*" Le secret d'ennuyer est celui de tout dire. "*

*VOLTAIRE*

# PROJECTION STEREOGRAPHIQUE, ASTROLABE ET GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

ou la stéreographie mise en pièces

Fantaisie en cinq actes et un tableau (noir).

La scène peut se passer en $4^{\text{ième}}$, $3^{\text{ième}}$, jusqu'en TC et même au delà.

Décors et prologue :

Il est bien connu que le souci de représenter les objets, vus en relief dans notre champ de vision, par des figures planes fut à l'origine d'une collaboration des Arts et des Sciences, l'Artiste puisant sa technique chez le géomètre. Ainsi, la perspective fut une branche appliquee de la géométrie qui connut un essor particulier à la Renaissance et au $18^{\text{ième}}$ Siècle (voir l'ouvrage de J.H. Lambert : " La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral." )

Un problème scientifique pratique, mais de même nature que le precedent, trouve sa source en Astronomie : représenter dans un plan le ciel visible,( étoiles, planètes et Soleil) afin de naviguer, de prevoir, sans calculs, non seulement les heures de lever et de coucher du Soleil pour un jour quelconque mais aussi un très grand nombre de phénomènes astronomiques.

Ce problème se resoud elegamment, grace à la projection stéréographique (du Grec stereo : relief). Hipparque, le plus grand astronome de l'Antiquité, connait cette projection au deuxième siècle avant le début de notre ere. Elle est connue sous le nom de planisphère par Ptolemee et d'astrolabe au Moyen-Age. Elle est etudiée par de nombreux geometres et en particulier par M. Chasles (1793-1880) (voir son ouvrage :"Aperçu historique sur l'origine des methodes en géometrie.").

L'action :

La situation est celle-ci : un point O de l'espace ( de dimension $n \geq 2$, théoriquement, mais n=3 pour le spectateur ordinaire et les applications courantes.) est choisi et dénommé : point de vue ou pôle. Deux points M et M' de l'espace seront "identifiés" si O, M, M' appartiennent à une même demi droite d'origine O ( physiquement, on voit de O, M et M' confondus.). On définit ainsi, une relation d'équivalence sur l'espace (privé du point O) dont l'espace quotient est représenté par ume sphère $\tilde{S}$ variété de dimension n-1, privée d'un point. La projection stéréographique définit une application bijective de $\tilde{S}$ sur un plan, ou un hyperplan (rappelons que c'est cette même transformation qui permet de compactifier $\mathbb{R}^n$ par adjonction d'un point à l'infini.).

Données : l'action se déroulera donc, sur la sphère unité ( Σ ) de centre O et que l'on pourra dénommer : sphère céleste ou des fixes ou encore, locale suivant les besoins des applications.

Soit, S, un point de ( Σ ) , choisit comme point de vue et, P, le point diamétralement opposé à S sur ( Σ ).

( *P* ) est le plan de projection perpendiculaire en O à SP.

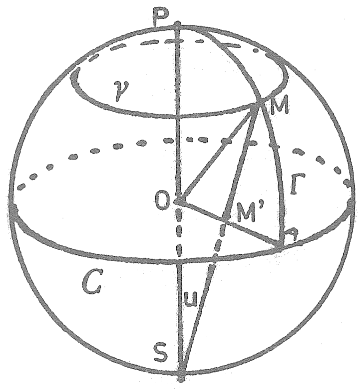

Figure 1

Soit $M \in \Sigma \setminus \{ S \}$ , la demi droite SM coupe le plan ( *P* ) en M', image de M par la projection stéréographique de pôle S et de plan ( *P* ). Cette application, s, est aussi la restriction de l'inversion de pôle, S, et de puissance 2, à la sphère ( Σ ), et les propriétés classiques de l'inversion donnent la plupart des propriétés de la stéréographie. L'objet de cet exposé est de montrer que des connaissances élémentaires de géométrie plane ( niveau Collège ou Lycée ) suffisent pour découvrir de nombreuses propriétés de la stéréographie et pour l'appliquer à la construction d'un instrument d'un intérêt pédagogique indéniable. Une longue expérience nous a montré que cette activité était propre à motiver l'enseignement de la géométrie qui n'apparait pas à l'élève comme, au mieux, un jeu gratuit ( qui n'est pas facile et ne rapporte rien ) mais, au contraire, comme une formation nécessaire à la compréhension du Monde et au progrès de l'Humanité. Peu nombreuses seront, alors, les apostrophes classiques du genre "...les mathématiques à quoi ça sert ! " ( la réponse pertinente nous semble soufflée par E. Rostand " ...c'est bien plus beau quand c'est inutile. " ).

