LA MESURE DES GRANDEURS

Mythe, Problématique et Culture

(Georges LION, IREM de LIMOGES)

Constatant avec inquiétude les difficultés croissantes que rencontre le recrutement de jeunes mathématiciens, certains de nos collègues se préoccupent d'améliorer "l'image de marque" de notre discipline. En notre siècle de publicité tapageuse, la tentation est grande de vouloir "vendre" des mathématiques comme on vendrait des imperméables au coeur du Sahara. Ne serait-il pas plus simple, et plus honnête, de présenter les mathématiques telles qu'elles sont, ou telles que les historiens nous en enseignent le cheminement ? Dans cette perspective il pourrait être intéressant de tirer de l'oubli des conceptions que presque tout le monde accepte, mais dont cependant personne ne parle.

J'expliquerai donc d'abord pourquoi, parmi les "mythes", la mesure des grandeurs me semble occuper une place de choix ; puisque l'enseignement ne saurait être étranger à notre sujet, je présenterai ensuite des exemples d'optimisation, en tant que problématique naturelle de la mesure des grandeurs. Enfin j'exprimerai quelques réflexions sur le bénéfice que pourraient tirer les élèves d'une culture plus fréquente de la mesure des grandeurs.

Dans un livre récent (1) Rudolf B'Kouche évoque le rôle historique primordial de la mesure des grandeurs. Il y a une quarantaine d'années, les programmes de 1ère faisaient place à un enseignement systématique des liens entre mathématiques, et mesure des grandeurs. Un peu rebutant par son côté axiomatique, cet enseignement a été totalement abandonné, au lieu d'être amélioré. De nos jours nombre de collègues pensent que la mesures des grandeurs est un chapitre de la théorie de l'intégration ! Les puristes sont même d'avis que les nombres, et plus généralement les êtres géométriques, ont tout à gagner d'être privés de tout lien avec leur origine concrète, source d'approximations, voire d'erreurs, pour l'élève. Mal interprété, le mouvement mathématique du début de ce siècle peut encourager une telle méfiance. Cependant deux mathématiciens de grand renom ont jugé bon d'insister sur l'importance de la mesure des grandeurs. Il s'agit d'abord d'Henri Lebesgue dans un fascicule tout entier consacré à cette notion (3), et de Nicolas Bourbaki dans un paragraphe de ses éléments (2). Actuellement, sans être considéré comme subversif, l'enseignement de la mesure des grandeurs cause un certain malaise. Qui ne se souvient des angoises ressenties par beaucoup il y a 20 ans à propos de la mesure des angles ?

Des présentations simples existent pourtant :

- par l'intermédiaire de la mesures des aires des secteurs circulaires.

- prenant momentanément l'angle plat pour unité, en définissant , pour un angle donné, des valeurs approchées de la forme $\frac{N}{2^n}$, accessibles aux instruments puisque l'on sait, à la règle et au compas, tracer la bissectrice d'un angle.

L'adoption de l'un de ces points de vue de bon sens aurait en outre l'avantage d'assurer une meilleure continuité entre les programmes des collèges et ceux des lycées.

Mais parmi les grandeurs mesurables je voudrais insister spécialement sur les aires pour les deux raisons suivantes :

Le plan est le contexte le plus courant dans l'activité géométrique débutante, et l'aire représente la "quantité de matière plane".

Les problèmes d'aire sont souvent plus faciles que leurs homologues sur les longueurs, et se prêtent à une plus grande souplesse quant aux transformations qui les respectent.

Voici trois problèmes d'optimisation d'aire :

1) Un triangle ABC étant donné, d'angles aigus, trouver parmi les triangles A'B'C' tels que $A \in [B', C']$, $B \in [A', C']$, $C \in [A', B']$, celui pour lequel le rapport $\frac{\text{aire}}{\text{périmètre}}$ est maximum.

(l'intérêt économique de ce problème peut être facilement mis en évidence).

