} = \boxed{e8} - \boxed{e4} = \left\{\begin{array}{c|c|c} O & U' & V \\ \hline p-q & -a-p & a+q \end{array}\right\}$.

Cet équilibre prouve que les points O, U' et V sont alignés.

V. INITIALISATION

La notion d'Equilibre a été présentée pour la première fois au Colloque Inter-IREM de Géométrie de Mèze, le 26 mai 88 (9 h 45 - 10 h 30) par le groupe de géométrie de l'IREM de Bordeaux.

Un document provisoire : "Le barycentre : un outil spécifique" y fut distribué. En septembre 88, une première publication du groupe y fut consacrée : "Barycentres et Equilibres" version n° 1.

La première mise à l'essai eut lieu en 88/89 (PAI au Lycée Technique d'Agen) dans le cadre du programme.

En juin 89, des propositions faites à la DLC 15 pour le nouveau programme de Seconde contenaient les conclusions de la mise à l'essai et une proposition d'introduction de la notion d'équilibre.

La seconde mise à l'essai a été réalisée en 89/90 avec une collaboration physique et mathématique au Lycée Technique d'Agen.

VI. BIBLIOGRAPHIE.

▪ Le document de référence est :

"La NOTION d'EQUILIBRE" ISSN 0750 0807 MARS 90
publié par l'Irem de Bordeaux

Le document de référence :"La notion d'Equilibre"(Mars 90) résulte des travaux du groupe de Géometrie de l'IREM de Bordeaux depuis la présentation de Mèze (26 mai 88).

La Partie A présente la notion d'équilibre à partir de celle de barycentre ,son intervention dans les configurations et l'harmonicité, puis quelques exemples de fonctionnement.

La Partie B est la mise à l'essai en 88/89 et ses conclusions

En annexe (Partie C) on trouve :

- un essai de définition sans calcul vectoriel,
- la définition complexe dans le plan,

des éléments de théorisation de la notion d'équilibre.

Postérieurement à la mise en place de la notion d'équilibre, un article de Yves Hellégouarch (Université de Caen) sur une axiomatique barycentrique des espaces affines, fut découvert dans la Revue de Math.Spéciales (Vuibert éditeur)

Il est cité en Annexe 3

De même l'Art pondéraire de Simon Stévin présente souvent le même souci de traiter globalement les situations d'équilibre.

2ème 6 gen-90 45min

Doc. Annexe 1

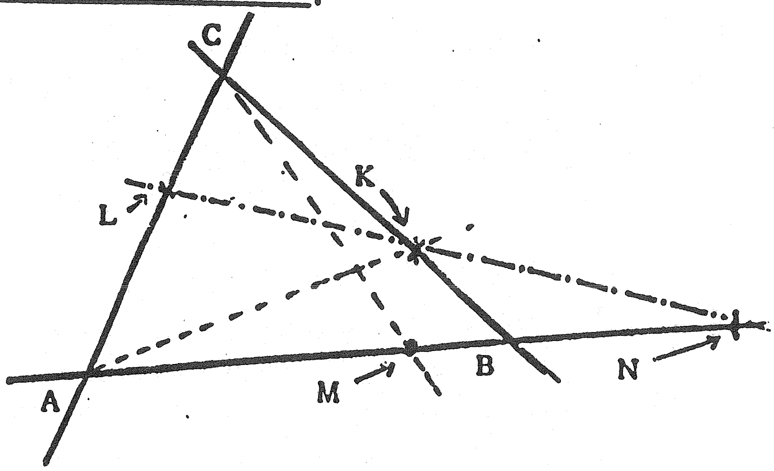
Exemple de devoir de Contrôle avec sa Correction

BARYCENTRES ET EQUILIBRES

◊ Le triangle ABC est donné.

◊ Le point M est défini par l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & M & B \\ \hline 1 & -4 & 3 \end{array}\right\} = e_1$.

◊ le point K est le barycentre de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 1 \end{array}$

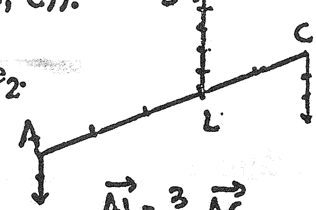


I. CONSTRUCTIONS

1°) Placer M, puis K. (Indiquer l'abscisse de K dans le repère (B, C)). $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

2°) Construire, à part, un schéma de l'équilibre $\left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & L \\ \hline 2 & 3 & -5 \end{array}\right\} = e_2$.

