INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Université Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
Tél. 67 14 33 83 ou 67 14 33 84

FORMATION CONTINUE SUR LES TRANSFORMATIONS

Groupe Géométrie- IREM de Montpellier
BONAFE Freddy - BRUNET Robert

Lors du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze des 26, 27 et 28 Mai 1988, nous avions, en collaboration avec Claude Janvier, tenté d'aborder les problèmes soulevés par l'enseignement de la géométrie des transformations et notamment sa nécessité et son efficacité.

Le débat reste ouvert ... mais un fait est acquis, les transformations figurent dans tous les programmes de la 6ème à la 2nde ainsi que dans ceux des classes scientifiques. Les enseignants doivent donc les enseigner (!) y compris ceux pour qui transformation est souvent synonyme d'algèbre des transformations et qui n'ont que rarement au cours de leur formation initiale abordé cette "géometrie géométrique", géométrie des figures qui semble être à nouveau à l'honneur.

C'est pour cela que nous avons bâti, au sein du groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier et proposé dans le cadre de la M.A.F.P.E.N., un stage autour des transformations.

"L'enseignement français oscille entre deux pôles : celui d'un discours in-signifiant (le théorique, l'abstrait) et celui d'un bricolage inconsistant (la pratique, le concret) où est la connaissance dans ce fratas ? Mieux vaut n'en point parler".

Cette citation de R. Bkouche [1] constitue notre point de départ que nous illustrons par les fiches 1 et 2.

Il s'agit ensuite de trouver entre ces extrêmes une place qui convienne à la géométrie et aux transformations en particulier. Les stages que nous proposons ont donc pour but de replacer les transformations dans un cadre tenant à la fois du sens et du savoir. Ils se déroulent suivant le plan proposé par la fiche 3.

Au cours deces stages, nous insistons particulièrement sur la partie 3 : contenu et élèves.

Analyse a priori des difficultés : la fiche 4 donne un aperçu des résultats expérimentaux. Nous insistons également sur les problèmes soulevés par le vocabulaire (symétrique, translaté, mais pas "relationné"), la notion sous-jacente d'ensemble de points, les aspects statiques et dynamiques, la difficulté d'identifier une transformation.

Algorithmes de construction : nous travaillons avec les stagiaires des formulations d'algorithmes de construction d'images dans une transformation. La fiche 5 est un exemple de rédaction qui doit évidemment être accompagnée de figures. Les instruments du dessin sont ici privilégiés. Il s'agit de conduire l'élève à un tracé précis et méthodique à mettre en oeuvre sur la figure 6 par exemple.

Fabrication de l'outil : il s'agit de dégager quelques principes simples sur lesquels repose l'utilisation des transformations dans la recherche de problèmes :

* Cet outil doit reposer sur les objets primitifs que sont longueurs, angles et triangles. Il faut parvenir à établir la certitude chez les élèves de l'unicité, à une isométrie près, d'un triangle défini par ses trois côtés (et ce n'est, pour l'instant, pas le cas, cf. fiche 4).

* Disposer de l'outil transformation, c'est avoir la capacité de reconnaître sur des figures de type statique des éléments dynamiques et cela passe par la <u>connaissance de configurations simples associées à une transformation donnée.</u>

* Disposer de l'outil transformation, c'est aussi avoir la capacité de reconnaître sur des figures de type dynamique des éléments fixes et cela passe par la <u>connaissance des propriétés des transformations</u> et notamment de leurs invariants.

Champ des problèmes abordables : une fois dépassé le cadre des exercices d'application où il ne s'agit que de respecter des consignes de type algorithmique, on se heurte tout de suite à des problèmes ensemblistes de type f(A B) = f(A) f(B). C'est le cas, en général, des problèmes de construction pour lesquels on peut proposer un traitement par abaissement de contraintes qui conduit inévitablement à une recherche de lien géométrique. Les problèmes d'ensembles de points et de construction semblent présenter un certain intérêt en .... l'aspect dynamique des transformations, en permettant une activité des élèves, en donnant du sens à une activité.

Nous sommes très réservés à l'égard des problèmes d'extrémum car bien que permettant une activité des élèves et des conjectures de leur part, l'apparition d'une transformation démarrant la situation est souvent un peu superficielle.

