CINQ NOUVELLES GÉOMÉTRIQUES

Marcel Berger

Ces cinq brefs aperçus ont pour titres

I Convexité

II Billards polygonaux

III Empilements de cercles

IV Géométrie algorithmique

V La révolution dans "groupes et géométrie"

Dans les cinq sujets abordés, brièvement, j'ai voulu exposer des mathématiques qui avaient en commun les éléments suivants.

Le premier est la nature géométrique, bien visualisable, le caractère élémentaire et enfin l'aspect naturel du sujet abordé.

Le second est que, si simple que soient ces questions naturelles et visibles, les réponses y sont, soit inconnues encore à ce jour, soit très difficiles à obtenir. La difficulté peut être dans la finesse de la démonstration mais aussi dans la nécessité de construire des objets mathématiques très abstraits et d'y bâtir des résultats très élaborés.

Le troisième point est que ces résultats sont récents, remontant au plus à une dizaine d'années.

Enfin la plupart d'entre eux ont des applications touchant directement à d'autres sciences.

Par ailleurs tous ces exemples illustrent, sous forme plus ou moins obvie, la phrase d'Hermann Weyl : "Les mathématiques sont la science de l'Infini".

Nous avons terminé par quelques citations qui, nous l'espérons, plairont au lecteur.

Très brièvement voici de quoi il est question dans ces cinq nouvelles.

La première, "convexité", étudie les sections par des plans parallèles d'un corps convexe de l'espace. Le problème est d'étudier l'aire de ces sections.
Trois problèmes :

(i) comment varier cette aire lorsque le plan de section se déplace parallèlement à lui-même ?
(ii) que dire des sections du cube unité ? Un problème si simple révèle des surprises !
(iii) une inégalité systématique entre les aires de sections par les mêmes plans de deux convexes entraîne-t-elle aussi une inégalité pour le volume desdits convexes ?

Dans les "billards polygonaux" on étudie la trajectoire d'une petite boule (ou d'un rayon de lumière) qui se promène à l'intérieur d'un polygone en se réfléchissant sur les bords en sorte que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Encore des surprises ici !

Les "empilements de cercles" étudient surtout ceux où chaque cercle touche six autres cercles. Le résultat fondamental (et utile) est que les seuls tels empilements qui remplissent tout le plan sont ceux où tous les rayons des cercles sont égaux. Il y a là un phénomène très fort de rigidité.

La quatrième section donne deux exemples tirés d'une discipline toute récente, la "géométrie algorithmique". La géométrie intervient ici doublement : d'abord dans les problèmes posés, puis pour les résoudre, typiquement par des algorithmes efficaces.

Le fameux programme d'Erlangen de Felix Klein (1872) était que, étudier une géométrie (euclidienne, sphérique, hyperbolique, affine, projective, etc.) c'était en fait étudier le groupe de toutes les transformations préservant la géométrie considérée (isométries, affinités, homographies, etc.) et donc qu'il n'y avait guère plus que de l'algèbre à faire pour résoudre tous les problèmes de la géométrie étudiée. Bien sûr il s'agit là d'une bien mauvaise caricature de la pensée de Klein, comme le montre sa citation donnée plus bas.

Cependant ce programme était profond ; il a produit de nombreux résultats et influencé la pensée mathématique de pratiquement tout le vingtième siècle.

La révolution à laquelle Mikhail Gromov vient d'apporter un appui décisif, révolution commencée auparavant çà et là, mais sporadiquement, c'est que, pour étudier un certain type de groupes, à savoir les groupes discrets ayant un nombre fini de générateurs, il faut y introduire une géométrie et l'étudier. En outre ceci est inéluctable en ce sens que ces groupes ne sont jamais, sauf avec une probabilité zéro, des groupes provenant d'une géométrie au sens exposé plus haut. Les idées du texte fondateur de Gromov sont extrêmement simples au départ, même si techniquement les démonstrations sont profondes et difficiles. Y est inventée la notion d'espace métrique hyperbolique, si simple que nous pouvons la donner ici : un espace métrique (X, d) est dit hyperbolique s'il existe une constante $\delta \geq 0$ (ne dépendant que de d) tel que tout triangle $\{x,y,z\}$ soit δ-fin , i.e. tout point d'un côté du triangle est à une distance inférieure ou égale à δ de l'un des deux autres côtés du triangle. Comme on dit, tous les triangles sont δ-fins . Cette notion n'est intéressante que pour les espaces infinis. Les espaces euclidiens ne sont pas hyperboliques, les espaces de la géométrie hyperbolique le sont.