Le peu de place dont nous disposons ici, nous limite à présenter, sous la forme d'un enchaînement d'exercices, accessibles pour la plupart à des classes de collège, les propiétés relatives à la projection stéréographique d'un cercle quelconque de la sphère et d'en indiquer une application. Une étude détaillée de ce sujet doit faire l'objet d'une publication IREM.

ACTE I : ( où l'on découvre quelques images simples. )

1-)

Identifier sur la figure 2 effectuée dans le plan ( $P$ ), les images par la stéréographie s, des éléments suivants ( indiqués sur la figure 1 ) :

P, point antipodaire de S

( $C$ ) : intersection de ( $\Sigma$ ) et de ( $P$ )

( $\Gamma$ ) grand cercle de ( $\Sigma$ ) de diamètre PS

( $\gamma$ ) petit cercle d'axe PS de ( $\Sigma$ )

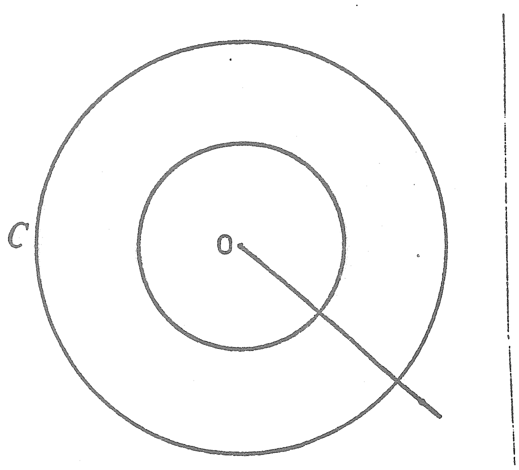


Figure 2

2-)

Tout point M distinct de P et S de ( $\Sigma$ ) est défini par l'intersection d'un cercle ( $\gamma$ ) et d'un demi grand cercle ( $\Gamma$ ), indiquer comment est obtenu l'image M' de M par s.

Démontrer que tout cercle de ( $\Sigma$ ) contenant le point S se projette ( stéreographiquement ) suivant une droite ( $D$ ) du plan ( $P$ ). Lorsque cette droite coupe le cercle ( $C$ ), que dire des points d'intersections ?

3-)

Situer les images des points de chaque demi sphère définie par le plan ( $P$ ) par rapport au cercle ( $C$ ).

ACTE II : ( préliminaires plans )

données :

PS de longueur 2

O : milieu de PS

M : tel que le triangle PMS soit rectangle en M.

M' : intersection de MS avec la mediatrice de PS

Démontrer que :

SM.SM' = 2

les points P, O, M, M' sont cocycliques.

Exprimer les angles OMS, SPM, MOP en fonction de u = PSM

Se convaincre que la figure 4 représente la projection stéréographique d'un point de ( Σ )

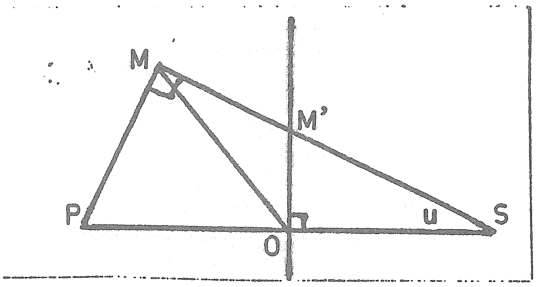


Figure 3

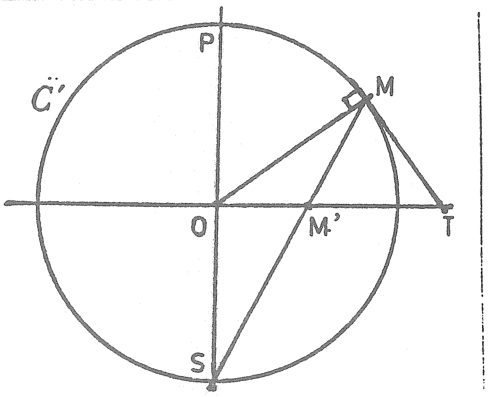


Figure 4

MT étant tangente en M au cercle ( C'), démontrer que le triangle TMM' est isocèle. Pour quelle valeur de u est-il équilatéral ?

