DE LA GEOMETRIE ET DES TRANSFORMATIONS

Rudolf BKOUCHE

I.R.E.M. de Lille

Ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prête celui qui est enseigné.(1)

Francisco Sanchez

De quoi s'agit-il?

Question essentielle, bien que trop oubliée, lorsqu'on parle d'enseignement: qu'enseigne-t-on? De façon précise, quelle est la signification (quelles sont les significations) de ce qui est enseigné? Il s'agit non seulement de définir des contenus, mais de situer ces contenus, c'est-à-dire d'en expliciter, autant que faire se peut, les diverses significations, significations internes au corpus enseigné, significations externes quant aux relations de la discipline enseignée avec d'autres domaines de la connaissance, avec, aussi, les connaissances déjà acquises (scolaires ou autres) de *ceux qui sont enseignés*.

Il faut voir l'une des plus importantes raisons des difficultés rencontrées par l'enseignement d'aujourd'hui dans le peu de place que tient la réflexion sur les contenus et leurs significations (2). En particulier, en ce qui concerne l'enseignement scientifique, cette réflexion est remplacée, au nom de l'accès à la modernité, par une course au dernier discours de la Science (ou ce que l'on croit être le dernier discours) en oubliant ce qu'il signifie, ce qui interdit de fait à *ceux qui sont enseignés* (et souvent à ceux qui les enseignent!) une réelle compréhension du discours enseigné; c'est ce que j'appellerai la contribution de l'école à l'obscurantisme contemporain.

S'il est vrai que l'enseignement scientifique a pour but de mettre les élèves en présence de la science d'aujourd'hui, il ne faut pas oublier que ce *face-à-face* est inutile (voire nuisible) si l'on n'a pas donné aux élèves (et aux maîtres!) les moyens de comprendre les enjeux et les significations du discours scientifique contemporain.

Cet oubli fut, en son temps, celui des inventeurs de la réforme dite des *mathématiques modernes*, nous n'y reviendrons pas. Ce fut encore le cas (sous une forme plus pernicieuse, l'humanisme volontariste des inventeurs de la réforme de 1970 ayant été oublié) de la dernière réforme des programmes.

En ce qui concerne la géométrie, cette conception (que j'appellerai *modernitaire*) apparaît avec la place donnée à la notion de transformation dans les derniers programmes; les transformations y interviennent d'une façon détachée de toute signification géométrique (même si ce ne fut pas l'intention des auteurs de ces programmes) en ce sens que cette signification est occultée à la fois par le discours (un exemple en est donné par la formulation des derniers programmes de la classe de seconde) et par cette nouvelle invention pédagogique que sont les *activités*, qui ne sont en fait qu'une forme de préparation au discours (3).

En fait cette intervention volontariste de la notion de transformation apparaît comme une caricature du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein (4), comme, à l'époque des *mathématiques modernes*, l'enseignement des mathématiques était une caricature de la théorie des ensembles et de l'axiomatique.

La caricature vient d'abord de ce que les transformations qui interviennent dans les programmes (symétrie orthogonale, symétrie centrale, translations, rotations, homothéties) ne transforment pas (nous y reviendrons); elles ne sont considérées comme transformations que dans la mesure où elles participent d'un ensemble plus large (historiquement, les transformations homographiques) (5). On peut considérer comme un trait de génie de Felix Klein, l'idée d'avoir considéré translations et rotations comme des transformations ...

En outre, si la notion de transformation prend son sens géométrique à travers la notion d'invariant (ce qui ne change pas quand on transforme), il faut, pour que la notion de transformation soit consistante, que les invariants apparaissent d'une façon non triviale. Dire qu'un déplacement ne change pas la longueur d'un segment de droite, est un truisme qui n'apprend rien sur la notion d'invariant.

Qu'en est-il dans l'enseignement?

Les transformations aujourd'hui étudiées au collège interviennent à travers diverses problématiques.

D'abord le mouvement, via les translations et les rotations; vouloir définir celles-ci sans faire appel au mouvement constitue un obstacle, non seulement à leur appréhension en tant que telles, mais aussi à la compréhension de la distinction entre le déplacement comme mouvement et le déplacement comme transformation géométrique (6). C'est dire qu'on ne peut faire l'économie du mouvement si l'on veut introduire translations et rotations dans l'enseignement de la géométrie (nous y reviendrons).

Ensuite les figures régulières, problématique suffisamment riche pour qu'elle soit d'abord étudiée pour elle-même via les figures symétriques, les miroirs, les polygones réguliers et les pavages, les polyèdres réguliers et les cristaux.

La notion de régularité se précise à travers les propriétés d'invariance et c'est une façon d'aborder la problématique des transformations et leur rôle dans la structuration de la géométrie, structuration qui est moins un but que l'un des instruments de la connaissance géométrique.

Troisième problématique, la ressemblance de forme, autrement dit, la similitude. Le terme *similitude* ne renvoie ici à aucune notion transformationnelle, il s'agit d'une relation entre figures qui se correspondent éléments par éléments, savoir, d'une part l'égalité des angles correspondants, d'autre part la proportionnalité des segments correspondants, avec cette propriété remarquable que, lorsque ces figures sont des triangles, l'égalité des angles correspondants implique la proportionnalité des segments correspondants et réciproquement. Les transformations (homothéties et similitudes) sont alors le moyen de construire une figure semblable à une figure donnée; on peut alors montrer que, deux figures semblables étant données, il existe une telle transformation qui envoie l'une des figures sur l'autre.

Mais cette intervention des transformations (qui ne transforment pas, rappelons-le) ne prend sens qu'à travers l'étude de ces objets de la géométrie élémentaire que sont les figures (7); c'est donc autour des figures que peut se construire un enseignement consistant de la géométrie, que ces figures soient étudiées pour elles-mêmes ou qu'elles soient des représentations de situations spatiales plus générales.

Enfin, il faudrait citer le problème de la représentation plane des objets de l'espace, via les divers modes de perspective, et le problème des ombres (l'exemple classique étant celui de la construction des coniques *à l'abat-jour*), problèmes où interviennent des transformations *déformantes* et qui conduisent ainsi à préciser d'une part comment les objets et les propriétés d'iceux se transforment, d'autre part, parmi ces propriétés, quelles sont celles qui ne changent pas, ce qui conduit à la notion d'invariant (8).

Ainsi, parmi les opérations que l'on peut effectuer sur les objets géométriques, on peut distinguer deux types, celles qui transforment et celles qui ne transforment pas, distinction empirique il est vrai, mais c'est peut-être le rôle de la géométrie en tant que science rationnelle que de théoriser une telle approche (le *Programme d'Erlangen* en est un exemple!); c'est alors le rôle de l'enseignement que d'amener *ceux qui sont enseignés* à comprendre la signification d'une telle théorisation (au lieu de se borner à leur raconter la théorie).

