

LA GEOMETRIE DES EQUILIBRES

Après avoir réfléchi sur la notion d'équilibres au sein du groupe Géométrie de l'IREM de Rouen, nous l'avons introduite et testée en classe de seconde au cours de l'année scolaire 88/89. C'est une réflexion sur les portées de cette expérience que nous vous proposons.

A notre sentiment, renforcé par les différentes interventions qui précèdent cet exposé, deux tendances s'affrontent régulièrement quant à l'enseignement de la géométrie. En caricaturant à l'extrême, l'une accentue l'importance du raisonnement et de la rigueur, l'autre privilégie l'étude et la connaissance des objets mathématiques. Ces deux écoles induisent des pédagogies très différentes qui s'opposent sur tous les terrains, y compris celui de l'idéologie. La première construit (ou admet) a priori un cours dont se dégagent les méthodes utiles pour les exercices. La seconde, inversement, on définit les concepts qu'après avoir posé des problématiques ("vrais" problèmes concrets etc...).

Plutôt que de prendre parti pour l'un ou l'autre camp, exercices illustrant un formalisme autre problèmes ouverts, plutôt que de chercher un compromis/consensus, nous préférons un autre cheminement.

Nous présentons dans ce papier un premier essai de synthèse, accompagné d'exemples.

I. Dans un premier temps, les exercices sur les équilibres sont faits sur les grandeurs concrètes et par des constructions. En voici un exemple :

Soit $A B C$ un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 6$ et $AC = 5$.

On considère $G : (A, 3) (B, -1)$ et $H : (B, 1) (C, 2)$.

Les droites (GH) et (AC) se coupent en K . Cherchons à calculer AK .

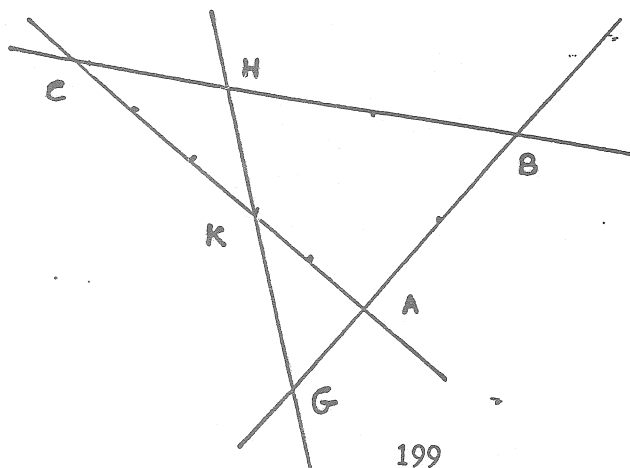


fig 1

Les équilibres :

$$\sigma_1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline G & A & B \\ \hline -2 & 3 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \sigma_2: \begin{array}{|c|c|c|} \hline H & B & C \\ \hline -3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

traduisent les hypothèses ; on peut alors lire directement :

$$B : (G, -2) (A, 3) \quad \text{et} \quad B : (C, 2) (H, -3) \quad \text{soit} \quad B : (C, -2) (H, 3)$$

Puisque

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BG}} = \frac{2}{3} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}$$

les droites (AH) et (CG) sont parallèles, donc :

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CG}} = -\frac{2}{3}$$

d'où K : (A, 3) (C, 2) , qui conduit à l'équilibre :