Solution

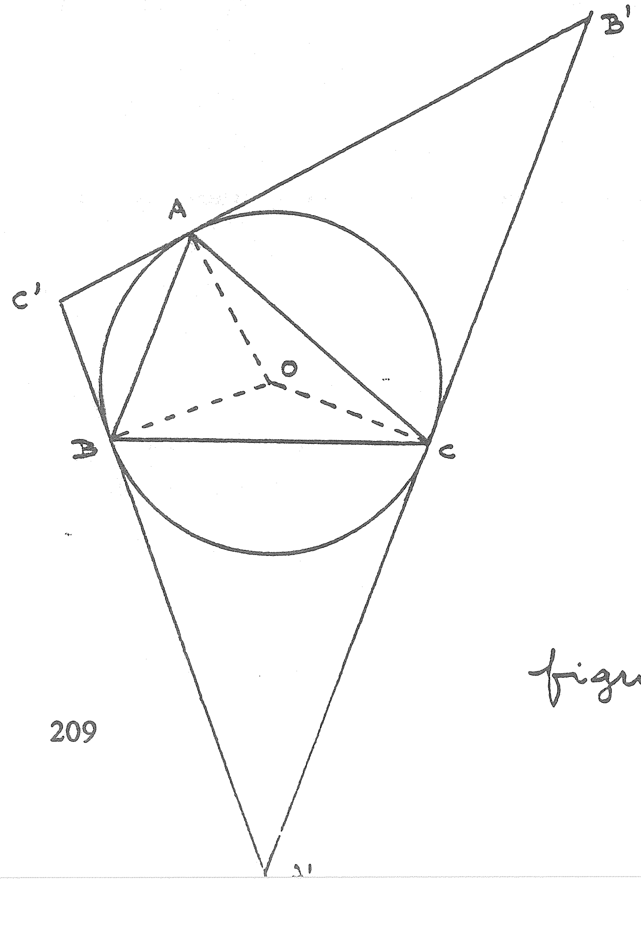


figure 1

Soit O le centre du cercle circonscrit Γ à ABC. O est intérieur à ABC, donc à tout triangle A'B'C'.

Posons $\mathcal{A}$ = aire de A'B'C', $\mathcal{P}$ = périmètre A'B'C', R = rayon de Γ : On a alors :

$\mathcal{A}$ = aire OA'B' + aire OB'C' + aire OA'C'.

$$\mathcal{A} \leq \frac{1}{2}\ (R \times A'B' + R \times B'C' + R \times A'C') = \mathcal{P}\frac{R}{2}$$

Le rapport $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}}$ est donc majoré par $\frac{R}{2}$ et atteint cette valeur si, et seulement si, Γ est <u>inscrit</u> dans A'B'C' ; les angles de ce triangle valent alors :

$$\hat{A}' = \pi - 2\hat{A}\ ,\ \hat{B}' = \pi - 2\hat{B}\ ,\ \hat{C}' = \pi - 2\hat{C}$$

Remarque : Un problème plus classique consiste à montrer que le rapport $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}^2}$ est maximum pour tout triangle équilatéral (voir Colloque IREM - Géométrie Marseille 1984).

2) Un point ω est donné, intérieur au triangle ABC. On considère les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 respectivement circonscrits aux triangles

ω BC , ω AC , ω BA

Parmi les triangles A'B'C' tels que A $\in$ [B', C'], B $\in$ [A', C'], C $\in$ [A, B] et A' $\in \Gamma_1$, B' $\in \Gamma_2$, C' $\in \Gamma_3$

