

COMPTE RENDU DE L'INTERVENTION
DU GROUPE "GEOMETRIE" DE L'I.R.E.M DE ROUEN
AU COLLOQUE DE PORT D'ALBRET
ATELIER SUR LE THEME :
"EQUILIBRES ET BARYCENTRES"

ANIMATEURS : GILDAS LE HIR & THIERRY HAMEL

Mr Pinet ayant auparavant traité la notion d'équilibre sous son aspect théorique au travers de l'ouvrage conçu par l'I.R.E.M de Bordeaux sur ce sujet, nous avons voulu orienter notre propre exposé vers son aspect "appliqué", à l'aide d'une série d'exercices - ci-jointe - déjà testée en classes de 2nde et 1èreS notamment au Lycée de Pont-Audemer (27) en particulier.

Les premiers exercices (n°1 à 4), choisis délibérément de niveau élémentaire ont permis aux non-initiés de laisser progressivement de côté la notation vectorielle pour approcher la notation tabulaire. Les propriétés linéaires, algébriques des équilibres se déduisirent d'elles-mêmes après quelques manipulations, manipulations qui par ailleurs devaient convaincre de la rapidité avec laquelle un élève moyen aurait pu parvenir à résoudre par exemple un problème d'alignement, par exemple un problème de parallélisme.

Nous n'avons pu résister au plaisir de redémontrer le théorème de Céva mais pour mieux insister sur sa variante "barycentrique" - cf n°8 - la plus directement applicable, la plus facilement appliquée par nos jeunes lycéens confrontés aux problèmes de concurrence (ou de parallélisme).

La recherche de lieux de points - cf n°12, 13 - nous conduisit fatalement à faire le lien entre homothéties et équilibres. A ce propos et à la suite de l'analyse d'un de nos attentifs auditeurs, il fut admis sans problème que la méthode de résolution "par équilibres" n'était pas nécessairement plus économique que celle "par les homothéties", loin de là. On aura admis de la même manière que pour la beauté du geste ou peut-être sa nouveauté, il ne fallait pas toutefois se priver d'exposer la première.

Le temps nous a manqué et nous n'avons pu que survoler le point de Lemoine au croisement des symédianes du triangle - cf n°16 -, occasion de mettre encore une fois en valeur le fameux "Céva barycentrique".

Pondérés, cela va de soi, vos humbles serviteurs conclurent en laissant planer dans l'air ... en équilibre bien-sûr... une dernière réflexion sur le brillant avenir, promis sans aucun doute, à cette notion-là...

... Et se retirèrent à pas feutrés pour aller suivre Marcel Berger.

1) On donne sept points équidistants A, B, C, D, E, F, G alignés dans cet ordre . Déterminer les coefficients qui permettent d'exprimer les points C et G comme barycentre de :

a) B et E b) A et E c) B et D d) B et F e) A et D f) F et E

2) Soit A, B, C trois points non alignés .

Déterminer les coefficients qui permettent d'exprimer G comme barycentre de deux ou trois des points ci-dessus sachant que :

a) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ b) $3 \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot \overrightarrow{BG}$ c) $-2 \cdot \overrightarrow{AB} + 4 \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AG}$

d) $-5 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{GA} = \vec{0}$ e) $2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$

Dans le cas c) , montrer que les droites (AB) et (CG) se coupent en un point I que l'on précisera comme barycentre de A et B

Dans le cas e) , étudier l'intersection des droites (AB) et (CG) .

3) Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5 . Construire les barycentres A' de (B,1) (C,2) , B' de (C,2) (A,7) et C' de (B,1) (A,-7) . Montrer que A', B' et C' sont alignés et exprimer B' comme barycentre de A' et C' .

4) Soit ABC un triangle tel que AB = 3 , BC = 6 et AC = 5 .

On considère les barycentres G de (A,3) (B,-1) et H de (B,1) (C,2)

Les droites (GH) et (AC) se coupent en K .

Calculer la distance AK .

5) Théorème de Ménélais : Soit ABC un triangle , A' , B' et C' trois points appartenant respectivement aux côtés (BC) , (CA) et (AB) .

A' , B' et C' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1$$

6) ABCD est un parallélogramme , I est le milieu de [AB] , J celui de [CD] , K est le barycentre de (A,2) (D,3) , la droite (IK) coupe (BC) en M et (CD) en L , la droite (JK) coupe (AB) en O et (BC) en P .