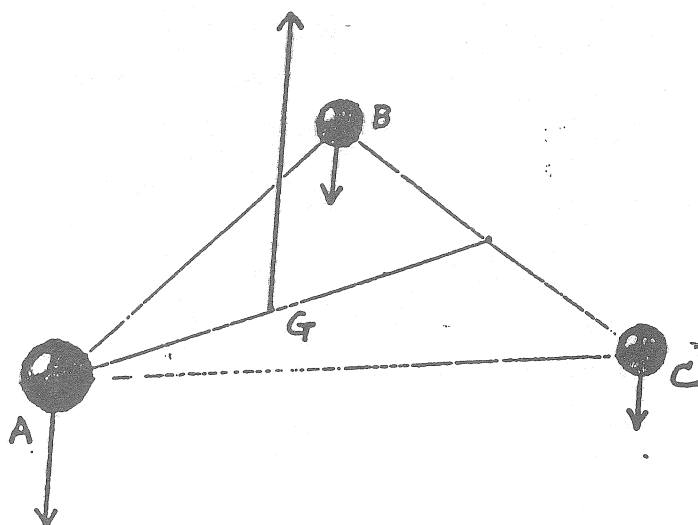
K	A	C
-5	3	2

Par suite A est barycentre de (K, -5) (C, 2) , ce qui s'écrit :

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} = \frac{2}{5} \quad \text{d'où} \quad AK = \frac{2}{5} AC \quad \text{et} \quad AK = 2$$

Les équilibres sont présentés d'un point de vue mécanique en lieu avec le programme de physique.

Fig. 2



pour

G	A	B	C
-4	2	1	1

L'algèbre des équilibres, c'est-à-dire les calculs sur les équilibres se réduisent à des problèmes d'élimination par combinaison linéaire. mais c'est l'étude de la figure qui détermine le choix des points à éliminer. L'élève reconnaît d'abord les configurations élémentaires qu'il sait ensuite interpréter analytiquement (en termes d'équilibres).

Exemple : . Construction du barycentre pour la propriété de Thalès.

- . barycentre associé (cf. figure 3)
- . trapèze complet

Le balancement -utilisation algébrique/retour synthétique à la figure- évite à l'élève de tourner en rond comme souvent avec les vecteurs.

Fig. 3 : Construction de $G : (A,a) (B,b)$
"par Thalès"

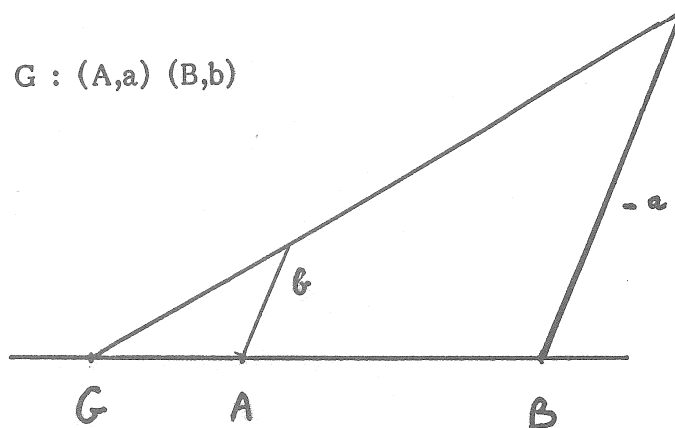


Fig 3 bis : Construction de $H : (A,a) (B,b)$ ("associé" de G)