ACTE III : ( où l'intrigue se dessine )

1-)
Soit, C, un point de TM et C' l'intersection de OT et de SC. Par C' on trace la parallèle à MT qui coupe SM en N. Quelle est la nature du triangle NC'M'.

En déduire C'M' en fonction de CM, SC et SC'.

On pose : $\alpha$ = MOC $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Démontrer que :

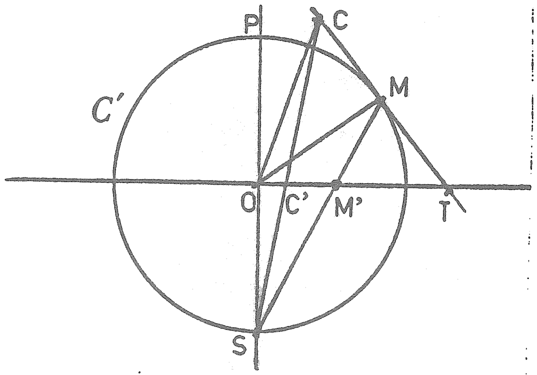


Figure 5

$$C'M' = \frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos v} \qquad \text{avec} \quad v = 2u - \alpha$$

et que :

$$OC' = \frac{\sin v}{\cos \alpha + \cos v}$$

2-)

Soit AB une corde de ( $C'$ ) ne contenant pas le point O, et A', B' les images de A et B par s. C, est le point d'intersection des tangentes en A et B au cercle ( $C'$ ). Démontrer que C', image de C est le milieu de A'B'.

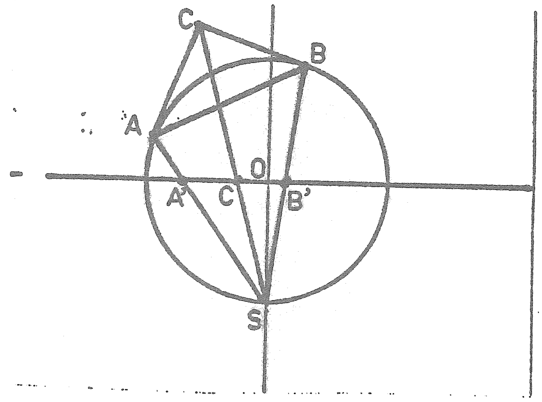


Figure 6

3-)

AB est, maintenant, un diamètre de ( $C'$ ), la perpendiculaire issue de S à AB coupe A'B' en ω. Démontrer que ω est le milieu de A'B'.

Calculer ω A' et O ω en fonction de v = OSω .

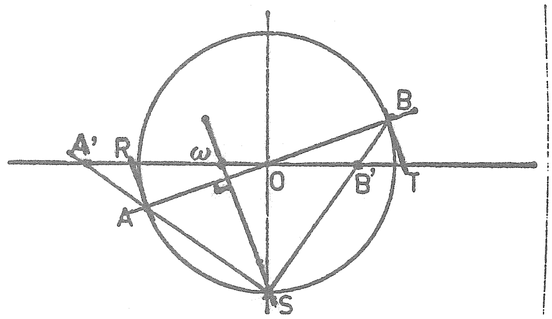


Figure 7

ACTE IV :

( où l'on apprend, avec étonnement, quelle est l'image d'un cercle de ( Σ ) )

Soit, ( $\gamma$ ) un petit cercle de ( Σ ) ne contenant pas S. C, est le sommet du cône circonscrit à ( Σ ) le long de ( $\gamma$ ). Soit, M, un point de ( $\gamma$ ), CM coupe ( $P$ ) en U ( figure 8).

