CUBE, HYPO-CUBES, HYPER-CUBES

Charles PEROL
IREM de Clermont

Ce texte n'est pas un exposé formalisé. Il montre seulement quelques directions de réflexion, éventuels points de départ d'activités diverses à adapter aux élèves. Pour s'affranchir des contraintes du support (seulement 2 dimensions et pas de couleur) le lecteur est engagé à réaliser des maquettes et/ou à colorer ses dessins.

Premier témoignage.

Dans une classe de 6ème, pour je ne sais quelle activité qu'il avait prévue, le prof a demandé à ses élèves que chacun apporte à la séance suivante un carré de bristol de 10 cm de côté. Chaque élève, sauf un, arrive en classe en portant un sac en plastique, genre grande surface, d'où il sort avec précaution un cube. Courte surprise du maître...

Second témoignage.

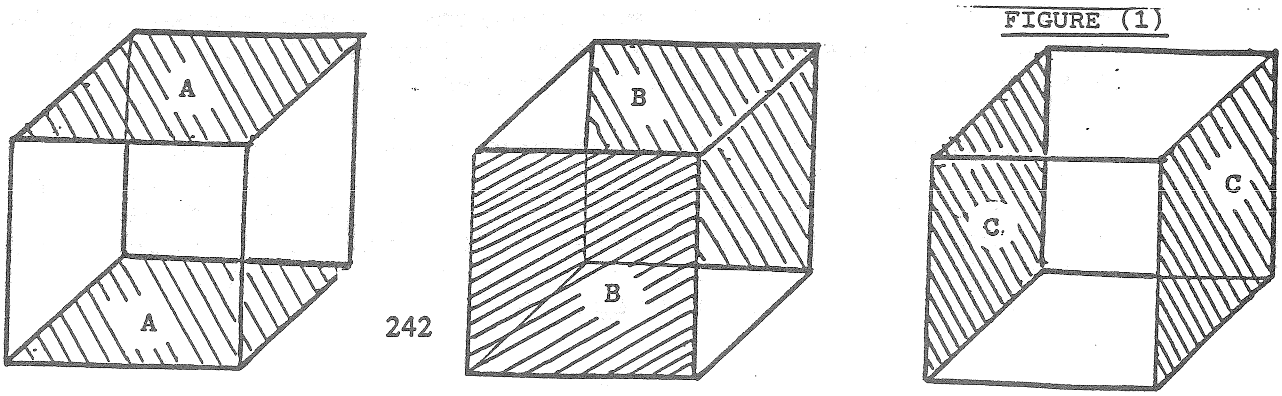
Un autre professeur, désireux de connaître l'image mentale que ses élèves en ont, demande ce qu'est, pour eux, un cube. Un élève répond: "C'est un carré et un autre carré pareil un peu décalé et 4 traits qui les joignent." Evidemment cet élève confond le cube avec une représentation plane à laquelle on l'a dressé. Peut-être...

Prenons un cube en main.

Regardons-le à la lumière de la déclaration du second élève. Pour rendre son assertion acceptable, il suffit de quelques corrections de tournure et de vocabulaire et de quelques précisions. Adoptons ce point de vue. il nous conduit à mettre en évidence les paires de faces parallèles. Soulignons encore ce choix en réalisant notre maquette en 3 couleurs.

Avec le premier élève, confondons les 2 mots cube et carré. Mais pour rester précis indiquons la dimension et proposons une abréviation: Notons C_2 pour carré et C_3 pour cube . Alors la déclaration de notre second élève devient: "Un C_3 c'est un C_2 et un autre C_2 équipollent avec les 2^2 segments qui etc".
La figure(1)montre, avec 3 P.C. d'un même cube, 3 manières de comprendre cette déclaration. Trois couleurs à votre choix remplaceront de manière plus parlante les lettres A,B,C. Le mot équipolent est de moi, il signifie: qui se déduit par une translation. Il s'emploie comme homothétique.