TROIS CITATIONS

Gauss (dans une analyse de la "Géométrie descriptive" de Monge, 1813) :

"On ne peut nier les avantages d'un traitement analytique sur un traitement géométrique : concision, simplicité et spécialement sa généralité, qui en général devient de plus en plus décisive au fur et à mesure que les recherches deviennent de plus en plus difficiles et compliquées. Cependant il est toujours très important de continuer à cultiver la méthode géométrique...... En particulier nous devons louer ce livre pour sa grande clarté...... et de là recommander son étude comme nourriture intellectuelle, laquelle sans aucun doute contribuera au renouveau et à la conservation du vrai esprit géométrique, qui manque parfois dans les mathématiques de notre époque."

"(La méthode géométrique) reste indispensable dans les premières études de la jeunesse, pour éviter un point de vue partiel ...... et pour donner à la compréhension une ligne directrice et une vue qui sont beaucoup moins développées et même plutôt compromises par la méthode analytique."

Et plus tard :

"Il est dans la nature des mathématiques des temps modernes (en contraste avec celles de l'antiquité) que nous possédons un levier grâce à notre langage symbolique et nos notations, au moyen duquel les raisonnements les plus compliqués sont réduits à un certain mécanisme. De cette façon la Science a gagné infiniment en richesse, mais a perdu autant ...... en beauté et en caractère. Combien souvent ce levier n'est-il pas appliqué mécaniquement ! ...... Je demande que, chaque fois que l'on utilise le calcul, on reste conscient des conditions initiales."

Klein, 1893 :

"C'est mon opinion que, dans l'enseignement, il est non seulement permis mais absolument nécessaire d'être moins abstrait au départ, d'avoir constamment un regard vers les applications et de n'en référer aux raffinements qu'au fur et à mesure que les étudiants sont devenus capables de les comprendre. Ceci n'est autre, bien sûr, qu'un principe pédagogique universel à observer dans tout enseignement mathématique."

"Je suis conduit à de telles remarques parce que je prends conscience d'un danger grandissant dans le système universitaire allemand : le danger de la séparation entre les mathématiques abstraites et leurs applications scientifiques et techniques. On ne peut que déplorer une telle séparation ; car elle sera nécessairement suivie par un manque de profondeur dans les sciences appliquées et un isolement des mathématiques pures."

CINQ NOUVELLES GEOMETRIQUES

I. CONVEXITE

II. BILLARDS POLYGONAUX

III. EMPILEMENT DE CERCLES

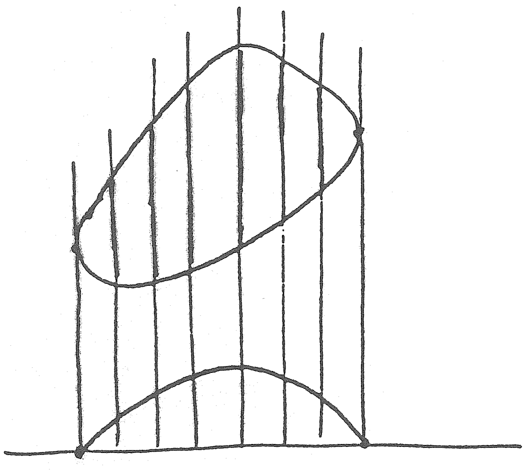
IV. GEOMETRIE ALGORITHMIQUE

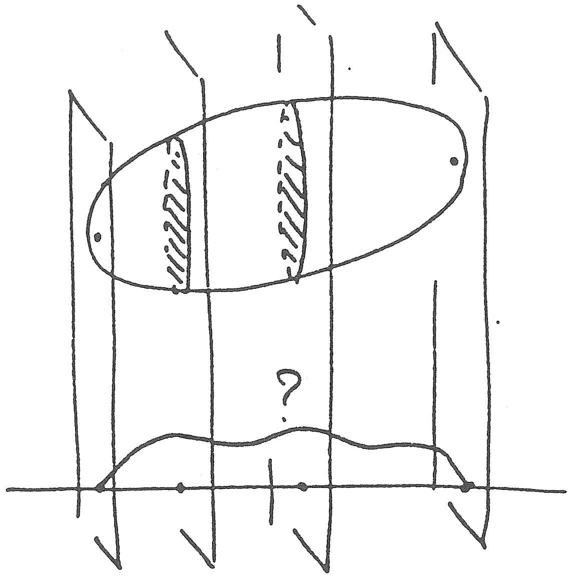
V. LA REVOLUTION DANS "GROUPES ET GEOMETRIE".

I. CONVEXITE

Notion si naturelle qu'elle n'est pas définie (manuels d'Anatomie). Disons : assurance de "pas de creux".