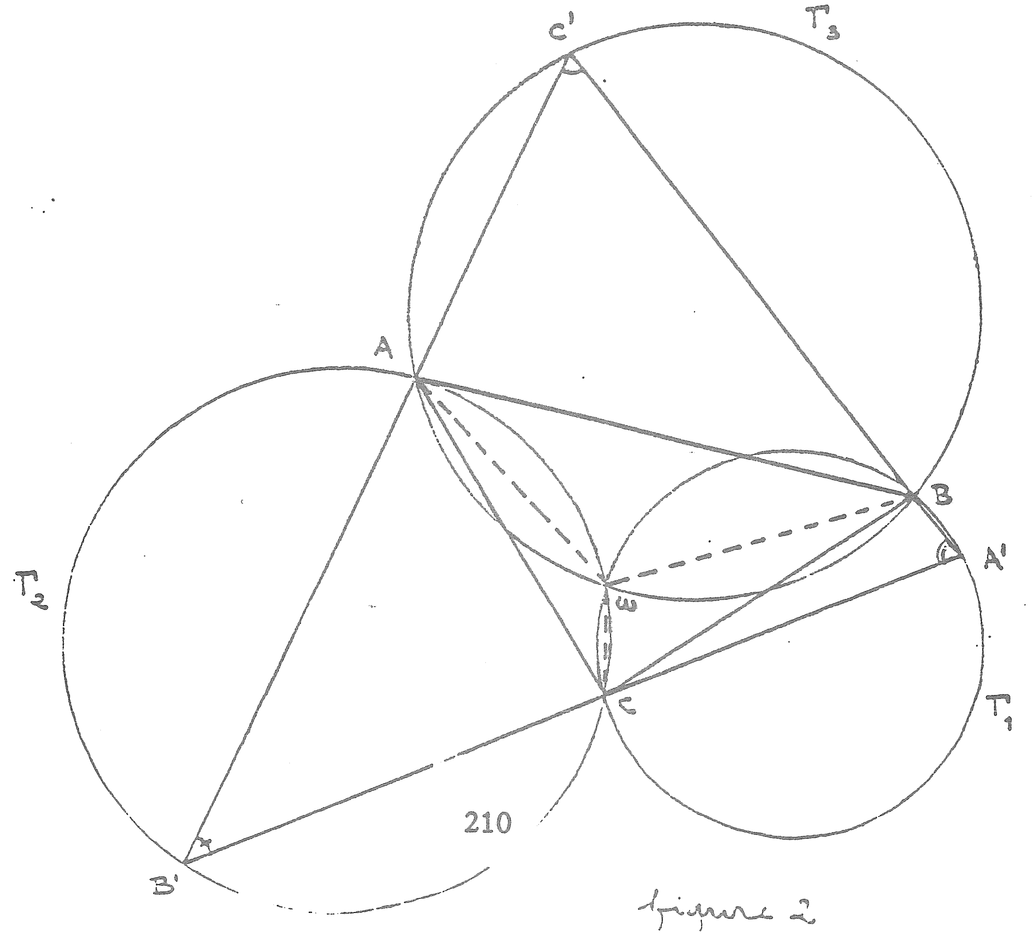


figure 2

trouver celui dont l'aire est maximum.

Solution . Les angles d'un tel triangle étant respectivement égaux a

$\pi - \widehat{B\omega C}$, $\pi - \widehat{A\omega C}$, $\pi - \widehat{B\omega A}$

l'aire $\mathcal{A}$ et le périmètre $\mathcal{P}$ sont simultanément maximum, car le rapport $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}^2}$ est constant. On a de plus :

$$\mathcal{A} \leq \frac{1}{2} (B'C' \times \omega A + A'B' \times \omega C + A'C' \times \omega B)$$

Or il existe 3 constantes α, β, γ telles que

$$B'C' = \alpha \mathcal{P} \quad , \quad A'C' = \beta \mathcal{P} \quad , \quad A'B' = \gamma \mathcal{P}$$