FIGURE (1)



Notations.

Dorénavant, quand j'emploierai cube et carré sans précision ce sera dans leur sens ordinaire. Mais j'emploierai aussi C_3 et C_2 (et aussi C_1 et C_0 et bientôt C_4, C_5, etc).

Descente.

Ces notations incitent à faire décroître indices et exposant. La figure (2) montre, <u>avec un même C_2</u>, deux manières de comprendre la déclaration ci-dessus. Vous voyez ce qu'est un C_1.

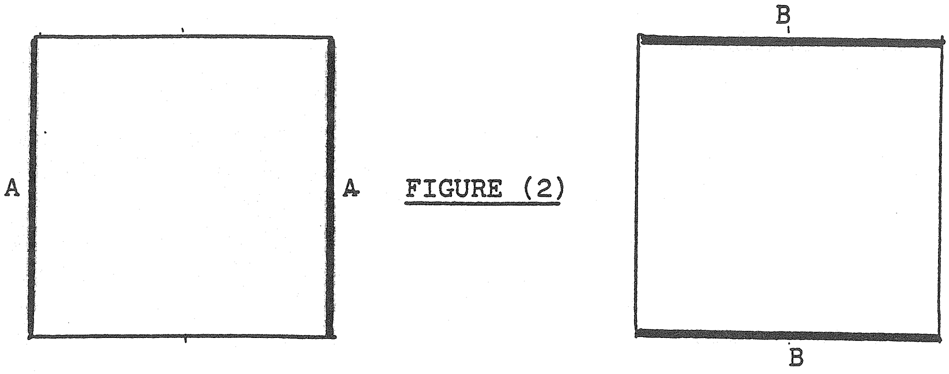
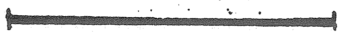


FIGURE (2)

Descendons encore d'un cran.
Qu'est-ce qu'un C_0? figure(3)

FIGURE (3)

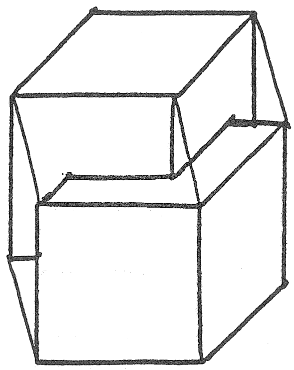


Remarquons, en remontant les indices depuis zéro, que nos cubes sont des cubes-squelettes. C'est-à-dire que, si nous faisons des maquettes, seuls sommets et arêtes seront matérialisés. Les faces seront en quelque sorte virtuelles. Ce n'était pas évident sur la formulation de notre élève. Etait-ce bien ce qu'il voulait décrire? En tout cas notre figure(1) précédait cette prise de conscience.

FIGURE (

Montée.

Prenons maintenant 4 comme indice et exposant. "un C_4 c'est un C_3 et un autre C_3 pareil un peu décalé et les 8 traits qui les joignent". Mis à part les indices, je suis revenu carrément au style de notre second élève. Avec lui, bornons provisoirement nos ambitions à celle que nous lui prêtions: la réalisation d'un dessin plan, figure (4).



Nous ne trouvons guère de difficulté. Mais pour être cohérents avec nous mêmes nous devons encore souligner que notre dessin n'est pas un C_4 mais seulement une <u>représentation plane</u> d'un C_4. Notons que comme pour la figure(1), pour la lisibilité, nous avons représenté les C_3 opaques.

Puisque vous aimez les maquettes, vous obtiendrez un bel objet en réalisant la figure ci-dessus non plus sur un plan mais dans notre espace physique à 3D. Il existe dans le commerce des petites boules portant de nombreux trous permettant d'assembler des tiges rigides. Bien sûr, ce que vous obtiendrez ne sera encore qu'une <u>représentation</u>.

Hyper-cube.

Des représentations, soit, mais représentation de quoi?