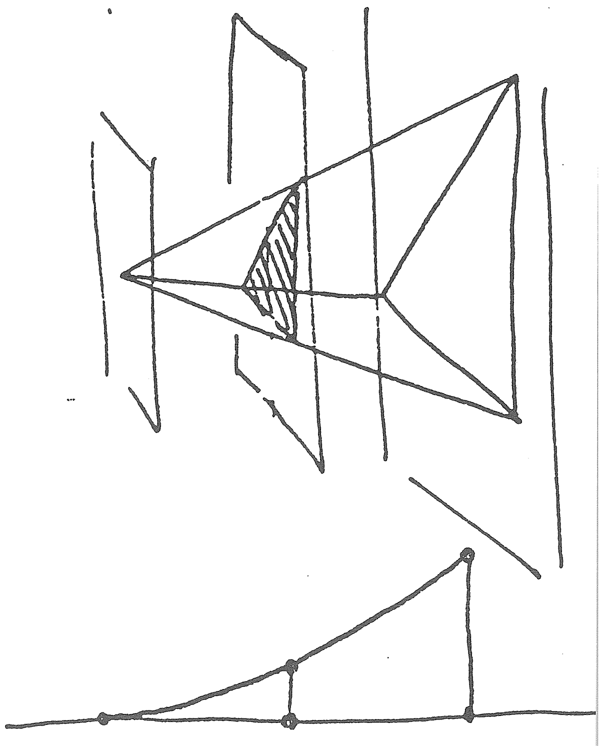
Coupons un convexe du plan E^2 par des droites parallèles et dessinons le graphe de la fonction "longueur de la section".



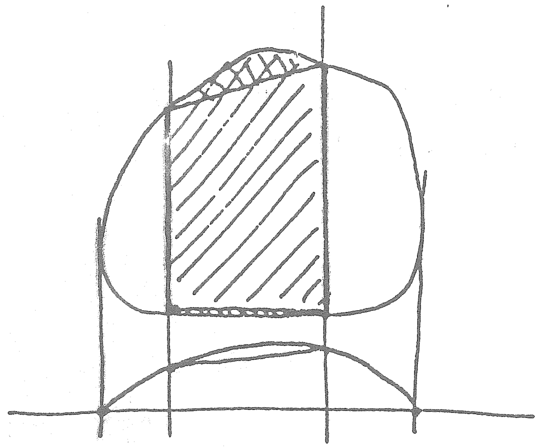


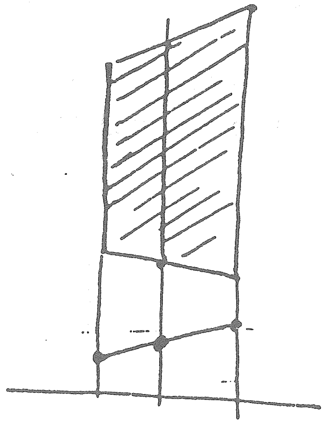
C'est une fonction concave.

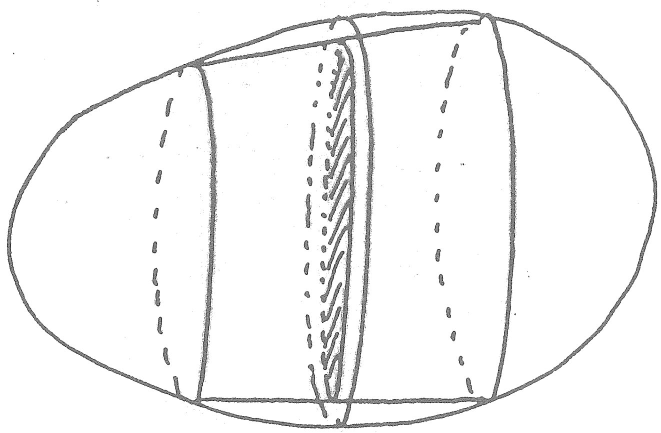
C'est faux dès E^3.

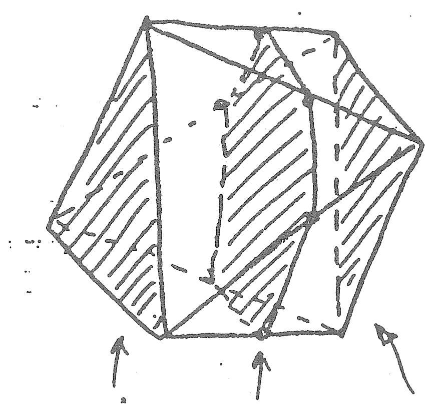


Essayons d'étendre la démonstration du cas E^2 :









A $\quad \frac{A + B}{2} \quad$ B

[enveloppe convexe de deux sections]