Ceci pose le problème de la place de la notion de transformation dans la géométrie, c'est à travers ce problème que l'on peut poser celui de la place de la notion de transformation dans l'enseignement de la géométrie.

Du mouvement et de la géométrie.

Si donc il n'y avait pas de corps solide dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie. (9)

Henri Poincaré

La géométrie est la science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

écrit Legendre, d'une façon très euclidienne, au début de ses *Eléments de Géométrie* (10).

Mesurer l'étendue signifie ici: mesurer les grandeurs géométriques telles qu'elles sont définies dans le corpus de la géométrie élémentaire (le corpus euclidien): longueurs, aires, volumes, angles. Mesurer une grandeur, c'est alors la comparer à une grandeur particulière que l'on convient être *l'unité de mesure*, c'est-à-dire *compter* combien de fois la grandeur que l'on mesure contient la grandeur unité. L'opération de mesure (définie théoriquement ou effectuée pratiquement) demande de déterminer d'abord les conditions de l'égalité de deux grandeurs (lorsque chacune d'elles contient une fois l'autre!). C'est l'objet de ce principe fondamental sur lequel repose la géométrie élémentaire, savoir, *le principe de l'égalité par superposition* (axiome 4 ou 8 des *Eléments* d'Euclide selon les éditions), que nous énonçons dans la traduction de Houël (11)):

Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles.

Nous retrouvons ce principe tout au long de l'histoire de la géométrie; ainsi d'Alembert écrit (12):

Les propositions fondamentales (de la géométrie) *peuvent être réduites à deux: la mesure des angles par les arcs de cercle, et le principe de superposition.*

et quelques années plus tard, Lacroix écrira, à propos des angles (13):

Mais est-il indispensable de définir l'angle? Ne suffit-il pas de le montrer et d'observer ensuite que les angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, leurs côtés coïncident chacun dans deux points, et qu'alors ils ne cesseront point de coïncider, quelque loin qu'on les prolonge?

Le principe de l'égalité par superposition s'appuie sur le mouvement qui permet la superposition. Le mouvement qui intervient ici est celui d'un corps solide, en fait l'axiome euclidien met en relation les notions (empiriques!) de mouvement et de corps solide (Cf. le texte de Jules Houël (14) cité en annexe); c'est ce qu'on peut considérer comme le fondement empirique de la géométrie, celle-ci s'intéresse aux corps solides en ce qu'ils restent invariables (autrement dit, les grandeurs géométriques qui leur sont attachées ne changent pas) lorsqu'on les meut (en termes modernes, la notion de corps solide est un invariant du mouvement).

La géométrie a ainsi un fondement empirique qu'on ne saurait négliger même si la construction de la géométrie rationnelle a eu pour conséquence (sinon pour objectif) de l'occulter. La géométrie rationnelle commence lorsqu'on se propose de déterminer des critères *a priori* d'égalité, c'est-à-dire des critères qui permettent d'éviter la superposition effective, autrement dit d'éviter le mouvement; nous citerons encore une fois d'Alembert à propos du principe de l'égalité par superposition (15):

Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence de ces parties entr'elles, et de leur coïncidence la coïncidence du reste: d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a donc l'avantage, non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux.

Le problème est alors de définir des critères de l'égalité de deux figures à partir d'une égalité partielle. C'est à ce problème que répondent les classiques cas d'égalité des triangles, en effet ils affirment que l'égalité chacun à chacun de trois éléments convenablement choisis parmi les trois côtés et les trois angles des deux triangles, implique l'égalité chacun à chacun des trois autres éléments et la possibilité de superposer les triangles, donc leur égalité. Les démonstrations des cas d'égalité s'appuient évidemment sur le principe de l'égalité par superposition et on peut parler de leur *caractère expérimental* (ainsi la proposition 4 du livre I des *Eléments* d'Euclide, ou les propositions 6 et 7 du livre I des *Eléments de Géométrie* de Legendre) en ce sens que la démonstration décrit une suite d'opérations assurant à partir des égalités partielles la coïncidence partielle, laquelle implique à son tour la coïncidence globale (il suffit de *lire* les figures), mais cette suite d'opérations est guidée par le raisonnement et c'est en cela qu'il s'agit d'une démonstration et non d'une simple constatation (16).

Ainsi les cas d'égalité des triangles participent de la géométrie rationnelle, à la fois par la façon dont on les déduit du principe fondamental et par le rôle de critère d'égalité qu'ils jouent dans le développement de la géométrie.

Ce sont les cas d'égalité qui permettent, avec le postulat des parallèles qui assure l'égalité des angles alternes - internes déterminés par une droite coupant deux droites parallèles, de mettre en place la méthode des aires, en montrant que les deux parallélogrammes ABCD et ABEF de la figure 1 ont même aire.

fig 1

Nous remarquerons que si le mouvement intervient dans le principe fondamental, celui-ci ne considère ni la façon dont le mouvement se déroule, ni la forme du déplacement (c'est-à-dire la relation dans l'espace entre les deux figures); intervient seulement ce qu'on pourrait appeler un principe de l'état initial et de l'état final. Ceci permet de souligner la signification épistémologique moderne (c'est-à-dire via le *Programme d'Erlangen*) des cas d'égalité des triangles sous la forme suivante:

Considérons l'ensemble des triangles de l'espace , le groupe des déplacements de l'espace (les isométries directes) opère sur cet ensemble; deux triangles sont égaux, au sens euclidien du terme, si et seulement s'ils sont sur une même orbite, c'est-à-dire s'il existe un déplacement envoyant le premier sur le second. On sait que le problème de montrer que deux éléments d'un ensemble sur lequel opère un groupe sont sur une même orbite peut être résolu de deux façons; on peut chercher un élément du groupe envoyant le premier sur le second, mais ce problème est souvent difficile; on peut aussi chercher s'il existe des invariants tels que le fait qu'ils soient égaux en les deux éléments considérés, assure que ces deux éléments sont sur la même orbite. Dans le cas des triangles, ce problème est résolu par les cas d'égalité des triangles, c'est la signification *à la Erlangen* signalée ci-dessus. On peut alors montrer, à partir de ces cas d'égalité et par des raisonnements de géométrie élémentaire (c'est-à-dire sans utiliser l'algèbre linéaire), que si deux triangles du plan sont directement égaux (c'est-à-dire parcourus dans le même sens), on envoie l'un d'eux dans l'autre par un déplacement et un seul qui est, soit une rotation, soit une translation, ceci implique que tout déplacement du plan est soit une rotation, soit une translation (je laisse le plaisir des démonstrations au lecteur).