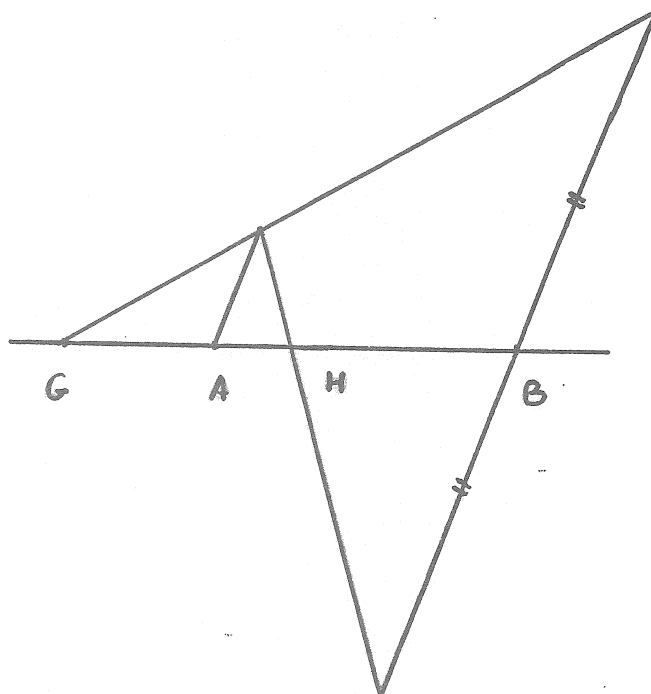
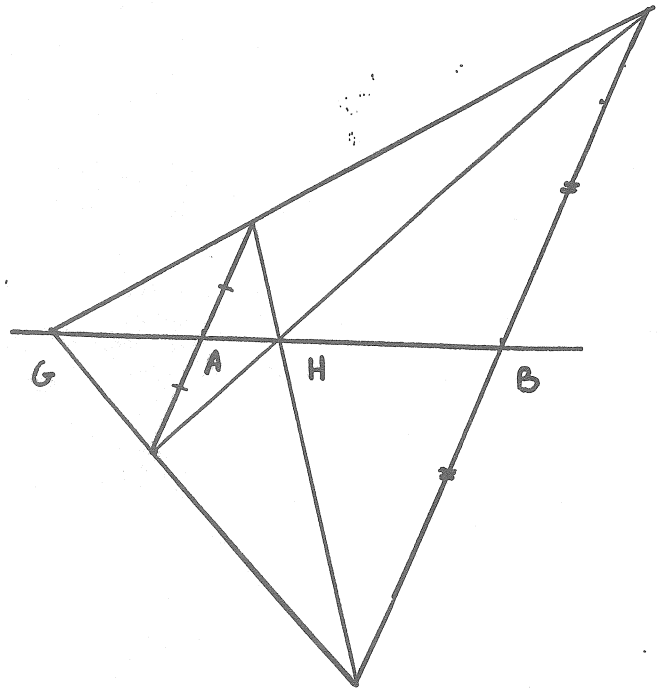


Fig. 3 (ter) : l'homogénéité

$H : (A, -a) (B, b)$

$H : (A, a) (B, -b)$

permet de retrouver la propriété
des milieux dans le trapèze complet.



II. Dans un deuxième temps, la familiarisation acquise sur des exemples à coefficients numériques simples, avec des techniques de superposition et d'élimination permet d'élargir les champs d'application de cette notion.

a) Sur la figure 3ter (trapèze complet) on interprète les deux barycentres associés G et H comme les centres d'homothétie du trapèze.

b) La généralisation de cette pratique à l'espace donne une présentation "naturelle" des règles d'incidence.

Exemple : Soit ABCD un tétraèdre, I dans le plan de la face ABD, J dans celui de la face BCD. Construire quand elle existe l'intersection de la droite (IJ) avec le plan de la face ABC.

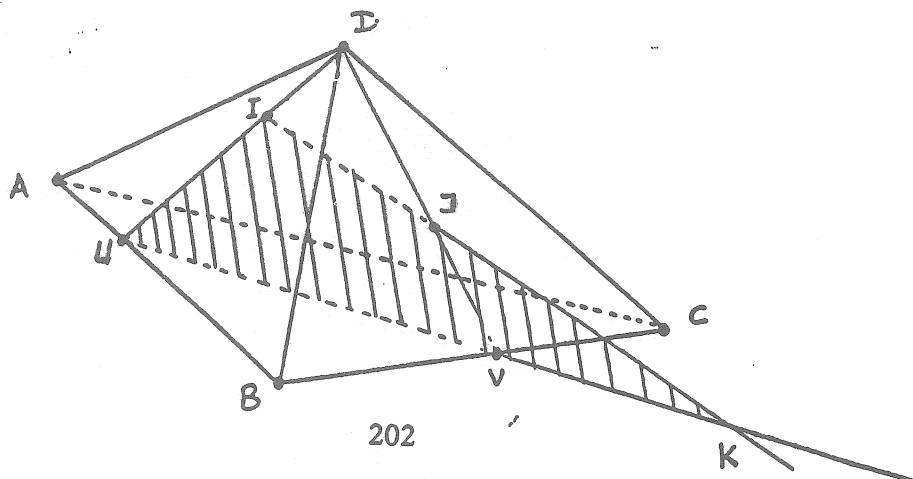


Fig. 4 :