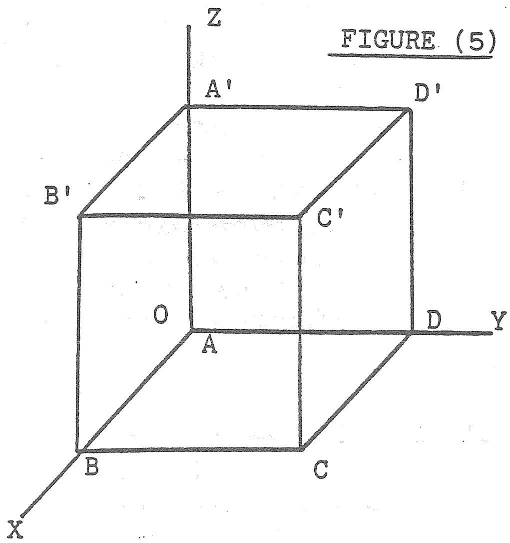


FIGURE (5)

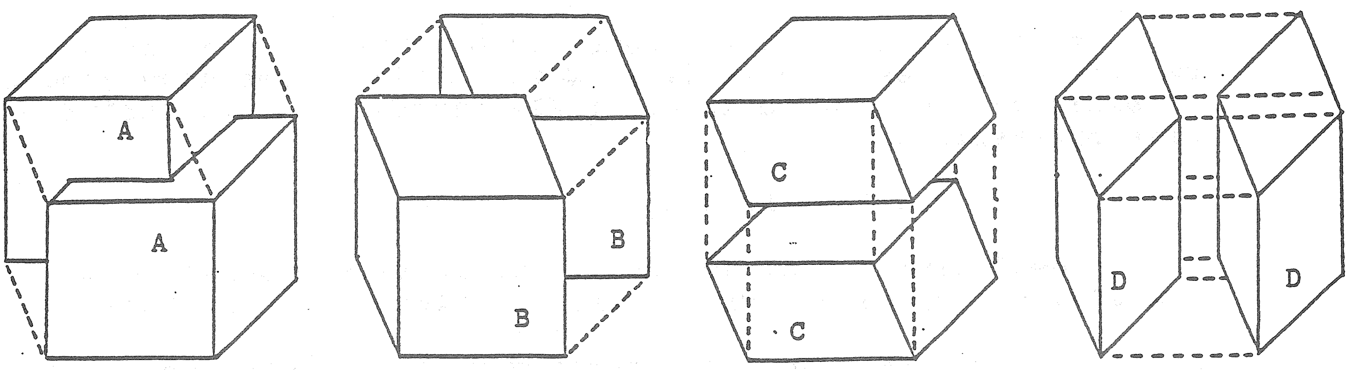
Revenons d'abord à notre bon cube. Installons-le dans un repère euclidien orthonormé. Le C_2, ABCD, est placé dans le plan Ox,Oy. "les 2^2 segments qui etc" tels que [AA'] sont parallèles à l'axe Oz (jusqu'à maintenant j'avais par mon *etc* négligé de préciser la longueur évidente de ces segments et surtout leur direction: orthogonale à la fois aux 2 directions des côtés du C_2).

Pour notre C_4, "les 2^3 segments qui etc" tels que [A A_1] doivent être parallèles entre eux, leur direction doit être orthogonale, à la fois, aux 3 directions des côtés des C_3 et par conséquent ils ne peuvent être dans l'espace Ox,Oy,Oz. Notre C_4 ne peut être situé que dans un espace à au moins 4 dimensions. Il n'y a aucun espoir d'en réaliser (avec les conventions implicites habituelles) une maquette dans notre espace physique.

L'objet mathématique abstrait, que nous appelons ici le C_4, se nomme l'hyper-cube de dimention 4. Nous en avons dejà obtenu des représentations respectant le parallélisme. Les 4 schémas ci-contre, sur une même représentation d'un même C_4 (celle de la figure (4)), montrent comment il peut être construit de 4 manières différentes en suivant la méthode de notre élève.