J'ai parlé ci-dessus de l'espace et non du plan, car c'est dans l'espace, et non dans le plan, qu'il faut lire le principe de l'égalité par superposition, même si le principe s'applique essentiellement aux situations planes; les critères d'égalité de deux figures planes, tels les cas d'égalité des triangles, n'impliquent pas que ces deux figures soient dans un même plan, et lorsqu'elles le sont, que le mouvement qui amène la première sur la seconde soit plan; ainsi il n'est pas nécessaire de supposer, dans la démonstration des cas d'égalité des triangles, que les triangles soient dans un même plan, et lorsqu'ils le sont, on peut faire abstraction des problèmes d'orientation. C'est à la fois pour des raisons de méthode et pour des raisons de difficulté (17) que les géomètres grecs et leurs successeurs considèrent l'étude de la géométrie plane comme devant précéder, chez les apprenants, l'étude de la géométrie dans l'espace; cette conception sera remise en cause à la fin du XIXème siècle par Charles Méray, remise en cause qui est à l'origine de la réforme de 1902/1905 (18).

Evidemment, lorsqu'il s'agit de déterminer le déplacement plan qui envoie un triangle dans un autre de son plan, le problème de l'orientation se pose, orientation qui est définie par le sens de parcours des triangles.

Après avoir mis l'accent sur le rôle du mouvement dans la construction de la géométrie nous nous proposons de revenir sur la distinction entre mouvement et déplacement dont nous avons déjà parlé; nous citerons un texte de Bricard, extrait du premier chapitre de *Cinématique et Mécanismes* (19).

On appelle déplacement toute opération qui fait passer un corps (solide) d'une position à une autre. Un déplacement résulte toujours, dans la pratique, d'un mouvement, au cours duquel le corps occupe une série continue de positions, depuis la position initiale jusqu'à la position finale... Un déplacement donné peut être réalisé par une infinité de mouvements différents entre eux...

La notion de déplacement apparaît ainsi comme une abstraction de la notion de mouvement, elle exprime la relation (statique!) entre la position initiale et la position finale. La difficulté vient de ce que la détermination d'un déplacement s'explicite via une construction, c'est-à-dire via un mouvement (il ne faudrait pas oublier l'intervention du mouvement dans les constructions à la règle et au compas qui sont au coeur de la géométrie élémentaire); autrement dit, la notion de déplacement est à la charnière de la géométrie et de la mécanique et la distinction des notions de mouvement et de déplacement résulte moins d'une définition *a priori* que d'une pratique ressortissant à la fois de la mécanique et de la géométrie. Cette relation entre mécanique et géométrie via la règle et le compas (c'est-à-dire via la construction de la ligne droite et du cercle) est explicitée par Newton dans la préface des *Principia* (20):

Geometry does not teach us to draw these lines (right lines and circles), but requires them to be drawn, for it requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry., then it shows how by these operations problems may be solved.To describe right lines ans circles are problems, but not geometrical problems. The solutions of these problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, when so solved, is shown... Therfore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but that part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring.

Sans l'explicitation de cette relation, on ne saurait comprendre ni le rôle que joue la géométrie élémentaire (c'est-à-dire la géométrie issue de la tradition grecque) dans la construction de la mécanique rationnelle, ni le rôle que joue la mécanique rationnelle comme validation, à la fois théorique et expérimentale, de cette géométrie élémentaire, et nous renvoyons à la phrase de Poincaré citée ci-dessus.

Nous terminerons ces remarques en citant l'étude purement géométrique du mouvement (c'est-à-dire indépendamment de toute considération temporelle), étude qui se développe au XIXème siècle avec Chasles, Mannheim et Schoenflies (21); ce point de vue du mouvement géométrique a joué un rôle important dans l'étude des courbes, ainsi, chez les géomètres grecs, l'étude des courbes *mécaniques* (définies par une combinaison de mouvements) telles la quadratrice de Dinostrate, qui permet de quarrer le cercle et de trisecter l'angle (22) et les spirales d'Archimède (23), ainsi la détermination des tangentes à une courbe par Roberval (24) et les méthodes *cinématiques* d'étude des courbes (25). Notons que ce point de vue du mouvement géométrique constitue, avec la non-séparation du plan et de l'espace, le fondement des conceptions de l'enseignement de la géométrie de Méray et sera un des points forts de la réforme de 1902/1905, nous y reviendrons.

De la similitude

> *Il convient, dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première: c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie: il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur.* (26)
>
> Emile Borel

Si l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur, l'un des objectifs de la géométrie est de mettre en relation forme et grandeur, et ce pour une double raison; d'une part déterminer des critères permettant de dire *a priori* que deux figures ont même forme (se ressemblent), d'autre part déterminer des règles permettant de construire une figure ayant même forme qu'une figure donnée.

Dans ses *Eléméns de Géométrie*, Clairaut se propose d'expliquer *en quoi consiste la ressemblance de deux figures*, problème qu'il pose, conformément à sa problématique générale, à propos de la mesure des terrains et d'une représentation convenable d'iceux; considérant les deux figures ABCDE et *abcde* (fig 2), il explique qu'on reconnaîtra qu'elles sont semblables au fait que les angles A, B, C, D, E, de la grande figure sont respectivement égaux aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la petite figure, et que chacun des côtes *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, contient une partie *p* autant de fois que chacun des côtés correspondants AB, BC, CD, DE, EA, contient une partie P (27).

Ainsi Clairaut met en relation la forme et la grandeur, conformément à la définition euclidienne (28):

Les figures rectilignes semblables sont celles dont les angles sont égaux chacun à chacun et dont les côtés placés autour des angles sont proportionnels.

définition qui renvoie à la proportionnalité géométrique et au théorème dit de Thales, théorème que j'énoncerai sous la forme suivante

Des parallèles découpent sur deux sécantes des segments proportionnels.

Le théorème de Thales permet de construire un triangle semblable à un triangle donné via l'homothétie; on peut alors démontrer ces critères de similitude que sont les classiques cas de similitude des triangles, ce qui fait apparaître cette propriété remarquable qui dit que deux triangles ABC, DEF étant donnés, si les angles A, B, C sont respectivement égaux aux angles D, E, F alors les côtés AB, BC, CA sont proportionnels aux côtés DE, EF, FD et réciproquement.

