

GROUPE IREM DE GEOMETRIE

QUELQUES RESULTATS DE RECHERCHE SUR LES CORPS RONDS

L. C. PAIS, J. NAUDEILLO, B. PELOUZET

JUIN - 1990

QUELQUES RESULTATS DE RECHERCHE SUR LES CORPS RONDS

L'objectif principal de cet atelier est de faire une analyse de la représentation des corps ronds: cylindre, sphère et cône. Nous aborderons plus particulièrement la représentation du cylindre. Nous observerons d'abord un certain nombre de dessins proposés par les manuels scolaires. Nous analyserons ensuite des représentations faites par des élèves du premier cycle avant tout apprentissage. Nous comparerons les dessins des manuels scolaires et ceux des élèves.

Dans la représentation des corps ronds l'ellipse joue un rôle fondamental. Parmi les différentes méthodes pour tracer cette courbe nous avons expérimenté auprès des élèves l'usage d'un pochoir trace-ellipse. Nous présenterons quelques réalisations des élèves à ce propos.

Le travail présenté dans cet atelier a été entrepris en collaboration avec le Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie de Montpellier. Ce groupe est dirigé par Gerard AUDIBERT et constitué par une douzaine d'enseignants. Nous signalons enfin que ce travail n'a pas pour objectif d'énoncer e des affirmations trop générales qui dépasseraient les limites de nos expériences.

1. Le dessin du cylindre dans les manuels scolaires

Nous avons analysé une collection de 37 dessins du cylindre. Ces dessins ont été reproduits des pages de 11 manuels scolaires de 5ème qui sont actuellement utilisés dans les collèges français. Dans ces livres nous avons rencontré trois types de pages: des activités préparatoires, de cours et les pages d'exercices. Les dessins que nous avons analysés ont été retirés des pages de cours. Ces pages présentent normalement des définitions, des propriétés, théorèmes et formules. Dans cette collection de dessins nous avons analysé les points suivants:

- l'équilibre des figures;
- l'usage des pointillés;
- le tracé des ellipses;
- la perspective utilisée dans les dessins;
- les règles de représentations.

Certaines représentations du cylindre présentent simultanément les trois critères suivants: la figure illustre un concept mathématique

important; elle présente des éléments d'équilibre et est fréquemment utilisée dans l'enseignement de mathématique. Tous les dessins analysés illustrent le concept de cylindre de révolution. Dans notre cas les éléments d'équilibre sont les suivants: il y a deux génératrices représentées par deux segments verticaux de même longueur et symétriques par rapport à l'axe de symétrie du cylindre. Les axes des ellipses sont toujours aussi parallèles aux bords de la page. Trois sur quatre des dessins présentent ces conditions. Nous disons que ces trois critères définissent une configuration du cylindre. Nous adoptons le terme "configuration" au sens défini par AUDIBERT G. [1].

En ce qui concerne l'usage des pointillés dans la représentation du cylindre on peut observer d'abord que 75% des dessins utilisent ce recours graphique. L'usage le plus fréquent en est fait pour dessiner un arc d'ellipse représentant la partie cachée du cercle de base inférieur. Mais les pointillés sont aussi utilisés pour représenter certains rayons, diamètres ou l'axe du cylindre. Il n'y a pas d'explications sur l'utilisation de ce type de trait. Le plus souvent les pointillés sont employés pour représenter des traits cachés. Mais on trouve aussi des pointillés représentant des traits apparents.

L'ellipse est utilisée dans la représentation du cylindre de tous les manuels scolaires analysés. Dans presque la totalité des figures l'ellipse est tracée avec l'aide des instruments à dessiner. Mais seulement deux sur les onze manuels font des références à une méthode de tracé d'ellipses. Un de ces manuels dit qu' on peut trouver dans le commerce des pochoirs pour tracer des ellipses. Un second livre décrit une méthode de tracé d'ellipse par 12 points. Les 9 autres manuels ne font aucun commentaire sur le tracé des ellipses.

Presque la totalité des représentations sont réalisées selon une perspective cavalière à 90° . Le rapport de réduction entre les axes des ellipses est approximativement égal à 0,5. Les commentaires qui sont placés à côté des figures font normalement des références seulement aux éléments conceptuels représentés. Il n'y a pas d'explications sur le dessin lui-même. Certains dessins présentent un mélange de perspective, c'est-à-dire, il est possible d'identifier deux perspectives différentes dans une seule représentation. Il y a trois sorte de dessins que nous pouvons considérer comme les plus fréquents. Ils sont reproduits par les figures 1, 2 et 3 ci-après.