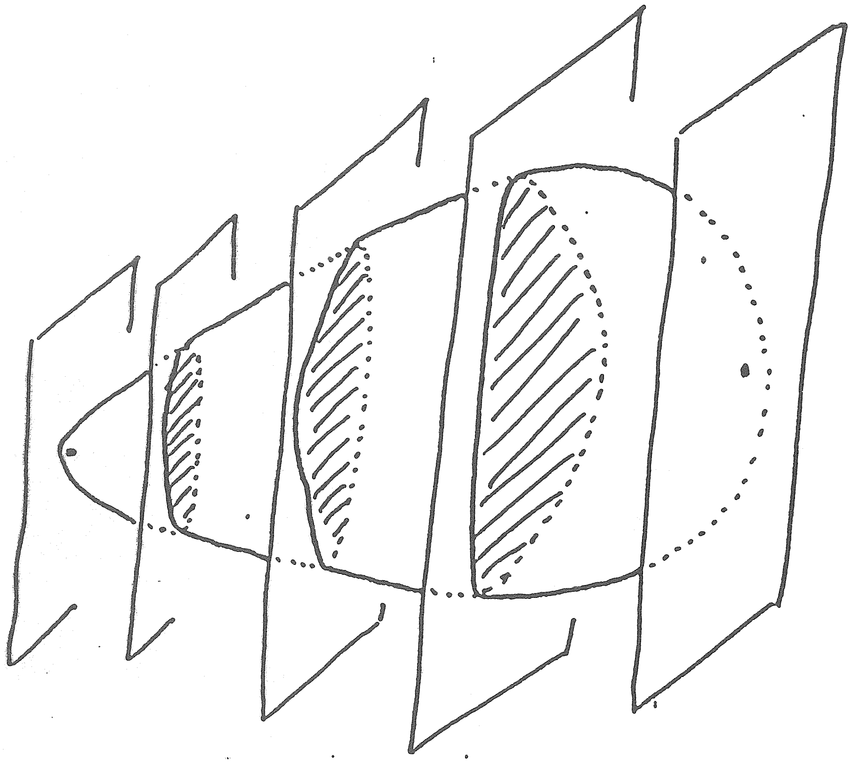
Il n'existe pas de formule simple pour Aire $(\frac{A + B}{2})$ (plus généralement de Aire $(\lambda A + (1 - \lambda) B)$).

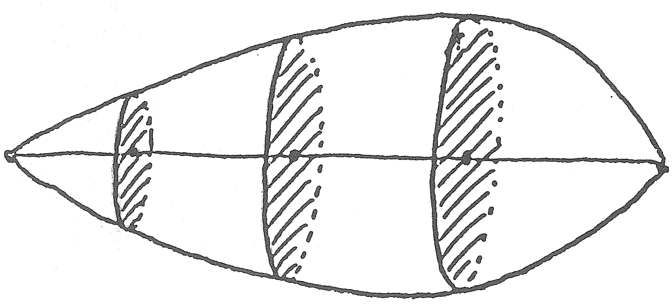
Brunn trouva la solution en 1900 : la fonction qui est concave c'est

$$\lambda \longrightarrow \sqrt{\text{Aire } (\lambda A + (1 - \lambda) B)}$$

Brunn l'exprimait ainsi : on remplace la section considérée par un disque, centré sur l'axe, et ayant la même aire.

Alors le corps obtenu est un convexe.





Brunn vraie E^d $\forall d$, prendre $\sqrt[d-1]{\mathrm{Vol}(\cdot)}$

<u>Corollaire</u> : Le volume (l'aire) de la section croît jusqu'à un maximum puis redécroît. En particulier si le convexe est symétrique par rapport à l'origine c'est la section passant par l'origine qui a la valeur maxima.

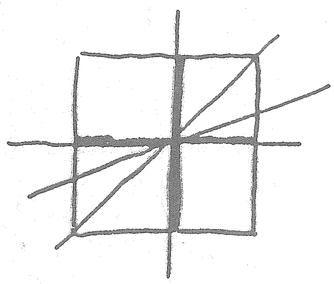
A ce jour, il n'existe pas de démonstration vraiment simple, satisfaisante du théorème de Brunn- Minkowski.

D'autres exemples pour montrer que les sections des convexes sont une chose difficile.

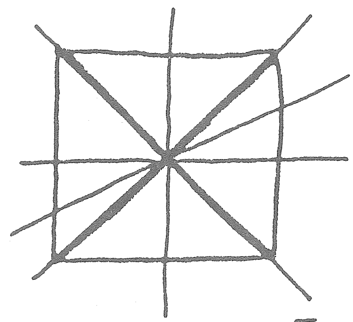
Ce n'est que depuis -10 et -3 ans que <u>les sections du cube unité de E^d</u> vérifient toujours :

- maximum des sections = $\sqrt{2}$ $\forall d$
- minimum des sections passant par le centre = 1 $\forall d$

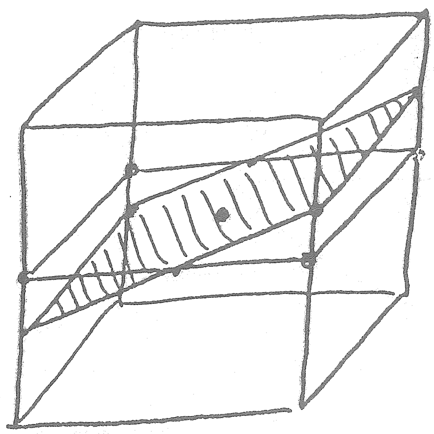
Intérêt des dimensions quelconques (grandes, intuition difficile) (ordinateurs).