Pour les distinguer, les C_3 ont été représentés comme cubes-opaques. Remplacez les lettres A,B,C,D par des couleurs, les mêmes pour deux C_3 opposés.

FIGURE (6)



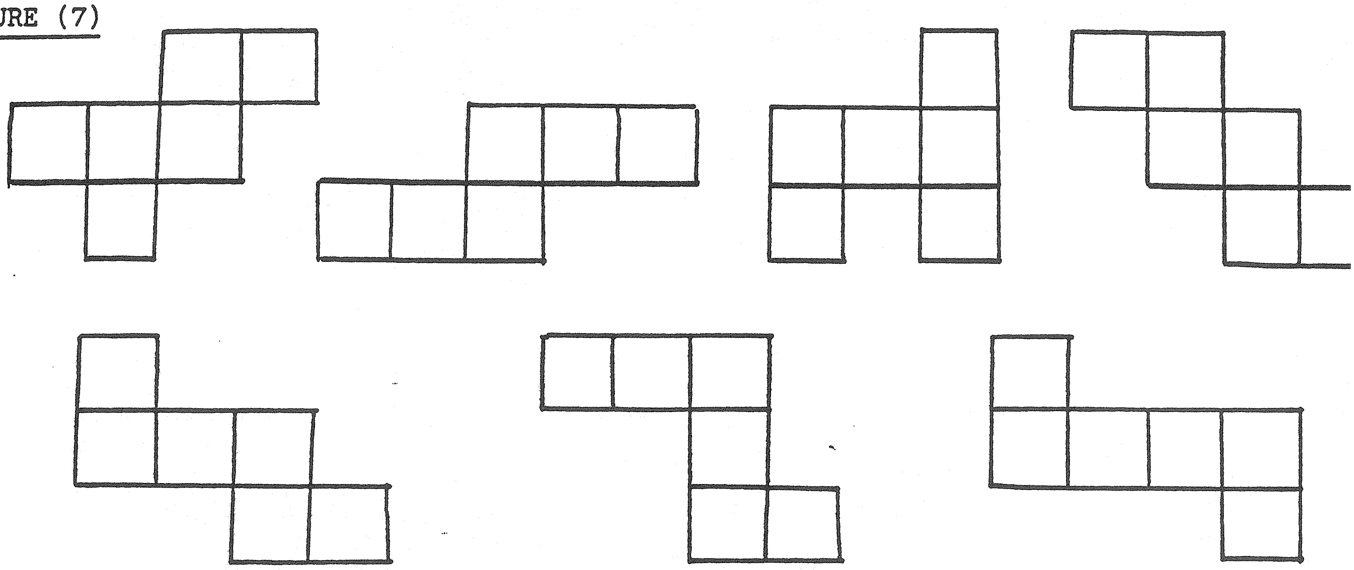
Le dessin classique, très équilibré, de la fin de cet article, figure (10), représente un C_4-squelette. Une image d'un repère de l'espace euclidien à 4 dimensions, constitué par un sommet et 4 vecteurs définis par un même sous-multiple des arêtes du C_4, a été incluse dans un coin de la feuille.

Développements

En commençant prudemment par le cube familier (à 3 dimensions), changeons de point de vue. Remplaçons notre cube-squelette, le C_3, par le cube-surface. Cet objet d'un espace à 3 dimensions est fait des trois couples de carrés-pleins (objets à deux dimensions) que montrent les figures (1) (notons A,B,C, les éléments de ces couples). Il est la frontière d'un cube-plein. Notons le FC_3 (F pour frontière), et notons CP_3 le cube-plein et CP_2 le carré plein.

Vous avez souvent développé des FC_3. Parmi les assemblages ci-dessous (figure (7)), lesquels sont des développements de FC_3 ?