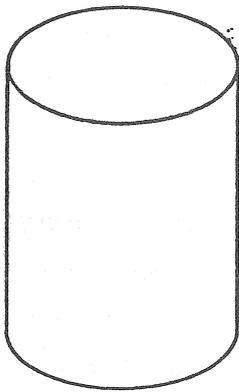


Figure 1

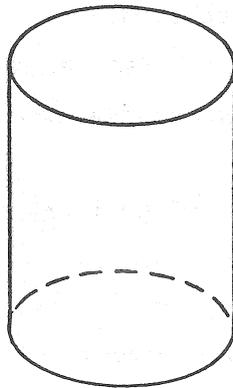


Figure 2

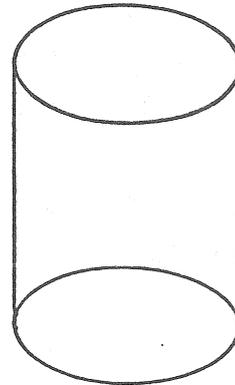


Figure 3

Parmi les onze manuels analysés nous n'avons trouvé que cinq qui font des références au processus de représentation du cylindre. De façon générale on peut dire qu'il n'y a pas de règles suffisamment claires et explicites sur le processus de représentation lui-même. Les éléments de codage des dessins sont fortement négligés dans ces livres.

2. Le dessin du cylindre chez l'élève

Pour observer la représentation du cylindre chez l'élève nous avons proposé en classe de cinquième un problème faisant intervenir les concepts de cylindre et d'une section verticale. Cette expérience a été réalisée avant tout apprentissage. L'énoncé de ce problème est le suivant:

"Une fourme de Lozère, cylindrique, a un diamètre de 10 cm et une hauteur de 8 cm. On peut repérer le centre de la face supérieure. Nous l'appellerons C. On partage cette fourme en deux par un coup de couteau vertical.

1. Dessine la section obtenue si le coup de couteau passe par le centre C.
2. A quelle distance de C faut-il couper pour que la section soit carrée?"

Nous disons qu'il s'agit du problème de la fourme.

Dans la résolution de ce problème, les élèves ont réalisé un nombre important de dessins. Parmi lesquels nous avons séparé ceux représentant exclusivement le cylindre de révolution. Nous avons analysé

de cette façon une collection de 56 dessins du cylindre. On peut distinguer cinq classes de représentations du cylindre que nous appelons: demi-ellipse, ellipse avec pointillés, ellipse en trait continu, segment et cercle. Décrivons ces classes de dessins.

Nous plaçons dans une première classe les dessins constitués d'une ellipse, de deux segments et d'une demi-ellipse. L'ellipse représente le cercle de base supérieur. Ses axes sont parallèles aux bords de la feuille. Les segments représentent deux génératrices et constituent une partie du contour apparent. Ils sont parallèles aux bords de la feuille. La demi-ellipse représente la partie apparente du cercle de base inférieure. La figure 1 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe DEMI-ELLIPSE.

Nous plaçons dans une seconde classe les dessins constitués d'une ellipse en trait continu, de deux segments et d'une ellipse moitié en trait continu et moitié en trait pointillé. L'ellipse en trait continu représente le cercle de base supérieur. Ses axes sont parallèles aux bords de la feuille. Les segments représentent deux génératrices et constituent une partie du contour apparent. Ils sont parallèles aux bords de la feuille. L'ellipse avec pointillés représente le cercle de base inférieur. La figure 2 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe ELLIPSE AVEC POINTILLES.

Nous plaçons dans une troisième classe les dessins composés de deux ellipses en trait continu et de deux segments. Une des ellipses représente le cercle de base supérieur et l'autre le cercle de base inférieur. Les axes de ces ellipses sont parallèles aux bords de la feuille. Les segments représentent deux génératrices et constituent une partie du contour apparent. Ils sont parallèles aux bords de la feuille. La figure 3 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe ELLIPSE EN TRAIT CONTINU.

Nous plaçons dans une quatrième classe les dessins constitués d'une ellipse, de deux segments verticaux et d'un segment horizontal. L'ellipse représente le cercle de base supérieur. Ses axes sont parallèles aux bords de la feuille. Les deux segments verticaux représentent deux génératrices et le segment horizontal représente le cercle de base

inférieur. Ces trois segments constituent aussi une partie du contour apparent. La figure 4 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe SEGMENT.

Nous plaçons dans une cinquième classe les dessins constitués d'un cercle, de deux segments et d'un demi-cercle. Le cercle représente le cercle de base supérieure. Les segments sont parallèles aux bords latéraux de la feuille. Ils représentent deux génératrices et une partie du contour apparent. Le demi-cercle représente la partie apparente du cercle de base inférieure. La figure 5 illustre un dessin de cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de la classe CERCLE.