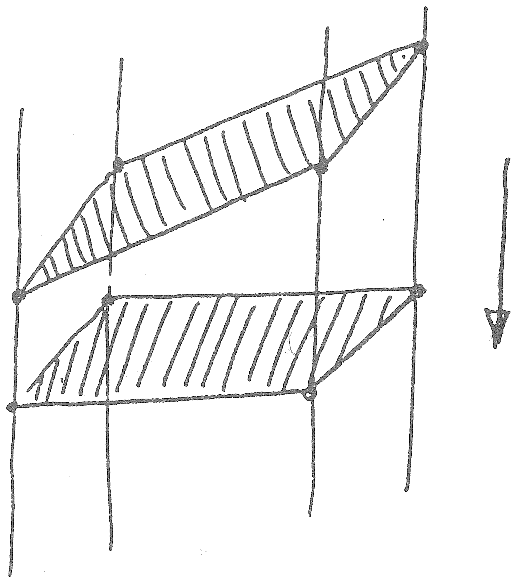


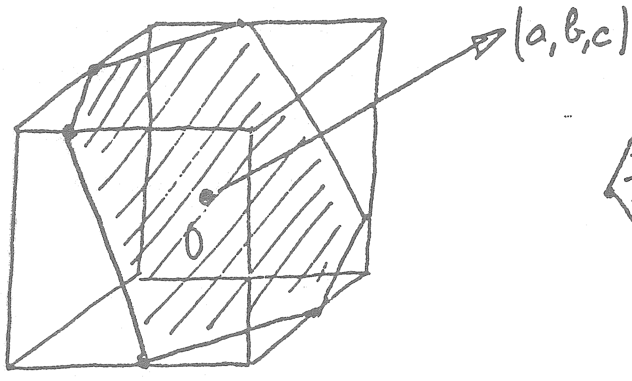
minimum des sections centrales = 1

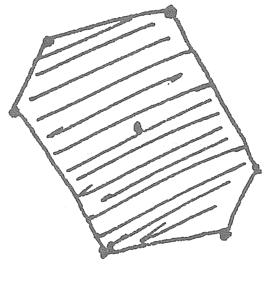


maximum absolu = $\sqrt{2}$









Formule de K. Ball (1987) :

la surface de la section du cube unité de l'espace ordinaire pour le plan

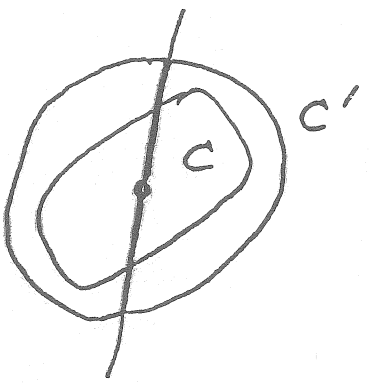
$$ax + by + cz = 0 \qquad a^2+b^2+c^2=1$$

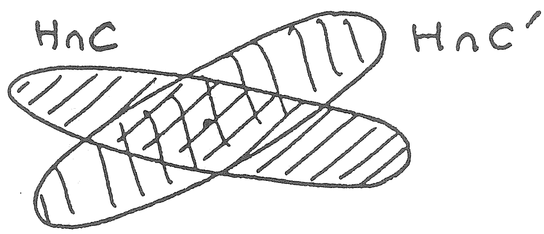
est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{a\lambda}{2}\right)}{\frac{a\lambda}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{b\lambda}{2}\right)}{\frac{b\lambda}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{c\lambda}{2}\right)}{\frac{c\lambda}{2}} \cdot d\lambda$$

La conjecture de Busemann :

Deux convexes C, C' symétriques par rapport à l'origine de E^d sont tels que $\forall$H hyperplan par l'origine Vol(H$\cap$C) < Vol(H$\cap$C'). Montrer que Vol(C) $\leq$ Vol(C').





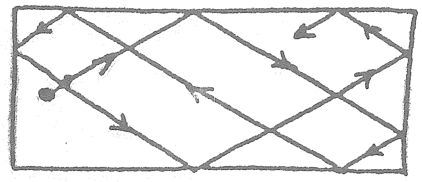
même surface !
mais bien différents.