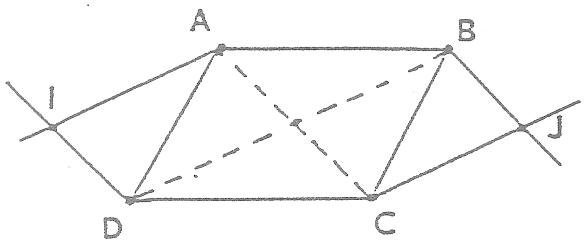
Enfin, les problèmes de type statique comme celui répété dans les fiches 1 et 2 nécessitent un traitement intermédiaire entre ceux proposés dans les deux fiches, traitement reposant sur la donnée de la transformation et un réel guidage dans la démarche.

IREM de MONTPELLIER

Théorème : Pour qu'une application du plan dans le plan soit une isométrie involutive admettant exactement un point invariant, il faut et il suffit que le milieu de toute paire formé d'un point et de son image soit un point fixe C : une telle application est appelée symétrie plane de centre C.

Symétrie centrale, collection Queysanne et Revuz, classe de 4ème, Nathan, 1967

Problème : Les hypothèses sont :
(A, B, C, D) est un parallélogramme de centre O. Les droites (AI) et (DI) sont respectivement parallèles à (BD) et (AC), idem pour les droites (CJ) et (BJ).



La question est par exemple : prouver que les points I, O et J sont alignés.

Il est clair (en utilisant le résultat cité plus haut) que la ~~symétrie~~ centrale de centre O échange les points I et J, d'où le résultat, avec en prime le fait que O soit le milieu de [IJ]. Cette dernière particularité, qu'on peut d'abord essayer de faire deviner en faisant réaliser des dessins très soignés, pourrait être le déclic faisant penser à l'emploi de la symétrie centrale (interaction dessin-raisonnement).

Mais, l'expérience faite, il s'avère qu'obtenir ce type de raisonnement d'un élève de 4ème est très difficile car il bute sur deux points :

a. Appréhender suffisamment la symétrie centrale pour y penser et avoir envie de s'en servir est très difficile à ce niveau, même pour de bons élèves, et même si on essaie d'y inciter les élèves par une observation attentive de la configuration, comme indiqué plus haut.

b. A supposer qu'un "entraînement ..." intensif les habitue à avoir ce réflexe, ou bien si on donne d'entrée l'indication d'utiliser cette symétrie centrale et même des questions intermédiaires demandant par exemple quelle est l'image de la droite (AI) ... etc. nous avons constaté que subsiste une grosse difficulté (de type ensembliste) : comprendre vraiment que l'intersection des droites (AI) et (DI) a pour image l'intersection des droites (BJ) et (CJ).

Si on essaie de creuser ce que peut alors être la compréhension des élèves, on s'aperçoit que la plupart veulent bien accepter, à la rigueur ..., cette explication du maître, mais qu'elle ne les convainc absolument pas et qu'ils préfèrent une résolution de cet exercice, plus longue, utilisant plusieurs fois le Thalès du milieu.

Remarque :

* Il semble que cet exemple et beaucoup d'autres ainsi, révèle bien le hiatus entre d'une part la compréhension superficielle obtenue au niveau descriptif (ici d'une transformation mais aussi de l'intersection ensembliste) et d'autre part l'incapacité à comprendre vraiment le fonctionnement de ces notions. Ceci tient d'ailleurs certainement beaucoup au fait que la seule perception fonctionnelle qu'ont les élèves des transformations est une action point à point et non pas une action globale sur le plan, difficulté qui persiste au second cycle.