Pour démontrer les cas de similitude, on remarque que, deux triangles ABC et DEF étant donnés satisfaisant l'une des trois conditions énoncées ci-dessous:
i) les angles A, B, C, sont respectivement égaux aux angles D, E, F,
ii) les angles A et D sont égaux et les côtés AB, AC, sont proportionnels aux côtés DE, DF,
iii) les côtés AB, BC, CA, sont proportionnels aux côtés DE, EF, FD,
alors le triangle DEF est égal à un triangle homothétique au triangle ABC (je laisse la démonstration au lecteur).

Ainsi la seule transformation (au sens géométrique du terme) qui soit intervenue jusqu'ici est l'homothétie comme instrument de construction de triangles semblables (plus généralement, de figures semblables); de plus, l'homothétie permet, avec les cas d'égalité des triangles, de démontrer les cas de simlitude.

On peut aborder le point de vue des transformations (des opérations sur les figures!) en définissant les similitudes directes planes, une telle opération est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre. On peut alors montrer que, deux triangles directement semblables (c'est-à-dire semblables et de même orientation) étant donnés dans le plan, il existe une similitude directe et un seule qui envoie l'un d'eux dans l'autre; ainsi la similitude comme relation se relie à la similitude comme opération. Nous ferons cependant quelques remarques.

D'abord, comme nous l'avons déjà remarqué à propos de l'égalité, la définition relationnelle reste valable pour des figures planes non nécessairement situées dans le même plan, et dans le cas où les figures sont situées dans un même plan, la définition est indépendante de toute condition d'orientation.

Ensuite, la construction explicite de la similitude qui envoie un triangle dans un triangle directement semblable de son plan n'est pas facile et par conséquent les cas de similitude sont un outil plus performant pour étudier les figures semblables et mettre en évidence les invariants correspondants.

Nous n'aborderons pas ici le problème plus difficile de l'égalité et de la similitude dans l'espace pour lesquelles on pourrait faire des remarques analogues, *mutatis mutandis*. Disons seulement que ce problème a été résolu par Cauchy au XIXème siècle (29).

Nous terminerons cette partie sur la similitude par quelques remarques sur le théorème de Thales . Par le rôle qu'il joue dans l'étude de la similitude et plus généralement de la proportionnalité géométrique, ce théorème tient une place importante dans la construction de la géométrie élémentaire, ceci pose le problème de son énoncé; comme on le sait, ce théorème peut être énoncé de multiples façons, en particulier sous forme vectorielle, ce qui permet l'usage des méthodes vectorielles dans le développement de la géométrie élémentaire, mais le calcul vectoriel, aussi puissant soit-il, est second, c'est-à-dire que sa pertinence, qui n'est pas seulement d'ordre technique, ne prend sens que sur une géométrie déjà constituée. Autrement dit, on peut considérer qu'un énoncé plus classique permettant l'étude de la proportionnalité géométrique et de la similitude convient plus à l'enseignement de la géométrie élémentaire, l'énoncé vectoriel intervenant avec la mise en place du calcul vectoriel (un énoncé vectoriel qui ne se relierait pas au calcul vectoriel ne serait qu'une reformulation pédante et inutile) (30).

Des figures régulières

Qu'est-ce qu'une figure régulière? une figure symétrique?

Comment passer d'une notion vague de régularité à la définition *précise* (d'aucuns diraient *rigoureuse*) d'une figure invariante par un groupe de transformations. Ici encore, le problème est moins celui d'une définition *a priori* que celui de la construction d'un concept mathématique et des objets correspondants. Nous reviendrons plus loin sur les implications didactiques de cette façon de mettre en place une problématique.

Une figure est régulière si l'on peut repérer des égalités répétitives entre certaines parties de la figure; cette définition n'a aucune prétention de rigueur et de précision, elle correspond plus à un constat devant certaines situations géométriques qu'à une définition explicite (laquelle n'est autre que la définition de nom de Pascal et des logiciens de Port-Royal (31), mais la définition de nom est déjà l'explicitation d'une notion qui lui est antérieure).

Ainsi un polygone est appelé régulier si tous ses côtés sont égaux et si tous ses angles sont égaux. Une propriété remarquable est que les sommets d'un tel polygone sont situés sur un même cercle qu'ils divisent en parties égales; l'étude des polygones réguliers s'identifie ainsi au problème de la division du cercle en parties égales, problème où se rencontrent la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre via l'équation *aux racines de l'unité*

$$z - 1^n = 0$$

Notons que pour tout entier $n > 2$, il existe, à similitude près, un seul polygone régulier à n côtés.

Après les polygones réguliers, on peut considérer les polyèdres réguliers: un polyèdre est régulier si toutes faces sont égales et tous ses angles polyèdres sont égaux (l'égalité étant prise au sens de la superposition!). Cette définition pose déjà un premier problème: si deux polyèdres réguliers ayant même nombre de sommets et même nombre de faces ont des faces égales entre elles, sont-ils égaux? on peut montrer cette égalité en construisant effectivement les polyèdres réguliers. La construction effective montre cette propriété remarquable qu'il n'y a, à similitude près, que cinq polyèdres réguliers, propriété remarquable déjà connue des géomètres grecs (32); certains Grecs en firent un point essentiel de leur cosmologie (33). La théorie des polyèdres réguliers constitue l'un des grands chapitres de la géométrie élémentaire, on la retrouve dans la plupart des grands traitée, depuis les *Eléments* d'Euclide jusqu'à nos jours (34).

Si l'on cherche les *opérations géométriques* qui laissent invariant un polygone ou un polyèdre régulier, on met en évidence, d'une part des rotations, d'autre part des symétries (orthogonales ou centrales), et ces opérations se composent, autrement dit, elles constituent un groupe dont la figure (polygone ou polyèdre) est un invariant; premier exemple de groupe laissant invariant une figure (une configuration si l'on préfère (35)).

Ainsi l'étude des polygones réguliers ou des polyèdres réguliers conduit d'une part à préciser la notion de figure régulière, d'autre part à mettre en place les notions de groupe de transformations et d'invariant, en même temps qu'elle relie ces notions. C'est dire que la notion de groupe, qui est devenue l'une des notions premières de la géométrie au sens des fondements (36) prend sens ici moins par une définition formelle que par la façon dont elle se construit via la problématique de la *régularité*, problématique qui se précise justement avec les notions de groupe de transformations et d'invariant.

Nous avons parlé ci-dessus de polygones et de polyèdres réguliers, nous aurions pu citer d'autres figures, figures admettant un axe de symétrie, un plan de symétrie ou un centre de symétrie, mais aussi frises, pavages, cristaux (37). Ces figures régulières se structurent via la mise en évidence des opérations géométriques (des transformations qui les laissent invariantes, lesquelles opérations constituent un groupe. Les transformations apparaissent ainsi moins comme des opérations *transformantes* que comme des opérations laissant invariante une certaine configuration. La notion de transformation prend sens alors via celles qui ne laissent pas invariante la figure; se pose alors le problème inverse, un groupe de transformations étant donné, en déterminer les invariants.