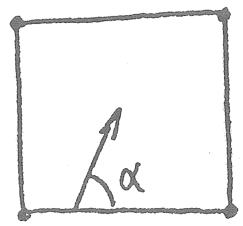
Vraie d = 2 car symétrie ===> C $\subset$ C'
Ouverte à ce jour d = 3
Fausse certainement à partir de d = 7 (prendre d = 10 C = cube, C' = sphère)
Ce qui est ouvert (problème central des convexes aujourd'hui) c'est la conjecture : il existe un réel a(< ∞ !) tel que $\forall$d $\forall$C, C'$\subset E^d$ convexes symétriques si $\forall$H passant par l'origine on a Vol(H$\cap$C) < Vol(H$\cap$C'), alors Vol(C) $\leq$ a.Vol(C').

Intérêt : a indépendant de d permet de considérer des E^∞.

II. BILLARDS POLYGONAUX.

Le billard rectangulaire (carré) est parfaitement compris. Facile que :





- $\operatorname{tg} \alpha \in \mathbb{Q}$ <==> trajectoire périodique

- $\operatorname{tg} \alpha \notin \mathbb{Q}$ <==> trajectoire partout dense (noircit sur ordinateur en un temps fini) (régulièrement)

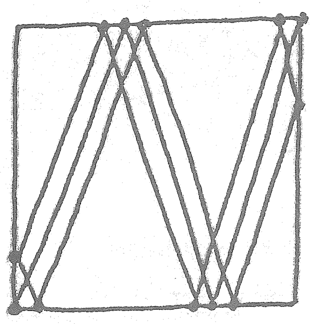
En outre, on sait compter asymptotiquement ces trajectoires périodiques (fonction de comptage)

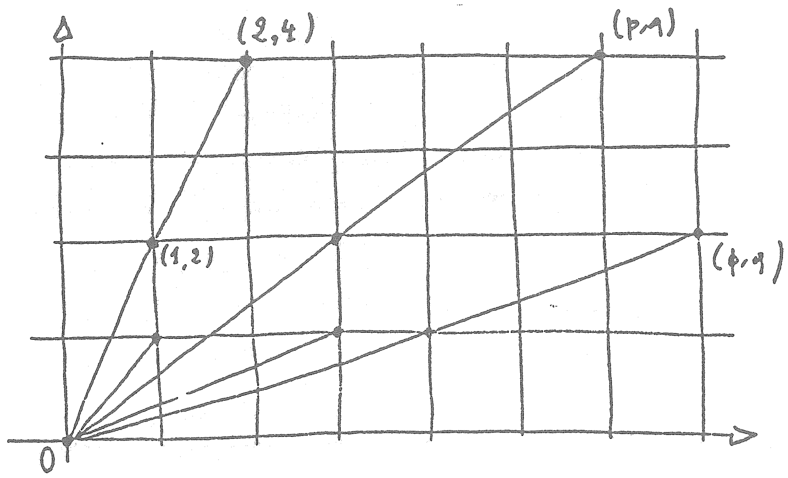
$FC(\ell)$ = nombre de trajectoires pédiodiques de longueur $\leqslant \ell$

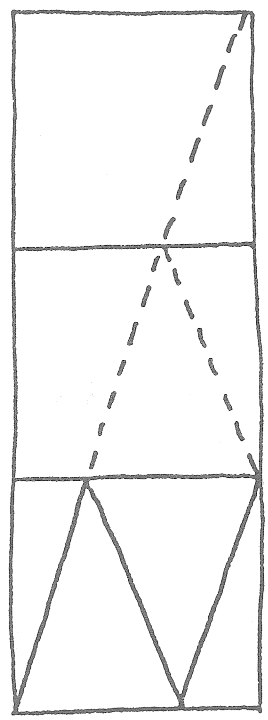
Alors :

$$FC(\ell) \simeq \frac{3}{4\pi} \ell^2 \qquad (\ell \longrightarrow \infty)$$

Démonstration : Déployer les trajectoires







"déploiement"

$\# \{ \sqrt{p^2+q^2} \leq \ell$ with $(p,q) = 1 \}$

Autant de trajectoires périodiques de longueur ℓ que d'entiers (p,q) positif tel que $p^2 + q^2 \leq \ell^2$.

Compter les carrés dans un quart de cercle

aire (cercle) $= \pi\, \ell^2$ "==>" $FC(\ell) \simeq \frac{\pi}{4}\, \ell^2$ $(\frac{\pi}{8}\, \ell^2)$ (orientation)

<u>Erreur</u> : longueur du cercle $\simeq 2.\ \ell$

Où est l'erreur ? C'est que (1,2) et (2,4) donnent la même trajectoire ==>

estimer $\# \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 : (p,q) = 1,\ p^2 + q^2 \leq \ell^2\}$

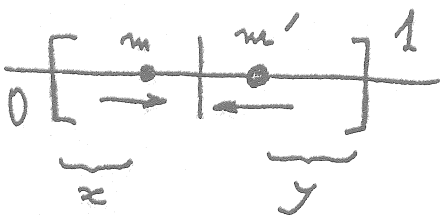
Donc c'est
$$\frac{\pi}{8}\, \ell^2 \;/\; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{QK.}$$