FIGURE (7)



Passons à la dimension 4. Soit FC_4 la frontière d'un CP_4. Le FC_4, objet d'un espace à 4 dimensions, est fait de 4 couples de CP_3 (objets à 3 dimensions): ceux que montre la figure (6). Notons A,B,C,D leurs éléments. Nous allons pouvoir développer le FC_4 dans notre espace physique. Regrettons encore d'être obligés sur le papier de ne représenter ces développements que par des P.C.

Avant de nous lancer dans cette activité, il sera bon de réfléchir à des règles facilitant l'étude des développements (familiers) du FC_3 puis de réfléchir de manière analogue aux développements du FC_4.

D'abord quelques remarques.

1. Si deux carrés sont adjacents sur le développement d'un cube, ils étaient adjacents sur le cube. La réciproque est inexacte.

1 bis. Si deux CP_3 sont adjacents sur le développement d'un FC_4, ils étaient adjacents sur le FC_4. Réciproque inexacte.

2. Sur un cube, chaque face est, sur chacun de ses couples d'arêtes opposées, adjacente à 2 faces d'un mêmee couple.

2 bis. Sur un FC_4, chaque CP_3 constituant est, sur chacun de ses couples de faces (carrés) opposées, adjacent aux 2 CP_3 d'un même couple.

3. Chaque sommet d'un cube appartient à 3 faces (carrés).

3 bis. Chaque arête d'un FC_4 appartient à 3 des CP_3 qui le constituent.

A partir de ces remarques, il est facile de prouver les propositions suivantes:

a) Sur le développement d'un cube, si 2 carrés sont adjacents à un même carré sur 2 arêtes opposées, alors ils appartiennent au même couple.

a bis) Sur le développement d'un FC_4, si deux CP_3 sont adjacents à un même CP_3 sur deux carrés opposés, alors etc.

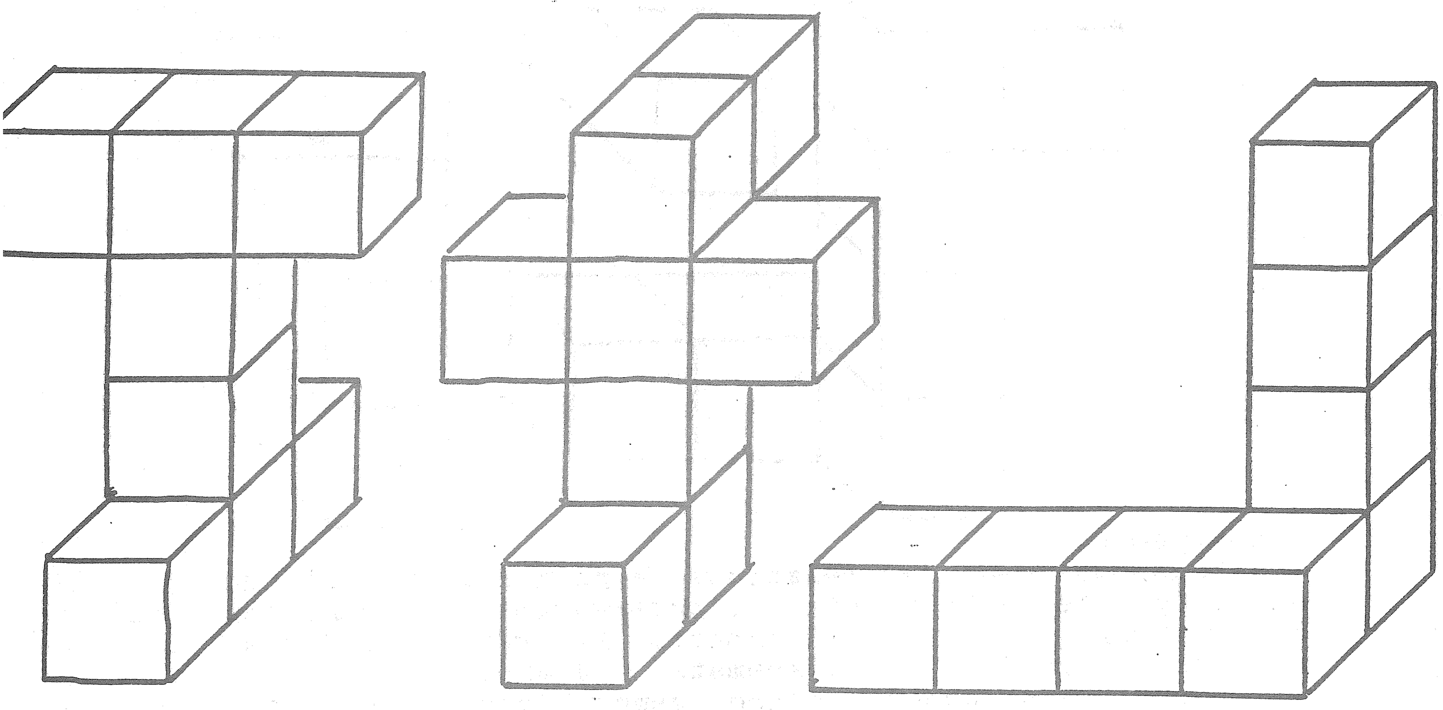
b) Sur un développement, il n'y a jamais d'alignement de plus de 4 carrés pour un FC_3 et de 4 cubes pour un FC_4.