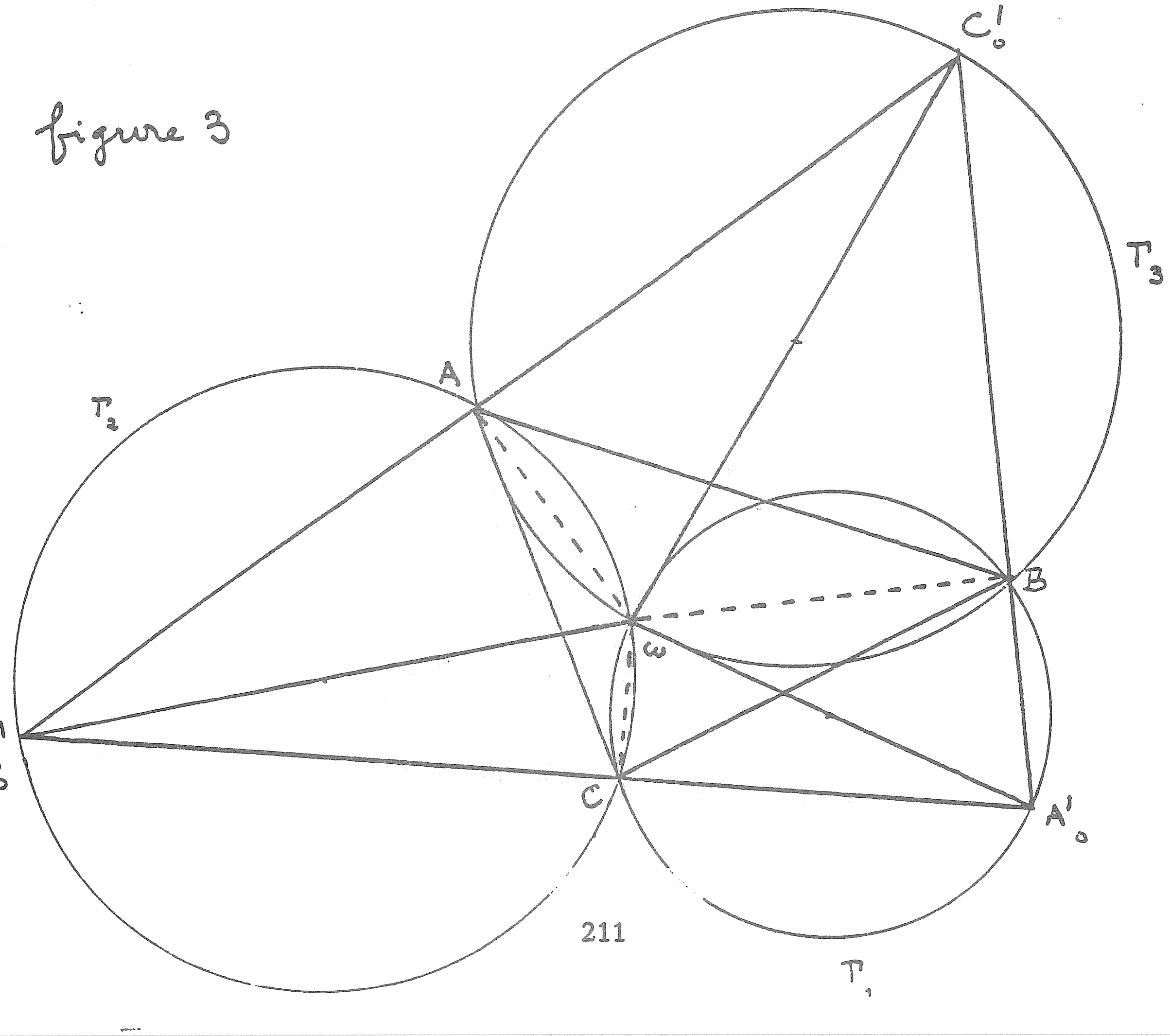
d'où $\mathcal{A} \leq \frac{\mathcal{P}}{2} (\alpha \omega A + \beta \omega B + \gamma \omega C)$

ou, puisque $\mathcal{A} = K \cdot \mathcal{P}^2$, $\mathcal{P}$ est majoré par la constante

$\frac{1}{2K} (\alpha \omega A + \beta \omega B + \gamma \omega C)$, qui sera le maximum de $\mathcal{P}$ si elle est atteinte. Or les perpendiculaires respectives à (ωA), (ωB) , (ωC) se coupent 2 à 2 en les points diamétralement opposés à ω sur les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 .