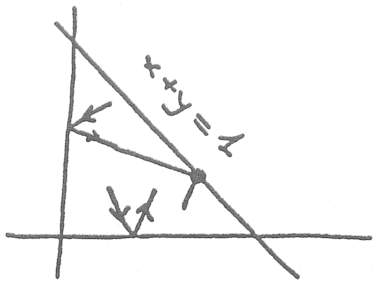
<u>Ouvert (problème du cercle) à ce jour</u> :
$$\# \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 : p^2 + q^2 = \ell^2\} \simeq \frac{\pi^2}{4}\, \ell^2$$

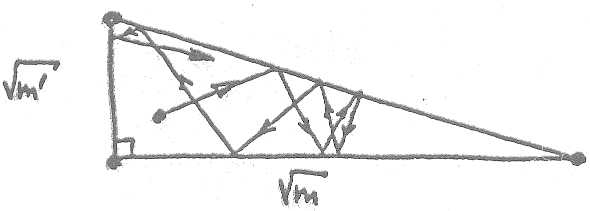
Quel est le terme d'après dans cette estimation asymptotique ?

Le cas le plus simple après le rectangle est le triangle rectangle.

<u>Intérêt</u> : Le cas le plus simple de la mécanique statistique :

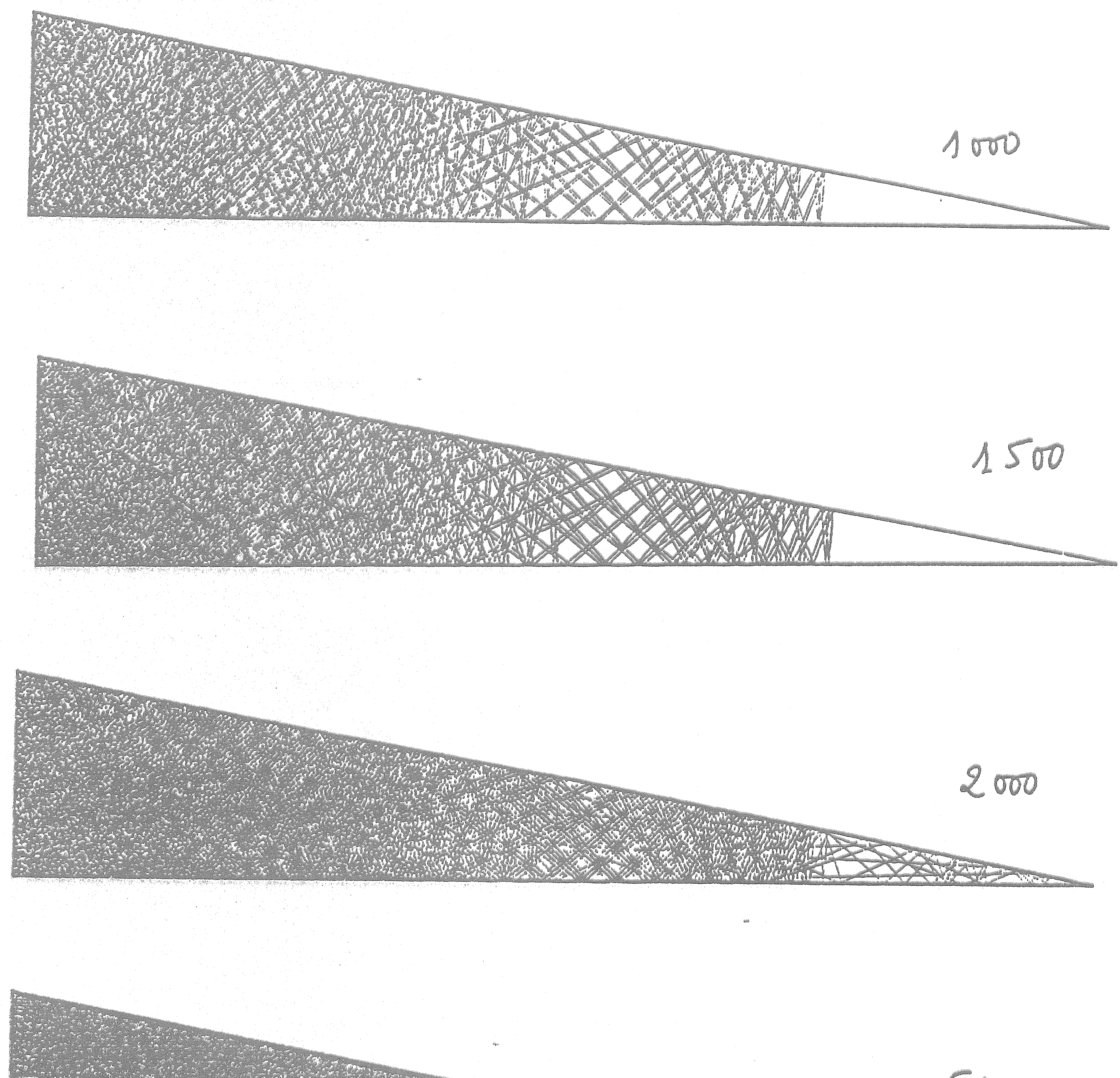






semble incontrolâble ! En fait, on ne sait pas ce qui se passe en toute généralité. Gros progrès depuis 10 ans cependant.