c) Sur un développement, il n'y a jamais plus de 3 carrés autour d'un point pour un FC_3, plus de 3 cubes autour d'une arête pour un FC_4.

Revoyez maintenant les assemblages proposés figure (7).

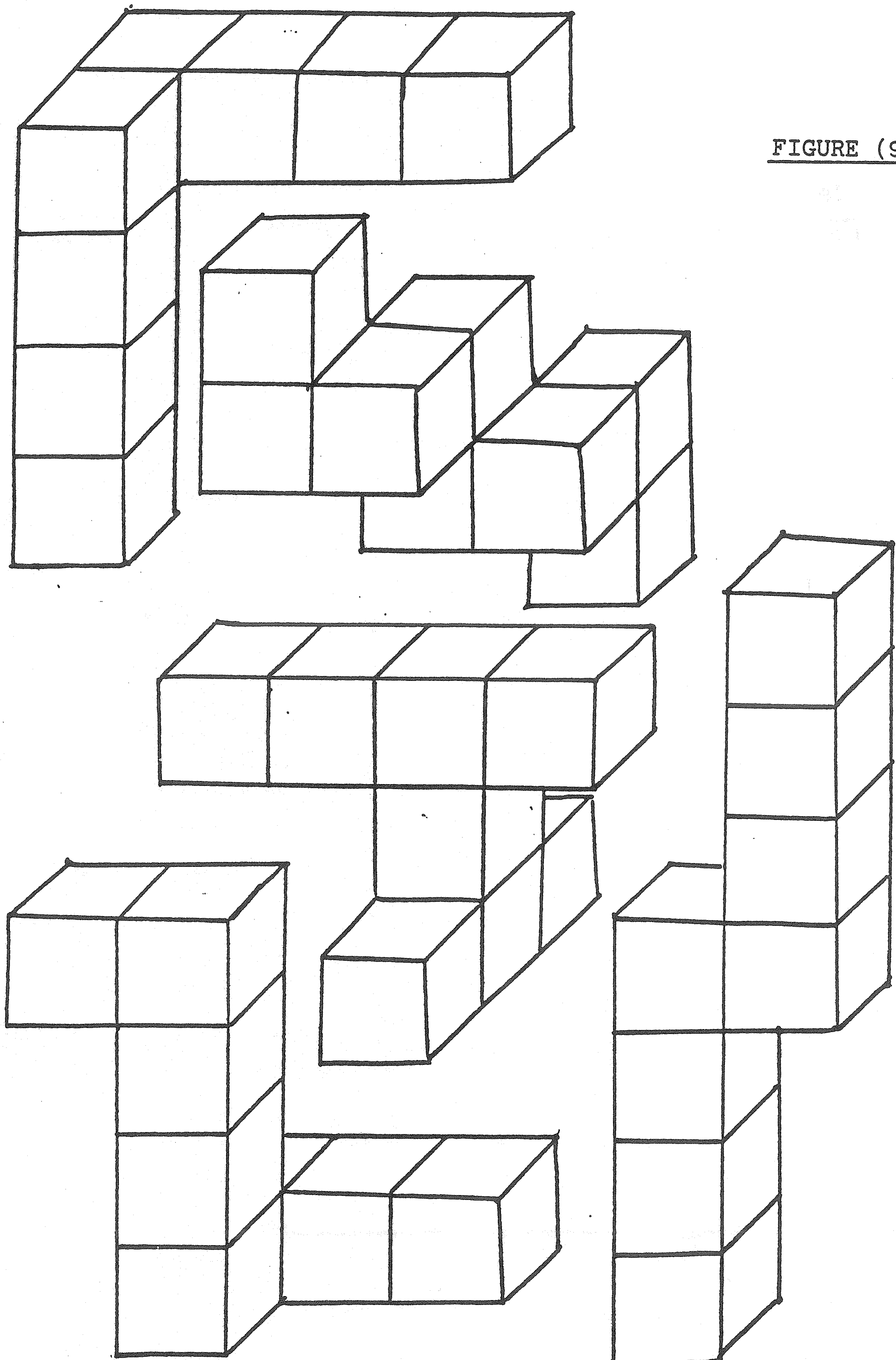
Voici trois développements du FC_4.