On voit apparaître ici, à travers la problématique de la régularité, divers aspects de la notion de transformation géométrique. Mais jusqu'ici, les transformations considérées ont une propriété commune (qui d'ailleurs les caractérise), elles laissent invariante la *forme* de la figure, ce qui, en contrepoint, permet d'énoncer une définition *précise* de la forme comme invariant commun aux opérations définies ci-dessus; en termes modernes, *la forme est un invariant du groupe des similitudes*.

Il reste, pour mettre en place la notion générale de transformation géométrique, à définir des transformations qui changent la forme, ce que nous avons appelé des transformations déformantes (rappelons que Chasles parlait des *déformations homographiques*).

Des transformations déformantes

Parmi les transformations qui changent la forme, nous citerons d'abord les projections centrales ou parallèles qui envoient une figure de l'espace dans un plan (la perspective, l'ombre), ces transformations ont joué un rôle important dans la genèse de la notion de transformation géométrique; en effet ce sont les problèmes de représentation des objets de l'espace et les problèmes d'ombre qui ont conduit à la méthode des transformations et à la géométrie projective.

Cependant, si la notion de transformation géométrique est issue des constructions perspectivistes, on ne peut considérer celles-ci comme des transformations géométriques au sens moderne du terme (celui du *Programme d'Erlangen*) dans la mesure où le projet perspectiviste est de représenter le monde tel qu'on le voit; le problème est donc moins de transformer que de définir ce qui est commun à l'objet qu'on se propose de représenter et à sa représentation; autrement dit, les constructions perspectivistes concernent plus l'explicitation d'invariants que la notion de transformation (39).

C'est Desargues qui développe ce que nous appelons aujourd'hui la méthode des transformations en remarquant que si l'on considère une conique comme perspective d'un cercle, on peut déduire les propriétés de la conique à partir des propriétés du cercle (40). Il s'agit alors de *lire* une situation géométrique à travers une autre (dont elle est la transformée), ce qui s'appuie encore sur l'explicitation d'invariants.

Une autre forme de cette double lecture apparaît avec ce que Lambert a appelé la *géométrie perspective* (la géométrie propre du tableau, autrement dit, en termes modernes, la transformée par la représentation perspectiviste de la géométrie usuelle); il s'agit de lire la situation géométrique et d'effectuer, lorsque besoin est, les constructions géométriques relatives à cette situation, directement sur le tableau sans se référer constamment à la situation géométrique originale (41). Cette notion de géométrie perspective constitue ainsi un pas important vers cet aspect essentiel de la méthode des transformations qu'est la lecture d'une situation à travers une autre; la transformation n'est plus qu'un simple procédé de passage entre les deux situations et c'est la notion d'invariant qui est ici la notion fondamentale. On peut ainsi considérer une conique comme un cercle et lire les propriétés des coniques à travers les propriétés du cercle (démontrer les propriétés du cercle), oubliant la transformation géométrique (ici une projection) qui permet de relier cercles et coniques; on peut de même considérer tout quadrilatère comme un parallélogramme, ou un rectangle, je laisse les détails au lecteur. Cet oubli de la transformation derrière un langage en quelque sorte *métaphorique* est ainsi l'aboutissement de la notion de transformation d'une figure dans une autre. Il faudrait citer ici un autre aspect de cette double lecture, l'aspect linguistique, c'est-à-dire la mise en évidence des ressemblances *syntaxiques* dans les énoncés relatifs à deux situations géométriques différentes, problème abordé par Gergonne dans l'étude du principe de dualité, qui remarque que la démonstration de la proposition duale d'une proposition est la duale de la démonstration de la proposition initiale (43). La double lecture se réduit ainsi à un dictionnaire; c'est cet aspect linguistique qui sous-tend ce qu'on pourrait l'aspect *métaphorique* de la pensée mathématique (44).

Ainsi la notion importante est moins celle de transformation que celle d'invariant, la méthode des transformations permettant de déterminer les invariants d'un ensemble de situation géométrique.

La méthode des transformations a conduit les géomètres projectifs à définir les invariants métriques projectifs dont le plus important est le birapport de quatre points alignés (le rapport anharmonique de Chasles (45)). De fait, ces géomètres ont défini une double classification des propriétés géométriques, d'une part ils distinguent entre les propriétés métriques (celles qui relèvent de la mesure) et les propriétés descriptives ou graphiques (celles qui relèvent de la forme des figures et de leurs positions relatives, telles les propriétés d'alignement de points et de concours de droites), d'autre part ils distinguent entre les propriétés qui sont invariantes par projection (les propriétés projectives) et celles qui ne le sont pas. Les propriétés descriptives sont projectives tandis que les propriétés métriques se partagent entre les propriétés métriques projectives (ce sont les relations métriques qui restent invariantes par projection, dont l'étude constitue la théorie des transversales) et les autres.

Un pas important a été fait lorsque certaines de ces propriétés métriques projectives ont pu être définies de façon purement descriptives. Ainsi les propriétés du quadrilatère complet permettent une définition descriptive de la division harmonique. Je citerai aussi la définition projective des coniques qui s'appuie sur l'hexagramme mystique de Pascal et sur la génération organique de Newton (46), définition que Chasles décrit ainsi (47):

Etant données dans un plan deux droites Px, Py et trois points A, B, I, non situés sur ces deux droites, on considère une droite variable passant par A coupant Py au point E, et une droite variable passant par B coupant Px au point F, les droites AE et BF étant liées par la condition que les points E, I, F soient alignés, alors le point M intersection de droites AE et BF décrit une conique.

fig 2

On peut montrer (ce n'est autre que le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique) que toute conique peut être décrite de la façon ci-dessus, autrement dit sans considérations métriques.

Parmi les transformation déformantes, il faudrait citer aussi l'inversion qui fait apparaître la droite comme un cercle particulier, et qui joue un rôle important dans la géométrie conforme; nous renvoyons pour l'étude de l'inversion aux grands traités classiques (48).