Le triangle $A'_oB'_oC'_o$ obtenu maximise $\mathcal{P}$ donc aussi $\mathcal{A}$.

figure 3



Remarque : Si les valeurs des angles donnés sont telles que :

$$\hat{A}' = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} , \quad \hat{B}' = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} , \quad \hat{C}' = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

le point ω est à la fois le centre du cercle inscrit à ABC et l'orthocentre de A'B'C', tandis que A', B', C' sont les centres des cercles exinscrits. Rappelons qu'en sens inverse, si A'B'C' était donné, ABC minimiserait le périmètre des triangles ayant un sommet sur chacun des côtés de A'B'C'.

3) Un point I étant donné à l'intérieur d'un secteur angulaire (Ox, Oy), trouver $P \in Ox$, $Q \in Oy$, tel que $I \in [P, Q]$, et que l'aire du triangle POQ soit minimum.

On peut conduire la phase de recherche de la manière suivante. Modifiant l'énoncé on peut se remémorer que si P et Q varient de façon que l'aire de OPQ reste égale à une constante K, la droite (PQ) reste tangente à une hyperbole $\mathcal{H}_k$ de centre O, d'asymptotes Ox et Oy, le point de contact étant situé au <u>milieu</u> du segment [P, Q]

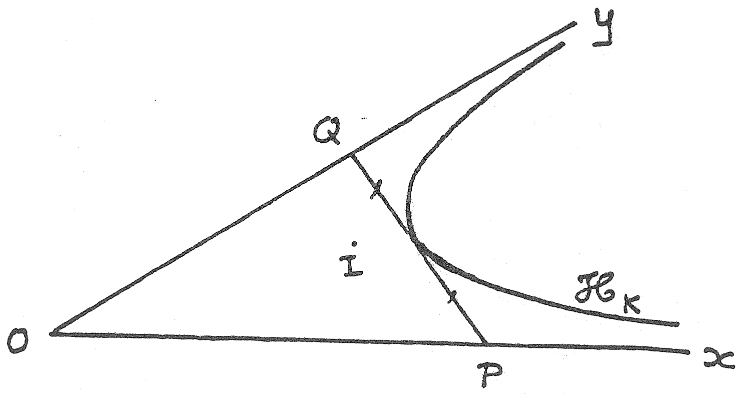


figure 4

Si l'on multiplie la constante K par r^2, $\mathcal{H}_k$ est transformée par l'homothétie de centre O et de rapport $r > 0$.

Réintroduisant le point I, la plus petite valeur de K possible sera donc celle qui correspond au cas où $\mathcal{H}_k$ passe par I ; on est donc ramené à chercher P et Q tel que I soit le milieu de [P, Q].

Pour résoudre ce nouveau problème, on pense naturellement à un $\frac{1}{2}$ parallélogramme de centre I, de sommet O et de côtés portés par Ox et Oy.

Moins naturellement on peut utiliser une symétrie centrale de centre I.

La position obtenue $(P_o\ Q_o)$ réalise bien le minimum comme le montre la figure (*)

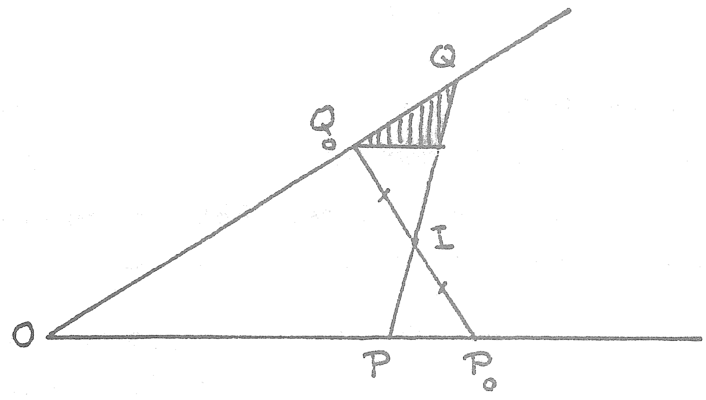


figure 5

Je montrerais l'intérêt d'un état d'esprit tourné vers la mesure des grandeurs, en commentant un fait récent vécu lors du "Tournoi Mathématique du Limousin", au cours des épreuves concernant les élèves de 1ère et de Terminale.