FIGURE (8)



Les P.C. de la page suivante peuvent elles représenter des développements d'un FC_4 ?

FIGURE (9)



<u>Dénombrement</u>

Indépendamment des relations de parallélisme, d'orthogonalité et d'égalité de longueurs, l'observation d'un cube nous conduit à dénombrer: 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces, 1 cube.
Et pour un carré 4 sommets, 4 arêtes, 1 carré.

Tous les objets d'une même ligne sont des cubes de dimension croissante depuis zéro.

En poursuivant ces dénombrements, pour les hypo-cubes de dimension un et zéro d'une part, pour les hyper-cubes de dimension 4, 5, 6 etc. d'autre part, et en les disposant rationnellement, nous obtenons le tableau triangulaire ci-dessous:

	sommets 0	arrêtes 1	Faces 2	3	4	5
Point 0	1	0	0	0	0	0
Segm. 1	2	1	0	0	0	0
carré 2	4	4	1	0	0	0
cube 3	8	12	6	1	0	0
hyp c 4	16	32	24	8	1	0
5	32	80	80	40	10	1
6	64	192	240	160	60	12

L'établissement de la colonne de gauche est immédiat.
Celui des diagonales 1,1,1,... et 2,4,6,8,... aussi.
Mais c'est moins facile pour le milieu du tableau. Alors?

Prenons comme exemple l'hper-cube de dimension 5 (ligne 5). Combien de cubes (dimension 3) comporte-t-il? Portons notre attention sur un des 2^5 sommets de l'hyper-cube. A combien de cubes ce sommet appartient-il? La réponse est $C_5^3 = 5!\ /\ 3!.2!$, coefficient de Pascal. Si nous multiplions par 2^5, nombre de sommets de l'hyper-cube, nous avons compté chaque cube 2^3 fois, nombre du cube. Le nombre à inscrire dans la ligne 5 et la colonne 3 est donc: $2^{(5-3)}.5.4.3.2.1\ /\ 2.1\ .\ 3.2.1\ =\ 40$.

Enfin, si vous m'avez fait l'amitié de me suivre jusque là, terminons par une surprise. Calculez la somme des termes de chaque ligne. Expliquez.

FIGURE (10)