Le Programme d'Erlangen

La Géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme entièrement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection, et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis à vis des modifications apportées par la projection. (49)

Felix Klein

En écrivant le *Programme d'Erlangen* Felix Klein répondait à une question posée par le développement de la géométrie projective, savoir, quelle est la relation entre la géométrie élémentaire (la géométrie de la mesure au sens de la tradition grecque) et la géométrie projective. On connaissait déjà des réponses partielles avec l'intervention des points cycliques (points imaginaires à l'infini communs à tous les cercles d'un plan) et de l'ombilicale (cercle imaginaire à l'infini commun à toutes les sphères) et la relation entre la mesure des angles et les points cycliques (la formule de Laguerre) qui s'appuyait sur des remarques que Chasles exposait dans son cours de Géométrie Supérieure (50). Il faudrait aussi citer les mémoires de Cayley sur les formes polynomiales (*the quantics*) dont le sixième montre comment la donnée d'une conique dans le plan (la conique absolue du plan) plan) permet de construire une notion de distance qui, lorsque la conique dégénère en deux points imaginaires conjugués, s'identifie à la notion usuelle de distance; ainsi la géométrie élémentaire devenait une partie de la géométrie projective (51).

Alors que pour les géomètres projectifs, les transformations opéraient sur les figures, Klein renouvelle le point de vue en faisant opérer les transformations sur *la totalité de l'espace* (52). Il remarque alors que *les déplacements de l'espace, ses transformations avec similitude et celles par symétries*, ainsi que *les transformations composées avec les précédentes* (c'est-à-dire celles qui n'altèrent pas les figures) sont *les* transformations projectives conservant l'ombilicale; ceci le conduit à définir la géométrie élémentaire comme l'étude des propriétés invariantes des propriétés par les transformations projectives conservant l'ombilicale (53)

Klein peut alors définir une géométrie comme l'étude des propriétés invariantes par un groupe opérant sur un espace, groupe qu'il nomme le *groupe principal* de la géométrie, groupe qui détermine la structure de la géométrie (puisque c'est le groupe qui permet la détermination des invariants). On peut ainsi établir des relations entre divers types de géométrie; deux géométries ayant un même groupe seront équivalentes du point de vue de leurs structures (ce qui précise la double lecture dont nous avons parlé ci-dessus); une géométrie sera dite subordonnée à une autre si son groupe principal est un sous-groupe du groupe principal de la seconde. Ainsi la géométrie élémentaire est subordonnée à la géométrie projective.

De cette analyse rapide du *Programme d'Erlangen*, retenons d'abord la place centrale de la notion d'invariant; l'autre point important est la notion d'espace comme objet géométrique, ainsi Klein achève en quelque sorte la genèse d'une notion qui s'est dégagée des travaux sur la perspective d'une part, sur la mécanique d'autre part, pour devenir l'un des concepts fondamentaux des mathématiques et de la physique depuis le XVIIème siècle; ce qui montre d'abord que la notion d'espace en tant qu'objet géométrique est loin d'être une notion première, ensuite le rôle joué par le mouvement et les transformations dans la mise en place de cette notion (54).

Nous voulons te faire entrer dans les chemins où nous sommes entrés avant toi, te faire nager dans la mer que nous avons déjà traversée, afin que tu arrives où nous sommes nous-mêmes arrivés, que tu voies ce que nous avons vu, que tu constates par toi-même ce que nous avons constaté, et que tu puisses te dispenser d'asservir ta connaissance à la nôtre. (55)

Ibn Tufayl

Des considérations d'ordre historique et épistémologiques précédentes, quel est l'usage pour l'enseignement? et pour être plus précis, peut-on inférer d'une réflexion d'ordre historique ou épistémologique des règles didactiques?

Que la réflexion épistémologique soit nécessaire si l'on veut comprendre les enjeux d'une notion qui devient objet d'enseignement, cela est vrai moins pour des raisons proprement didactiques que pour des raisons liées au savoir enseignée, si l'on considère que la signification d'un savoir enseigné participe de ce savoir et ne saurait se réduire à la seule pratique scolaire; c'est donc autour de ce savoir que se définit son enseignement et que *celui qui est enseigné* peut lui prêter la force dont parle Francisco Sanchez (cf ci-dessus). La *transposition didactique*, si tant est qu'elle soit nécessaire voire inévitable (56), ne peut se situer que dans une problématique du savoir, à moins de dénier à *ce qui est enseigné* (l'objet d'enseignement) toute signification extra-scolaire. J'ai par ailleurs critiqué cette conception qui consiste à réduire un objet d'enseignement à sa seule fonction d'être enseigné (57), conception qui participe plus de l'obscurantisme contemporain que de la transmission du savoir qui constitue, quoi qu'on en ait dit, l'un des objectifs de l'enseignement, même si on sait aujourd'hui que ce n'est pas le seul.

On peut alors penser la transposition didactique comme la construction des cheminements qui permettront d'amener ceux qui sont enseignés à accéder au savoir contemporain (nous reviendrons plus loin sur ce qu'il faut entendre par cheminement), dans le cas contraire, la transposition didactique (et c'est peut-être l'intérêt d'une telle notion du point de vue de la sociologie de l'éducation) n'est que le moyen, explicite ou implicite, de légitimer un discours dont le sens a été oublié ou occulté.

Le premier problème qui se pose à celui qui enseigne, est alors, devant ce qui est objet d'enseignement, de définir le contexte qui lui donne sens (le contexte qui fait apparaître les diverses significations du contenu enseigné). La réflexion épistémologique et le recours à une perspective historique ont un rôle à jouer dans la mise en place d'un tel contexte, mais, précisons-le, il s'agit à travers une telle approche, moins de définir un "comment enseigner" illusoire que d'expliciter un" pourquoi enseigner", c'est-à-dire expliciter les problématiques qui permettront à *celui qui est enseigné* de comprendre les *raisons* de *ce qui est enseigné* (et il faut savoir que ces raisons sont multiples et participent d'objectifs, voire contradictoires).

Ceci dit, l'approche problématique n'est pas sans risque.

Lorsqu'on parle d'une approche historique dans la mise en place de problématiques, il ne s'agit pas de reprendre les problématiques historiques, la significations d'icelles peuvent être totalement étrangères au contexte d'aujourd'hui et une systématisation de l'approche historique peut n'être qu'un obstacle supplémentaire pour *celui qui est enseigné*; autant que le cheminement de *celui qui est enseigné* n'est pas nécessairement le cheminement historique même si la connaissance du cheminement historique peut guider *celui qui enseigne* dans sa tâche d'enseignement.

D'autre part, la mise en place d'une problématique ne suffit pas à définir le cheminement, ni pour *celui qui enseigne*, ni pour *celui qui est enseigné*; autant dire que si l'acquisition du savoir passe par une (re)construction d'icelui par *celui qui est enseigné*, cette (re)construction n'est pas redécouverte, et c'est le rôle de *celui qui enseigne* de guider, quand besoin est, cette (re)construction.