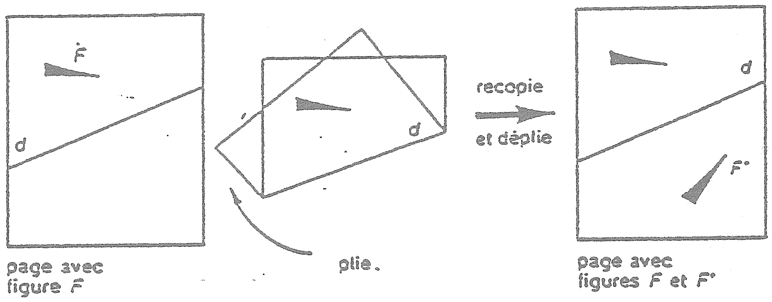
Claude BURGAUD, IREM de Rennes
Bulletin Inter-IREM N° 23 - 1983

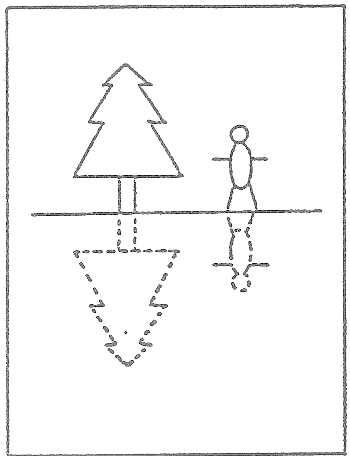
IREM de MONTPELLIER

Dessine une figure F sur une page. Trace une droite d sur cette page. Plie selon cette droite. Reproduis la figure-image F' que tu vois.

• Dessine une figure F sur une page. Trace une droite d sur cette page. Plie selon cette droite.

Reproduis la figure-image F' que tu vois.





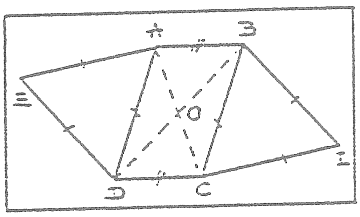
Sur une photographie, une image réfléchie dans un miroir peut aussi s'obtenir par pliage le long du miroir!

On peut lire alors :

"Les figures F et F' sont symétriques par rapport à la droite d"

ou bien

"L'action de la symétrie axiale d'axe d est d'envoyer F sur F'"



Situation :

ABCD est un parallèlogramme ce centre O et ADE, BIC des triangles équilatéraux construits extérieurement.

Etudier la disposition O,E, I.

** Par la symétrie centrale :*

O est le centre de symétrie du parallélogramme.

Cette symétrie est préservée par le tracé des triangles équilatéraux (quel est le symétrique de ADE sinon le triangle équilatéral construit sur [BC] extérieurement au parallélogramme ?). E et I sont symétriques, donc ...

** Sans la symétrie centrale :*

On peut, par exemple, démontrer le parallélisme de (AE) et (CI) en s'intéressant à $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACB}$, puis à $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ACI}$, puis au quadrilatère AECI.

N'est-ce pas moins naturel, moins accessible, plus long et parcellaire ? Et quelle différence d'attrait !

Henri BAREIL, IREM de Toulouse
Suivi Scientifique 5ème

IREM de MONTPELLIER

PLAN du STAGE

1/ Place et rôle des transformations au cours de la scolarité à travers la lecture des programmes du cours élémentaire à la classe de mathématiques supérieures.

2/ Le contenu mathématique à l'usage des professeurs :

* Théorèmes de classification des isométries et similitudes en dimensions 2 et 3.
* Recherche d'une démonstration du théorème de classification des isométries planes.
* Applications sur quelques exemples (transformations à mettre en évidence, groupe des frises d'après Quadrature N°1).

3/ Le contenu et les élèves

* Analyse a priori des difficultés de l'enseignement des transformations.
* Algorithmes de construction des transformations d'un triangle
* Fabrication de l'outil transformation
* Champ des problèmes abordables.

IREM de MONTPELLIER

RESULTATS 1979-1984

Les démarches de pensée que l'élève utilise pour résoudre un problème de géométrie sont essentiellement fondées sur l'interaction entre ses réalisations pratiques et sa réflexion théorique.

Les dessin, et plus particulièrement le dessin précis avec usage d'instruments de dessin, joue un rôle indispensable pour l'élève, dans la résolution de problèmes de géométrie euclidienne plane.

La similitude des triangles, définie par la conservation des angles, est une notion très assimilable par nos élèves du premier cycle dès la classe de 5ème.

La similitude des triangles, définie par la conservation des proportions, n'est vraiment assimilable qu'à la fin du premier cycle ou au début du second cycle.