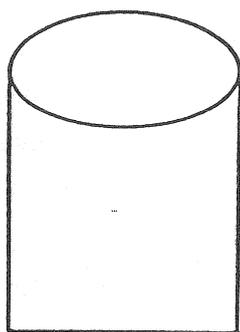


Figure 4

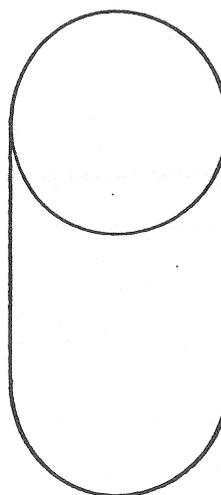


Figure 5

Les dessins de la classe DEMI-ELLIPSE sont plus nombreux que ceux de la classe ELLIPSE AVEC POINTILLE et ceux de la classe ELLIPSE EN TRAIT CONTINU. Les dessins de la classe CERCLE sont aussi nombreux que ceux de la classe DEMI-ELLIPSE.

Il semble que le trait horizontal des dessins de la classe SEGMENT provient d'une difficulté de coordination entre la vue de face et la PC($\frac{1}{2}, 90^\circ$).

Dans une représentation du cylindre par une PC($1, 90^\circ$) nous avons un dessin comme celui de la figure 5. Donc les représentations de la classe CERCLE ne sont pas contradictoires du point de vue technique. L'élève n'a pas, bien sûr, perception de ce fait. D'autre part, nous observons que tous les cercles sont tracés au compas et que tous les élèves qui ont réalisé un dessin de la classe cercle ont réalisé simultanément dans leurs brouillons au moins une autre représentation du

cylindre à main levée représentant le cercle de base supérieure par une "ellipse". Nous estimons donc que les élèves ont une certaine conscience de la "bonne" représentation. Cependant, pour présenter un dessin précis, ils utilisent le compas qui est le seul instrument de dessins à leur disposition. Nous croyons que cette attitude des élèves montre le besoin d'un instrument de dessins pour tracer des ellipses. Nous resumons ces observations par une hypothèse d'enseignement:

L'élève voulant réaliser un dessin précis du cylindre en utilisant un instrument de dessin, représente le cercle de base supérieur par un cercle tracé au compas. L'absence d'un instrument lui permettant de dessiner des ellipses se fait sentir.

3. L'usage d'un pochoir trace-ellipse

Nous avons expérimenté auprès d'élèves du premier cycle l'utilisation d'un pochoir trace-ellipse. Chaque élève avait à sa disposition un pochoir à 35° et une maquette en carton d'un cylindre. Nous avons proposé les trois activités suivantes:

1. Tracer cinq ellipses quelconques en utilisant le pochoir à votre disposition.

2. Tracer trois ellipses avec votre pochoir ayant les grands axes respectivement égaux à 2,5 cm, 4,6 cm et 8,8 cm.

3. Dessiner le cylindre formé par la maquette que tu as devant toi. Dans ce dessin les cercles de base du cylindre seront représentés par des ellipses choisies dans le pochoir.

La première activité permet le contact initial de l'élève avec le nouveau instrument. Cette manipulation n'a présenté pas de difficultés pour l'élève. La seconde activité amène le problème des mesures des axes. Il faut que l'élève utilise simultanément la règle et le pochoir. On observe la nécessité d'une certaine tolérance d'approximation dans les mesures des axes. L'objectif de la troisième activité est de représenter le cylindre en utilisant le pochoir. Les élèves ont fait des bons dessins du point de vue de la coordination graphique des traits. Ils ont considéré également le pochoir comme un instrument "pratique" et "utile" pour représenter le cylindre.

En résumé, la manipulation du pochoir par l'élève du premier

cycle ne présente pas de difficultés immédiates. Cet instrument présente deux restrictions qui nous paraissent les principales: les rapports entre les axes des ellipses sont tous fixés et il faut prévoir une certaine tolérance d'approximation dans les mesures. Nous ne pensons pas que ces restrictions soient trop significatives au niveau du premier cycle. Nous croyons qu'il faut multiplier les expériences.

4. Les conclusions

Nous avons rencontré trois dessins de base représentant le cylindre dans les manuels scolaires. La différence essentielle entre ces trois sorte dessins provient de la représentation du cercle de base inférieur. Cet élément du cylindre peut être représenté par une des trois courbes suivantes: une demi-ellipse, une ellipse moitié en pointillé ou une ellipse en trait continu.

Parmi les dessins réalisés par les élèves, on observe l'existence de cinq représentations différentes: les trois qui ont été rencontrées dans les manuels scolaires et deux autres qui montrent quelques difficultés des élèves. La première consiste dans la représentation du cercle de base inférieur par un segment horizontal. Il s'agit, pour la seconde, de la représentation du cercle de base supérieur par un cercle tracé au compas. Il nous faut prendre en compte ces deux représentations spontanées non prévues par les manuels.