Le problème didactique se situe dans la construction de ce cheminement dont j'ai parlé ci-dessus, qui consiste à partir d'une problématique pour construire pas à pas les moyens de répondre aux problèmes qu'elle pose. Il nous faut distinguer ici le cheminement de ce qu'on appelle traditionnellement une progression, c'est-à-dire cet ordre linéaire défini dans le temps qui consiste à mettre *celui qui est enseigné* devant les diverses étapes d'une construction programmée du savoir qu'on lui enseigne, progression qui se situe au centre de cette contradiction inhérente à l'enseignement, entre l'ordre linéaire du discours et l'acquisition des connaissances qui se situe dans un entremêlement de ruptures, de retours en arrière et d'avancées inattendues où l'intuition joue un rôle toujours difficile à expliciter et où les rationalités se définissent toujours a posteriori, contradiction entre un discours qui se veut rationnel (le discours du savoir) et une activité qui se propose moins d'être rationnelle que de construire du rationnel (58), ce qui est au principe même de la construction de la connaissance, celle du savant comme celle de l'apprenti. Et peut-être faut-il demander à *ceux qui enseignent* de faire retour sur eux-mêmes, sur la façon dont ils se sont appropriés le savoir qu'ils enseignent pour comprendre que l'ordre linéaire de leur discours (qu'il ne s'agit pas de rejeter) cache des processus plus complexes, encore que cela soit une tâche difficile dans la mesure où lorsqu'on sait, on na sait plus comment on ne savait pas (59).

C'est en rapport avec cette contradiction, qu'il s'agit moins de résoudre que d'assumer, que la réflexion épistémologique (que ce soit celle de l'enseignant ou celle, plus naïve, de l'élève) peut apporter un éclairage et que la perspective historique peut permettre d'une part, de mieux comprendre les diverses significations du savoir enseigné, d'autre part, de prendre conscience des obstacles à l'acquisition de ce savoir (60).

Après ces considérations générales sur le rapport de l'épistémologie et de l'histoire des sciences à l'enseignement, nous revenons à ce qui nous préoccupe ici, savoir, la place des transformations géométriques dans l'enseignement de la géométrie. Nous avons vu que les transformations géométriques participent de plusieurs problématiques, la problématique de l'égalité et du mouvement, la problématique de la forme et de la similitude, la problématique de la régularité, la problématique de la représentation des objets de l'espace, cette dernière problématique seule, via les transformations déformantes, donnant son plein sens à la notion de transformation géométrique et à la notion d'invariant. Ces diverses problématiques se sont unifiées au cours du développement historique de la géométrie, cette unification se cristallisant autour du *Programme d'Erlangen*, renouvelant la pensée géométrique.

Le problème didactique peut alors être posé de deux façons.

On peut considérer, à travers une vision finaliste du développement scientifique, que l'objectif de l'enseignement de la géométrie se situe dans son unité plus que dans son unification, ce qui revient à prendre sinon le *Programme d'Erlangen*, du moins la méthode des transformations comme objet d'enseignement permettant d'une part d'accéder à la pensée géométrique contemporaine, d'autre part d'utiliser cette *voie royale* (que serait la théorie des groupes de transformations) dans le développement de l'enseignement de la géométrie (61).

Ce point de vue, dont nous ne nions pas la cohérence, oublie que le *Programme d'Erlangen* ne prend sens que dans une perspective globale (qu'elle soit celle de l'histoire ou une autre importe peu ici) et que, hors d'une telle perspective, le Programme d'Erlangen apparaît comme une construction formelle et la méthode des transformations comme un ensemble de procédures plus ou moins astucieuses pour résoudre quelques problèmes convenablement posés. La nécessaire transposition didactique oscille entre la réduction de l'enseignement à un discours bien fait et la mise en pratique par les élèves de quelques procédures considérées comme exemplaires, les fameuses activités, ce que j'ai appelé, dans un article déjà cité, l'illusion langagière et l'activisme pédagogique(62). Sans parler de cette erreur épistémologique signalée de la première partie de cet article qui consiste à introduire la notion de transformation sur des opérations qui ne transforment pas et qui acquièrent le statut de transformation seulement lorsqu'elles apparaissent comme des transformations projectives particulières (63). Il est vrai que c'est la seule façon de construire une progression qui respecte (à juste titre) l'antériorité de la géométrie élémentaire sur la géométrie projective, ce qui conduit à *forcer* la notion de transformation.

On peut considérer au contraire le Programme d'Erlangen dans une perspective globale, autrement dit comme une synthèse de connaissances géométriques issues de problématiques diverses, auquel cas l'accent est mis sur la définition de telles problématiques (qui ne sont pas nécessairement les problématiques historiques).

Ce point de vue renvoie à ces premiers objets de la géométrie que sont les figures et rappelle que c'est autour des figures que s'organise le développement de la géométrie, que ce soit avec l'étude intrinsèque des figures (dont un exemple est l'étude des figures régulières) ou que ce soit avec l'étude des relations entre figures d'où est issue la méthode des transformations. Ces remarques conduisent à proposer une démarche didactique (qui n'a aucune raison d'être la démarche historique) qui s'appuie sur une problématique des figures; nous distinguerons alors les problématiques de la ressemblance (l'égalité, la similitude, la régularité) et les problématiques où interviennent des transformations déformantes (la perspective, les ombres...); c'est seulement via les transformations déformantes que prendront sens les notions de transformation géométrique et d'invariant, et que pourra se mettre en place l'importante notion de groupe de transformations, non comme définition formelle, mais comme instrument d'étude de la géométrie, conduisant à une problématique de la ressemblance, comme le suggère l'assertion de Klein citée au début du paragraphe sur le *Programme d'Erlangen*. En ce sens le problème n'est pas de dire *a priori* si la notion de groupe de transformations doit figurer ou non dans un programme, le problème est celui de la signification de cette notion dans le contexte géométrique enseigné.

Nous terminerons cet article par une remarque sur la problématique de l'égalité.

Dans la traduction euclidienne, cette place est d'autant importante que le mouvement, qui pourtant sous-tend le principe de l'égalité par superposition, est éliminé, considéré comme étranger à la géométrie; mais les raisons de cette élimination sont essentiellement d'ordre métaphysiques, ainsi Platon écrit au livre VII de la *République* (64):

Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient; si elle s'arrête au devenir, elle ne nous convient pas.

Le mouvement n'a pas cependant été ignoré par les géomètres, y compris les géomètres grecs, et nous avons vu qu'au XIXème siècle s'est développer ce qu'on peut appeler la géométrie du mouvement (cf ci-dessus p). Ainsi Houël (65) distingue le mouvement géométrique et le mouvement dans le temps (cf Annexe 2), et plus tard, dans son cours à l'Ecole Polytechnique, Mannheim écrira (66):

La Cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces; la Géométrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et du temps, c'est-à-dire qu'elle a pour objet l'étude des déplacements. Nous réservons l'expression de déplacement pour un mouvement dans lequel on ne considère pas la vitesse.