Placer L sur la figure.



$\vec{AL} = \frac{3}{5}\vec{AC}$

3°) N désigne le barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -3 \end{array}$.

Ecrire l'équilibre e_3 associé et placer N. $e_3 = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & N \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}\right\}$: $\vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

II. On veut montrer que (AK), (CM) et (BL) sont concourantes.

1°) Montrer que l'on peut utiliser M et K pour construire le barycentre G de $\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 2 & 6 & 3 \end{array}$.

$G \in (CM)$ car M est barycentre de $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array}$

$G \in (AK)$ car K est bar de $\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{array}$

2°) Ecrire un équilibre associé à A, B, C, G : e_4 et utiliser e_2 pour obtenir un équilibre e_5 prouvant que G est un point de (BL).

$e_4 = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & G \\ \hline 2 & 6 & 3 & -11 \end{array}\right\}$ $\qquad e_5 = e_4 - e_2 = \left\{\begin{array}{c|c|c} B & G & L \\ \hline 6 & -11 & 5 \end{array}\right\}$

III. On veut démontrer l'alignement de K, L, N.

1°) Ecrire un équilibre associé à B, K et C : $e_6 = \left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & K \\ \hline 2 & 1 & -3 \end{array}\right\}$

2°) Trouver une combinaison de e_6, e_2 et e_3 qui élimine A, B et C. (On pourra aussi modifier les coefficients et additionner).

$e_2 = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & C & L \\ \hline 2 & 3 & -5 \end{array}\right\}$, $2e_3 = \left\{\begin{array}{c|c|c} A & B & N \\ \hline 2 & -6 & 4 \end{array}\right\}$; $3e_6 = \left\{\begin{array}{c|c|c} B & C & K \\ \hline 6 & 3 & -9 \end{array}\right\}$

$3e_6 - e_2 + 2e_3 = \left\{\begin{array}{c|c|c} K & L & N \\ \hline -9 & 5 & 4 \end{array}\right\}$ donc K, L et N sont alignés.

Eléments pour une théorie

Equilibre vectoriel

a) Définition

On appelle équilibre vectoriel tout élément e de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$ tel que, en posant $e = (\alpha_{x})_{x \in \mathbb{R}^n}$, on ait:

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^n} \alpha_{x} . x = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \alpha_{x} = 0$$

b) Structure de l'ensemble $\mathcal{E}$ des équilibres vectoriels

$\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)}$

En effet, $\mathcal{E}$ est le noyau de l'application manifestement linéaire:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(\mathbb{R}^n)} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (\alpha_{x})_{x \in \mathbb{R}^n} &\longmapsto \left(\sum_{x \in \mathbb{R}^n} \alpha_{x} . x = 0 \ , \ \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \alpha_{x} = 0 \right) \end{aligned}$$

Equilibres affines

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine sur $\mathbb{R}^n$, nous définissons comme nous l'avons fait au III, l'espace $\mathcal{A}^{(\mathbb{R}^n)}$ et nous nous interessons à certains éléments de cet ensemble que nous appellerons équilibres affines.

a) Définition

On dit que l'élément $(\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$ est un équilibre affine, si, pour un point O quelconque de $\mathcal{A}$ (et donc pour tous) l'élément $(\alpha_{\overrightarrow{OA}})_{\overrightarrow{OA} \in \mathbb{R}^n}$ est un équilibre vectoriel.

On notera $\mathcal{E}$ cet ensemble.

b) Caractérisation des équilibres affines.

Soit $(\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$ un élément de $\mathcal{A}^{(\mathbb{R}^n)}$.

$(\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$ est un équilibre $\Leftrightarrow$ Pour tout $M \in \mathcal{A}$ on a: $\sum_A \alpha_A . \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

Barycentres et équilibres

Barycentres (Rappel)

Soit $(\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$ un élément de $\mathcal{A}^{(\mathbb{R}^n)}$

Le point B est appelé barycentre de la famille $(\alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$ si $\sum_A \alpha_A . \overrightarrow{AB} = \vec{0}$