$$\sigma : \begin{array}{c|c|c|c|} I & A & B & D \\ \hline -1-\alpha-\beta & \alpha & \beta & 1 \end{array}$$

$$\sigma' : \begin{array}{c|c|c|c|} J & C & B & D \\ \hline -1-\gamma-\delta & \delta & \gamma & 1 \end{array}$$

En soustrayant

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} I & J & A & B & C \\ \hline -1-\alpha-\beta & 1+\gamma+\delta & \alpha & \beta-\gamma & -\delta \\ \hline \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ K & & & K & \end{array}$$

En redécomposant K comme barycentre de

$$\begin{array}{ccc} (A, \alpha) & (B, \beta) & (B, -\gamma) \quad (C, -\delta) \\ \hline & & \\ U = (AB) \cap (IJ) & & V = (BC) \cap (IJ) \end{array}$$

c) Le produit scalaire profite aussi de cette extension. En 1ère S ou en Terminale, le professeur peut partir du produit scalaire pour aller vers les équilibres ou faire l'inverse.

Exemple : $\boxed{\text{produit scalaire}} \longrightarrow \boxed{\text{équilibre}}$

Soit k un réel strictement positif et différent de 1.

La ligne de niveau $\{M, MA = MB\}$ est classiquement le cercle de diamètre $\{IJ\}$ avec $I : (A, 1) (B, k)$ et $J : (A, 1) (B, -k)$ (cf. barycentres associés). Une autre lecture de cette ligne $\{M \in P, MA^2 - k^2 MB^2 = 0\}$ permet de préciser le centre O du cercle barycentre de $(A, 1) (B, -k^2)$

D'où l'équilibre

$$\begin{array}{c|c|c|} O & A & B \\ \hline -1+k^2 & 1 & -k^2 \end{array}$$

O milieu des barycentres associés I et J .

.../...

$$|\text{équilibre}| \longrightarrow |\text{produit scalaire}|$$

Soit O_C le centre du cercle d'Apollonius d'un triangle ABC opposé au sommet C .

Comme
$$\begin{array}{c|c|c} O_C & A & B \\ \hline -1+k^2 & 1 & -k^2 \end{array}$$
 avec $k = \frac{CA}{CB}$ compte tenu des propriétés des bissectrices.

On peut, par superposition d'équilibres démontrer l'alignement de O_A , O_B et O_C , etc...

III. Dans un troisième temps, l'introduction de paramètres permet de retrouver toute la géométrie des lignes du triangle

a) Elle illustre aussi le balancement élimination/composition des homothéties :