Notons que le déplacement tel que le définit Mannheim n'est pas une transformation géométrique contrairement à la terminologie ultérieure de Bricard (Cf ci-dessus p).

C'est cette notion géométrique qui conduira Charles Méray à proposer d'enseigner la géométrie élémentaire à partir du mouvement de translation et du mouvement de rotation (67). Cette démarche, qui sera contestée comme remettant en cause la rigueur euclidienne, sera pourtant l'un des points de la réforme de 1902/1905, défendue par Carlo Bourlet (68) et Emile Borel (69).

Sur le plan didactique cette démarche met en valeur le caractère expérimental de la géométrie et nous renvoyons aux *Instructions* accompagnant les programmes de 1905 (Cf Annexe 3). C'est cet aspect expérimental que soulignait Borel dans une conférence au Musée Pédagogique en 1904 dans laquelle il proposait la création dans les lycées de *laboratoires de mathématiques* (70) et dans un des nombreux débats suscités par la réforme de l'enseignement des mathématiques, Borel expliquait (71):

L'enseignement moderne de la Géométrie, enseignement plus intuitif et plus expérimental, aurait sans doute pour effet de rendre les classes de mathématiques plus intéressantes, plus attrayantes, et il est probable que cette méthode nouvelle donnerait plus d'élèves ayant le goût pour les mathématiques.

Lille 6 décembre 1990

rudolf bkouche

Annexe 1

Note I.

Sur l'invariabilité des figures.

Toute la Géométrie est fondée sur l'idée de l'invariabilité des formes. On commence par admettre qu'il existe dans les figures une certaine propriété, qui subsiste lorsque ces figures se trouvent transportées dans une autre région de l'espace.

Cette propriété ne saurait être définie en termes géométriques, sans pétition de principe. L'idée d'invariabilité de forme nous vient de l'expérience. Après avoir acquis l'idée de grandeur ou d'étendue par la considération du mouvement (voy. la Note suivante), nous constatons que certains corps, ceux surtout qui offrent au toucher le plus de résistance, nous présentent toujours, de quelque manière qu'on les déplace, des dimensions et des configurations que nous jugeons être les mêmes, c'est-à-dire qui, appréciées d'après le mouvement de l'œil, en tenant compte de l'éloignement plus ou moins grand, nous causent des impressions toujours identiques. Nous donnons à ces corps le nom de *corps solides*.

Nous dépouillons ensuite, par abstraction, ces corps de toutes les parties dont la considération ne nous intéresse pas; ou, si l'on veut, nous supposons ces parties parfaitement translucides et pénétrables; et l'ensemble des parties conservées ou restées visibles constitue ce qu'on appelle une *figure géométrique*.

Annexe 2

Note II.

Sur le mouvement géométrique.

C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du *mouvement*.

L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du *mouvement géométrique*, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.

Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement *dans le temps*, objet de la *cinématique*, ne peut pas dépendre d'une autre science que de la *géométrie pure*.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions nouvelles de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu et malgré eux; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de géométrie, dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée.

Annexe 3

Instructions sur l'enseignement de la Géométrie.

Géométrie. — L'enseignement de la géométrie doit être essentiellement concret; il a pour but de classer et de préciser les notions acquises par l'expérience journalière, d'en déduire d'autres plus cachées et de montrer leurs applications aux problèmes qui se posent dans la pratique.

Toute définition purement verbale étant exclue, on ne devra parler d'un élément nouveau qu'en donnant sa représentation concrète et en indiquant sa construction; ceci exige que l'ordre généralement adopté soit modifié; en particulier, que la définition du cercle soit introduite dès le début et que l'usage des instruments de dessin soit indiqué au fur et à mesure des besoins. Si le programme est rédigé dans l'ordre habituel, c'est afin de n'imposer aucun ordre particulier; il est entendu que celui qui est indiqué n'est pas celui que l'on suivra dans l'enseignement.

Au point de vue de l'explication des faits, le professeur devra faire appel à l'expérience et admettre résolument comme vérité expérimentale tout ce qui semble évident aux enfants; il n'y a nulle utilité à démontrer l'égalité des angles droits, des angles correspondants, l'existence de l'intersection d'un cercle et d'une droite dont un point est intérieur au cercle, etc. L'élève ne comprend pas qu'il y ait lieu à démonstration et ne retient que des mots vides de sens; on peut, et cela est désirable, faire sentir dans certains cas la nécessité d'une démonstration; mais il ne faut donner cette dernière que si l'élève est convaincu qu'elle est indispensable.

On aura ainsi l'occasion de montrer qu'il y a deux certitudes d'ordres différents; l'une expérimentale, qui appartient aux sciences physiques; l'autre logique, qui est celle des vérités mathématiques; mais, il y aurait un grave inconvénient à donner à cette dernière une importance qu'elle n'a pas dans la réalité et à jeter le discrédit sur la première qui, il faut bien l'avouer, est la seule que nous possédions, puisque les principes mathématiques n'ont pas d'autres fondements, tout au moins pour les élèves. Ce qu'il importera de faire ressortir, c'est l'importance du raisonnement logique pour réduire au minimum les faits expérimentaux; il serait aisé de multiplier les exemples : si l'on construit un décagone régulier inscrit, on constate expérimentalement qu'il est à peu près impossible de le fermer; au contraire, en prenant pour côté d'un polygone régulier la moitié du côté du triangle équilatéral, on obtient sensiblement un heptagone régulier; si l'on mesure la somme des angles d'un triangle on trouve des nombres voisins de 180°, etc. Ces exemples montrent que l'expérience fait pressentir une vérité, mais est insuffisante pour la faire connaître d'une façon précise; si donc, il est possible, à l'aide d'un raisonnement logique, de mettre cette vérité en évidence ou d'infirmer ce que semblait donner l'expérience, il y a tout avantage à le faire; il est aisé également de faire ressortir l'intérêt pratique que présente la méthode purement logique en insistant sur ce qu'elle fait disparaître toute incertitude dans les résultats. On aura ainsi préparé l'étude de la géométrie, qui sera faite dans le second cycle, où les élèves avertis ne s'étonneront pas du soin minutieux avec lequel les moindres théorèmes sont démontrés.

Un appel constant à la notion de mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la géométrie; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et plans perpendiculaires résultera de la rotation; l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on précisera en introduisant la notion simple d'orientation.