Déterminer les points comme barycentres des points suivants :

K de O et J ; P de K et J ; J de O et P ; K de L et I ; L de K et M ; M de B et C ; A de O et B ; J de L et D ; P de B et M .

Les droites (OL) et (IJ) se coupent en N , trouver le point N comme barycentre de O et L , puis de I et J , puis de A , B et C .

7) Soit ABC un triangle , G le barycentre de (A,a) (B,1) et (C,2) .

Préciser suivant les valeurs de a l'intersection des droites :

1) (GA) et (BC) 2) (GB) et (CA) 3) (GC) et (AB)

8) Théorème de Céva : Pour que trois droites issues des sommets d'un triangle ABC soient concourantes il faut et il suffit que leurs points d'intersection A' , B' et C' avec les côtés opposés vérifient la

relation :
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$$

" Théorème de Céva barycentrique " :

ABC est un triangle , A' , B' et C' trois points appartenant respectivement aux côtés (BC) , (CA) et (AB) . On choisit trois réels a , b et c tels que A' soit barycentre de (B,b) (C,c) et B' de (A,a) (C,c) .

Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si C' est barycentre de (A,a) (B,b)

avec $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$

9) ABC est un triangle , I , J et K sont les milieux des côtés [BC] , [CA] et [AB] , $A'' = S_I(A')$, $B'' = S_J(B')$, $C'' = S_K(C')$.

1) Démontrer que les droites (AA'') , (BB'') et (CC'') sont parallèles ou concourantes si et seulement si les droites (AA') , (BB') et (CC') le sont .

2) Soit Ω le barycentre de (A,a) (B,b) et (C,c) avec $abc \neq 0$ et évidemment $a+b+c \neq 0$. Montrer que les droites (AA'') , (BB'') et (CC'') sont concourantes au point Ω' barycentre de $(A, \frac{1}{a})$, $(B, \frac{1}{b})$ et $(C, \frac{1}{c})$.

10) Coordonnées barycentriques des centres des cercles inscrit et exinscrits à un triangle ABC .

11) ABC est un triangle .

Soit $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre A et de rapport -2 .

1) Construire les images C' et B' de C et B par $\mathcal{H}$

2) Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC] ; déterminer le rapport de l'homothétie $\mathcal{H}'$ de centre C' qui transforme A en J .

3) Déterminer le rapport de l'homothétie $\mathcal{H}''$ de centre B qui transforme I en B' .

12) Le point M décrit un cercle Γ de centre O et de diamètre [AB], privé des points A et B ; on place I aux deux tiers de [AM] en partant de A , les droites (IB) et (OM) se coupent en M' .

Quel est le lieu des points M' ?

13) On donne trois points O , A et B alignés dans cet ordre et distincts deux à deux ; $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O passant par A . A tout diamètre [MN] de $\mathcal{C}$, avec M et N distincts de A , on associe les points m et n respectivement situés à l'intersection des droites (AN) et (BM) , (AM) et (BN) .

1) Déterminer le lieu des points m lorsque M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A\}$.

2) Démontrer que le milieu de [mn] est fixe .

14) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles distincts de même centre O .

Une demi-droite d'origine O coupe $\mathcal{C}$ en A et $\mathcal{C}'$ en A' . Pour tout point M de $\mathcal{C}'$, n'appartenant pas à (OA) , on associe M' intersection de (OM) et de la parallèle à (AM) passant par A' , puis N intersection de (AM') et (A'M) .

Déterminer le lieu des points N .

15) On donne trois points distincts alignés I , A et B , avec $I \notin [AB]$. Deux cercles de centres A et B varient de manière que I reste leur centre d'homothétie .

Quel est le lieu des points communs à ces deux cercles ?

16) On considère un triangle ABC non isocèle ; A' est le pied de la médiane issue de A ; α et α' sont les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues de A ; T est le pied de la symédiane issue de A , symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice intérieure , issues de A .

On pose : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

1) Exprimer A' comme barycentre de α et α' .

2) En déduire T comme barycentre de α et α' , puis comme barycentre de B et C .

3) Démontrer que les trois symédianes sont concourantes en un point L , barycentre de (A, a^2) (B, b^2) (C, c^2) ; ce point L est appelé point de Lemoine du triangle ABC .