Il y a dans les manuels scolaires la présence effective d'un dessin du cylindre qui peut être considéré comme une configuration du cylindre. Ce dessin est illustré par la figure 2, mais il n'y a pas de règles de représentation suffisamment explicites et claires dans ces livres.

Nous avons énoncé une hypothèse d'enseignement portant sur l'importance pour l'élève de la réalisation d'un dessin précis avec des instruments. A priori, le pochoir trace-ellipse semble offrir des d'utilisation dans le premier cycle.

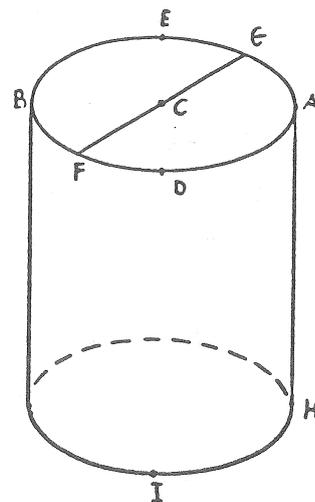
QUELQUES EXERCICES SUR LES CORPS RONDS

1. Une fourme de Lozère, cylindrique, a un diamètre de 10 cm et une hauteur de 8 cm. On peut repérer le centre de la face supérieure. Nous l'appellerons C. On partage cette fourme en deux par un coup de couteau vertical.

1. Dessine la section obtenue si le coup de couteau passe par C.
2. A quelle distance de C faut-il couper pour que la section soit carrée?

2. Le dessin ci-contre représente un cylindre de diamètre 7 cm et hauteur 8 cm. Les lettres sur le dessin représentent des points de ce cylindre. Le centre de la face supérieure est repéré par C.

Quelles sont les longueurs réelles des segments:
 [AB]; [AH]; [AD]; [DE]; [BH]; [EI]; [DI] et [FG]?

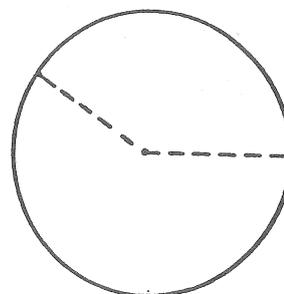


3. Un ballon flottant sur l'eau a un diamètre de 48 cm. Il est enfoncé de $\frac{1}{6}$ de sa hauteur. Le contact avec la surface de l'eau est un cercle. Quel est le rayon de ce cercle?

4. Un verre a la forme d'un tronc de cône. La base inférieure est un cercle de diamètre 5 cm et la base supérieure est un cercle de diamètre 15 cm. La hauteur est de 14 cm. Un prisme droit a pour base un triangle équilatéral de côté 8,7 cm. La hauteur de ce prisme est 7 cm. Il est posé verticalement sur une table.

Peut-on cacher complètement ce prisme en retournant le verre sur lui?

5. Un disque en carton de 15 cm de rayon est découpé en deux morceaux comme le montre la figure ci-contre. On fabrique deux chapeaux de clown (en forme conique) à partir des deux morceaux de disque. Un des deux chapeaux doit avoir une hauteur de 12 cm.



Quelle est la hauteur de l'autre chapeau?

6. On fabrique un chapeau de clown (de forme conique) à partir d'un demi-disque en carton de 10 cm de rayon.

Quels seront le rayon de base et la hauteur de ce chapeau?

7. Imaginons un verre parfaitement conique de 9 cm de hauteur. Le bord du verre est un cercle de 5 cm de diamètre. Il est rempli d'un liquide jusqu'à un tiers de sa hauteur.

Quelle est l'aire de la surface supérieure de ce liquide?

8. Sur une sphère de 10 cm de rayon on pose un cône creux ayant 10 cm de diamètre de base et 20 cm de hauteur. Démontrer que le volume du solide ainsi formé est strictement inférieur à $1500\pi \text{ cm}^3$.

9. Un cube de 10 cm de arête est posé sur une table. On le recouvre d'un cône qui repose aussi sur la table. Le diamètre du cercle de base est une fois et demi plus grand que la diagonale d'une face du cube.

Quelle est la plus petite hauteur possible pour le cône?

10. Dans un cube en matière transparente de 10 cm de côté est inscrit un cône. La base circulaire du cône est inscrite dans une face du cube. Le centre de la face opposée à cette face est le sommet du cône.

Faites un dessin montrant comment est ce cube?

11. Un cône a une hauteur de 4 cm et le rayon du cercle de base est 2 cm. On partage ce cône par un plan parallèle au plan de base de telle sorte que les volumes des deux parties obtenues soient égaux.

A quelle hauteur de la base le cône a été coupé?

12. Parmi les dessins ci-dessous, repère par une croix (x) celui qui correspond à un patron de cône de révolution.