La notion d'angle, sous forme de couple de demi-droites est en voie de conceptualisation rapide au début du premier cycle (6ème et 5ème). La notion de mesure d'angle est acqùise en même temps. Dans la pratique, elle se heurte toutefois aux difficultés dues à l'usage du rapporteur.

L'unicité, à une isométrie près, d'un triangle défini par la longueur de ses trois côtés (troisième cas d'égalité) n'est pas une proposition acquise par nos élèves du secondaire.

La notion de translation existe chez les élèves. Avant que le concept soit formé, la notion apparaît sous une forme pratique reposant sur le mouvement de translation rectiligne et faisant appel plus généralement au mouvement plan sur plan.

La symétrie orthogonale est, elle aussi, en voie de formation, elle est utilisée essentiellement comme une notion pratique sous deux aspects : le retournement et la symétrie-technique. La conservation de mesures de longueur y joue un rôle déterminant.

La rotation n'est pas conceptualisée. Sa forme pratique la plus évoluée fait intervenir la conservation des mesures de longueurs et d'angles.

Les notions de conservation, notamment de conservation de mesures de longueur et d'angles jouent un rôle déterminant dans la formation des concepts de transformations géométriques.

Aucun indice ne nous permet d'affirmer que le concept de groupe de transformation soit en voie de constitution chez nos élèves.

I.R.E.M. de Montpellier

CONSTRUCTION DU SYMETRIQUE D'UN TRIANGLE PAR RAPPORT A UNE DROITE

. Par un sommet du triangle, on trace la perpendiculaire à la droite et on la prolonge de l'autre côté.
. Sur le prolongement, on reporte une longueur égale.
. On procède de la même façon pour les deux autres sommets.
. On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.
. Ce nouveau triangle est le symétrique du premier triangle par rapport à la droite.

CONSTRUCTION DU SYMETRIQUE D'UN TRIANGLE PAR RAPPORT A UN POINT

. Par un sommet, on trace la droite passant par le point et on la prolonge de l'aute côté du point.
. Sur le prolongement, on reporte une longueur égale. —
. On procède de la même façon pour les deux autres sommets.
. On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