L'énoncé demandait de comparer d'abord les aires, et ensuite les périmètres des rectangles dessinés sur la figure

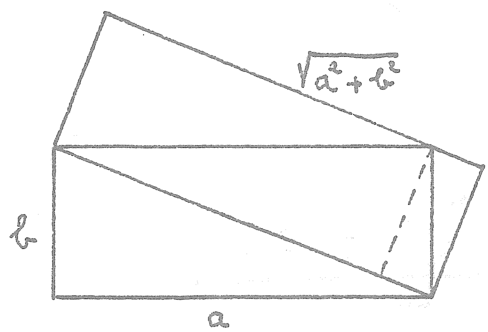


figure 6

L'intuition des élèves leur a suffit pour résoudre la 1ère question (les aires sont égales). La seconde en revanche a été rarement bien traitée.

Aucune solution, même incomplète, n'a évoqué la croissance de la fonction

$$x \longmapsto x + \frac{ab}{x},$$

pour $x \geq \sqrt{ab}$.

Il s'agit pourtant d'une fonction que <u>tous</u> les élèves avaient étudiée, mais le sens des résultats de cette étude n'avait sûrement pas été assez bien dégagé.

Pour "enfoncer le clou" encore un peu, signalons que, même sans recours à la dérivée, on peut fort bien démontrer graphiquement la croissance évoquée ci-dessous.

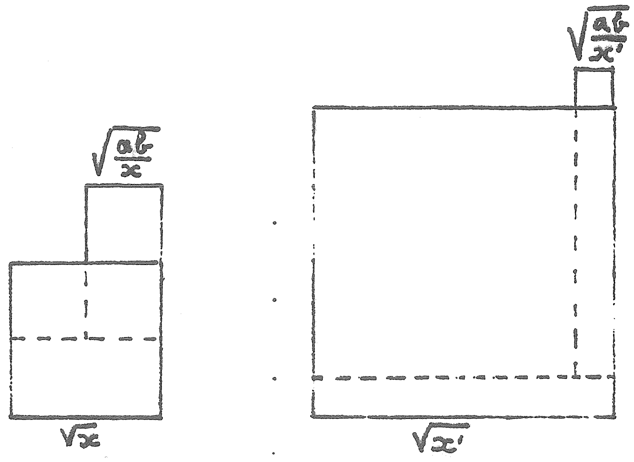


figure 7

Dans ce genre d'exercices on pourrait s'appuyer sur les bases qu'ont pu acquérir les élèves quant à l'interprétation d'un nombre comme une mesure de longueur, mais aussi comme mesure d'aire. Descartes, et la création du système métrique, nous ont convaincus d'abandonner toute distinction de "nature de nombres", pourquoi ne pas en profiter ? Conscient d'avoir seulement effleuré mon sujet, je voudrais au moins encourager tous ceux qui, comme moi, "voient" les Mathématiques ailleurs que dans la seule recherche de la virtuosité opératoire.

BIBLIOGRAPHIE

(1) B'KOUCHE et LEHMANN
Introduction à la géométrie (PUF)

(2) BOURBAKI Topologie générale chap. V (Hermann)

(3) LEBESGUE La mesure des grandeurs (Blanchard).

(*) Voici deux problèmes voisins sur des longueurs :

Trouver P et Q , tels que OP + PQ + OQ (resp. PQ) soient minimum.
Le 1er se résoud facilement à l'aide du cercle exinscrit, le second est d'un degré algébrique plus élevé.