Démontrer que : UM = UM' ( utiliser la situation de la figure 4 en considérant que U est sur la perpendiculaire en T au plan PMS ( pourquoi ?).)

Par C', on trace la parallèle à CM qui coupe SM en Q.

Demontrer que le triangle QM'C' est isocèle. En déduire que la mesure de C'M' est constante lorsque M décrit ( $\gamma$ ).

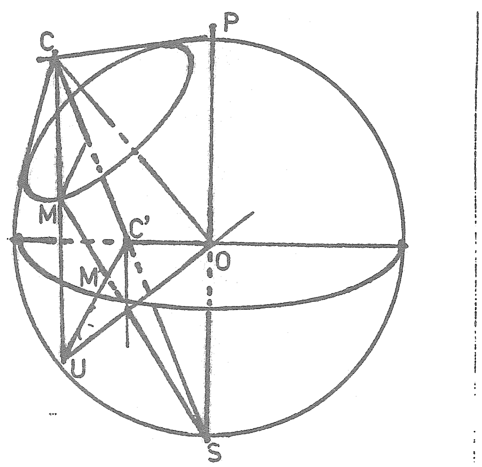


Figure 8

Caractériser l'image par s, d'un petit cercle de ( Σ ). Adapter le raisonnement precédent aux grands cercles de ( Σ ).

ACTE V : ( où l'on s'achemine vers le dénouement, sur un air ancien.)

Soit, nz, un diamètre de ( Σ ). Démontrer, en utilisant les résultats précédants, que les images par s des grands cercles de diamètre nz, forment un faisceau à points de base n', z', et que les images des petits cercles ( ne contenant pas S ) déterminent le faisceau à points de Poncelet n', z', conjugué du précédent.

Si un point M de ( Σ ) est défini par l'intersection d'un petit cercle d'axe nz et d'un demi grand cercle de diamètre nz, justifier la construction de la figure 9, pour obtenir le point M' ( M'= s(M) ) en utilisant la propriété précédente ?

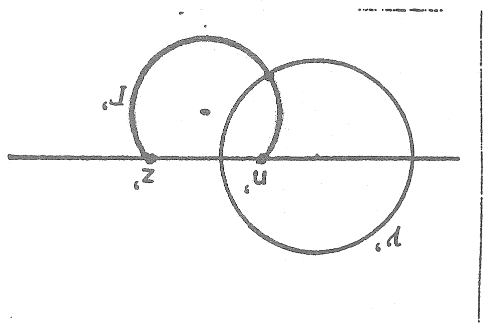


Figure 9

Une application immédiate de cette situation est la conversion des coordonnées sphériques d'une demi droite ( deux angles ) dans un repère donné, en coordonnées sphériques de la même demi droite, dans un autre repère, ce qui est à la base des repérages de tout les phénomènes astronomiques ( passage de la sphère des fixes à la sphère locale, par exemple ). La superposition de la figure 2 et des faisceaux de cercles précédents permet de réaliser aisément cette transformation dans le plan, par une simple rotation d'un disque sur un autre : c'est là le prinipe de l'astrolabe.

Le disque, fixe, sur lequel sont gravés les deux faisceaux de cercles représentant les coordonnees locales est dénommé : tympan. Le disque, ajouré, mobile, sur lequel sont représentées les étoiles les plus brillantes repérées dans le système de la figure 2, est dénommé : Araignée ( en raison de sa ressemblance avec une toile d'araignee. )

Comme il l'a été écrit plus haut, les utilisations de cet instrument sont très nombreuses, Jabir-al-Sûfi ( Geber, au VIIIième siècle ) en propose mille, al-Khwârizmî ( celui de l'algorithme ) vers 840, en résoud 43, dont voici les plus classiques :

- disposer l'Araignee pour un instant donné.

- déterminer l'heure légale.
- déterminer l'heure inégale de jour.
- déterminer l'heure inégale de nuit.
- observer la hauteur du Soleil.
- observer la hauteur d'une étoile.
- déterminer l'heure de lever et de coucher du Soleil.
- déterminer l'heure de lever et de coucher d'une étoile.
- déterminer le temps sidéral.
- déterminer la durée du jour.
- durée du crépuscule.
- heures des prières musulmannes.

RIDEAU.

C. DUMOULIN