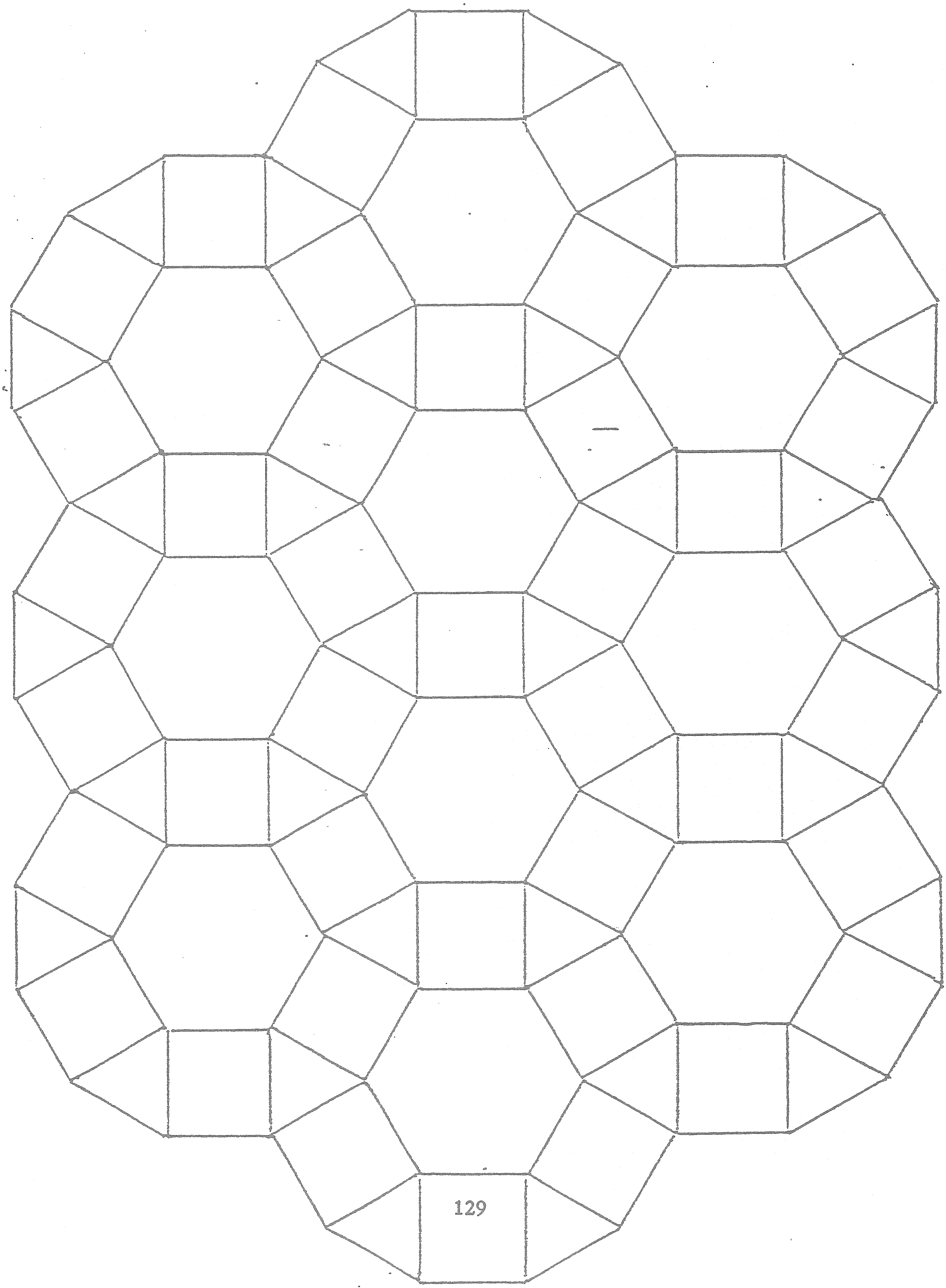
CONSTRUCTION DU TRANSLATE D'UN TRIANGLE

. A et B étant deux points donnés, construction du translaté d'un triangle dans la translation de A vers B.
. Par un sommet, on trace le parallèle à la droite AB.
. A partir du sommet, on reporte la longueur AB dans le sens de A vers B.
. On procède de la même façon pour les deux autre sommets.
. On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

CONSTRUCTION DU TRANSFORME D'UN TRIANGLE PAR UNE ROTATION DE CENTRE O ET D'ANGLE 30°

. On trace la demi-droite d'origine O passant par un sommet du triangle.
. On construit une demi-droite d'origine O qui fait un angle de 30° avec la précédente.
. On reporte sur cette deuxième demi-droite la même longueur.
. On procède de même avec les deux autres sommets du triangle, en tournant dans le même sens.
. On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

FICHE 6



BIBLIOGRAPHIE

AUDIBERT G., 1982 - Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, volumes 1 et 2, APMEP N°56, 831 pages.

AUDIBERT G., 1986 - Une description des 14 groupes finis d'isométries, IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 32 pages. 2ème édition IREM de Lille, colloque Inter-IREM Géométrie, Mai 1986, St-Amand-les-Eaux, pages 144 à 175.

BAREIL H., 1987 - Des symétries pour démontrer dans Suivi Scientifique 1986-1987, classe de 5ème, Bulletin Inter-IREM Premier Cycle, pages 139 à 151.

[1] BKOUCHE R., 1989 - Considérations sur l'enseignement des mathématiques, publication IREM de Lille, 21 pages.

BONAFE F., BRUNET R., JANVIER ., 1989 - Les transformations, peut-on aller au-delà de l'expression d'opinion ? Dans Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze, IREM de Montpellier, pages 127 à 131.

BURGAUD C., 1983 - Quelques exemples d'utilisation des trnasformations en géométrie plane, obstacles rencontrés chez les élèves. Dans Bulletin Inter-IREM Géométrie N°23, pages 52 à 56.

CHEVALIER A., 1984 - Le problème QAT : symétries, vérifications, algorithme de construction, la pratique de l'élève. Edition IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 442 pages.

QUEYSANNE et REVUZ, 1967 - Livre de la classe 4ème, Nathan.