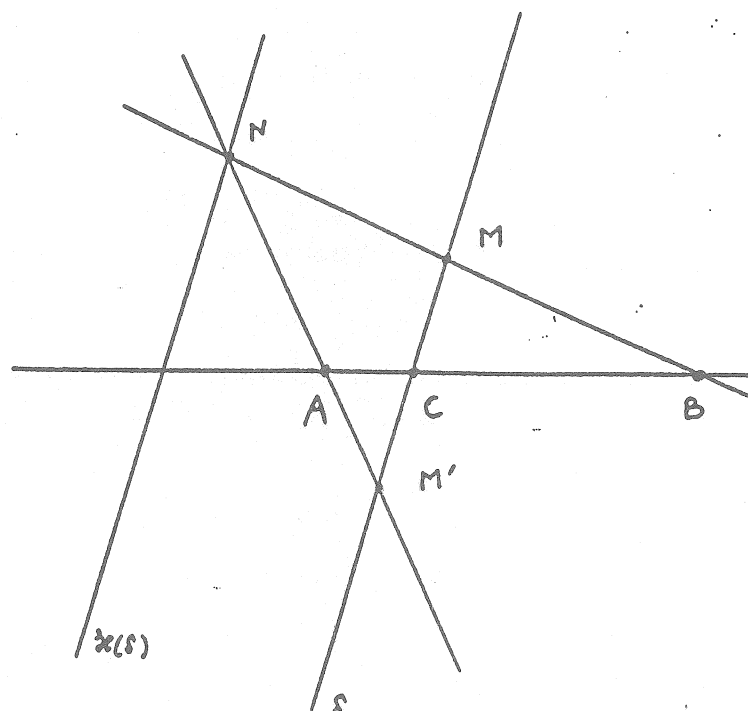
Exemple :

Soit 3 points alignés A, B, C , deux à deux distincts, et δ une droite sécante en C à (AB) . Pour tout point M de δ , on construit $M' : (C,1) (M,u)$, u désignant un réel fixé différent de 0 et de -1.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (BM) et (AM') soient sécantes en N .

2) Cette condition étant vérifiée, déterminer le lieu du point N .

fig 5:



1) Il existe un réel v non nul, unique, tel que

$$A : (B, v) \quad (C, 1)$$

ce qui ajouté à la définition de M' permet d'écrire les équilibres :

C	M	M'
1	u	-1 - u

C	B	A
-1	-v	1 + v

Nous obtenons par élimination de C l'équilibre de 4 points :

M	B	M'	A
u	-v	1 - u	1 + v

Ainsi le point N existe si et ssi u et v sont différents.

dans ce cas $N : (M, u) \quad (B, -v)$ donc

$$B : (M, u) \quad (N, v-u)$$

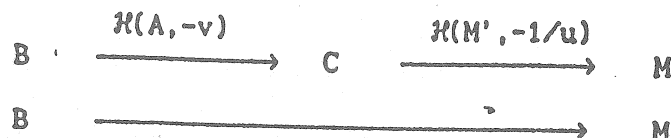
$$\text{c'est à dire} \quad \overrightarrow{BN} = \frac{u}{u-v} \cdot \overrightarrow{BM}$$

N est l'image de M dans l'homothétie de centre B et de rapport

$\frac{u}{u-v}$ (non nul) et décrit l'image de δ par cette homothétie.

Remarque:

La démonstration par superposition d'équilibres peut être remplacée par une démonstration n'utilisant que l'homothétie quand on a compris que superposer les équilibres revient à composer les homothéties.



Si v est différent de u l'homothétie composée est de rapport v/u , son centre est à l'intersection de la droite (BM) et de (AM') la ligne des centres.

Soit $B \xrightarrow{H(N, v/u)} M$
c'est à dire à l'équilibre

B	M'	N
$\frac{v}{u}$	-1	$1 - \frac{v}{u}$

qui conduit au même raisonnement final.

b) Elle intervient enfin dans l'étude des coniques :

- * Les équilibres, leur invariance par projection, les "barycentres associés" allègent la présentation des coniques par la définition mono ($MF = eMH$) et les cercles d'Apollonius.

- ** Ils permettent de donner une traduction barycentrique de l'Homologie qui intervient dans l'exposé des coniques par section de cône.

Les sujets de recherche sont nombreux, nous avons aussi développé des "équilibres complexes" retrouvant ainsi l'essentiel de la géométrie métrique du plan comme une géométrie affine de C !

Bibliographie : équilibres et barycentres associés.

équilibres complexes

équilibres de l'espace.

IREM ROUEN (HAMEL - LACHAUX - SINEGRE).