<u>Facile</u> : Il existe des cas de $\frac{m'}{m}$ pour lesquels il existe une trajectoire non périodique et qui ne noircit qu'une partie du triangle.


1 000
1 500
2 000
5 000

Très difficile : Si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ alors les trajectoires non pédiodiques noircissent tout le triangle (et ce régulièrement). Les trajectoires périodiques ont une FC vérifiant

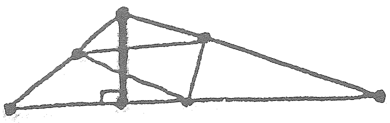
$$a\,\ell^2 < FC(\ell) < b\ell^2 \quad (a > 0, b < \infty$$

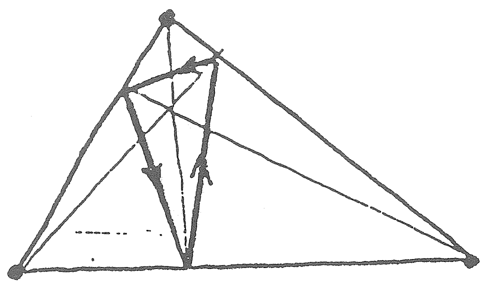
Corollaire : Pour beaucoup de $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ presque toutes les trajectoires noircissent en espace et en direction. I.e pour ces $\frac{m'}{m}$ le mouvement des deux particules est dense en positions et en vitesses (espace des phases).

Départ : Déploiement et le groupe des symétries vectorielles par rapport aux côtés est fini si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, infini (partout dense) sinon. Ennui : pas de pavage du plan (cf. carré) ==> construction surface abstraite.

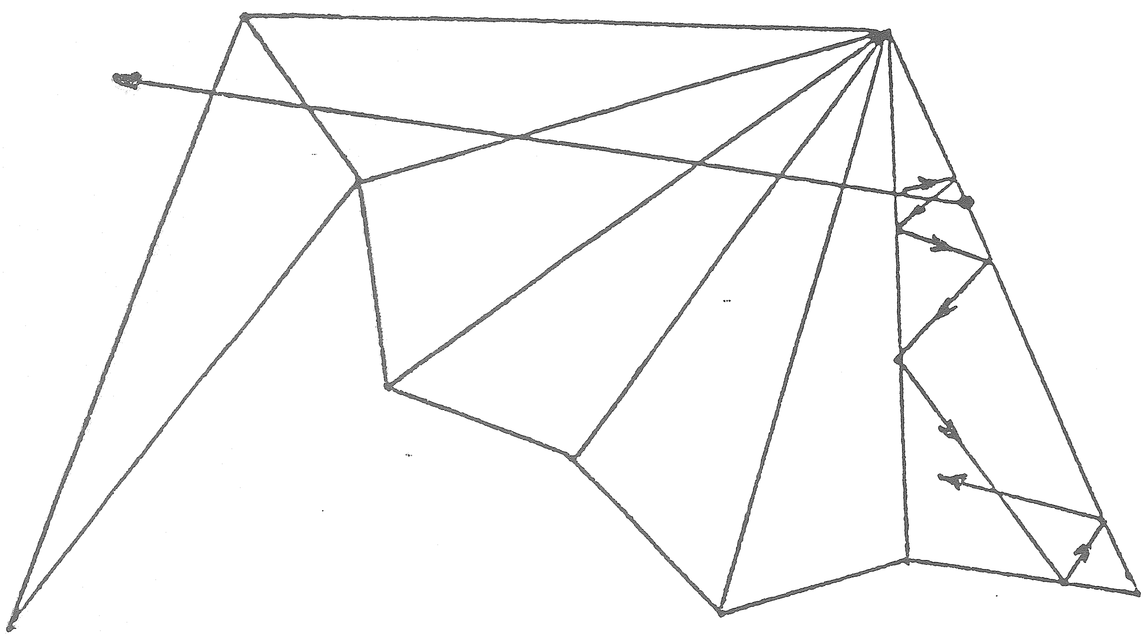
Ouverts : 1) Si $\alpha \notin \ell\,\mathbb{Q}$ existence d'une infinité de trajectoires périodiques et estimation asymptotique de $FC(\ell)$.

2) Trouver (même une seule) trajectoire pédiodique pour un triangle quelconque :





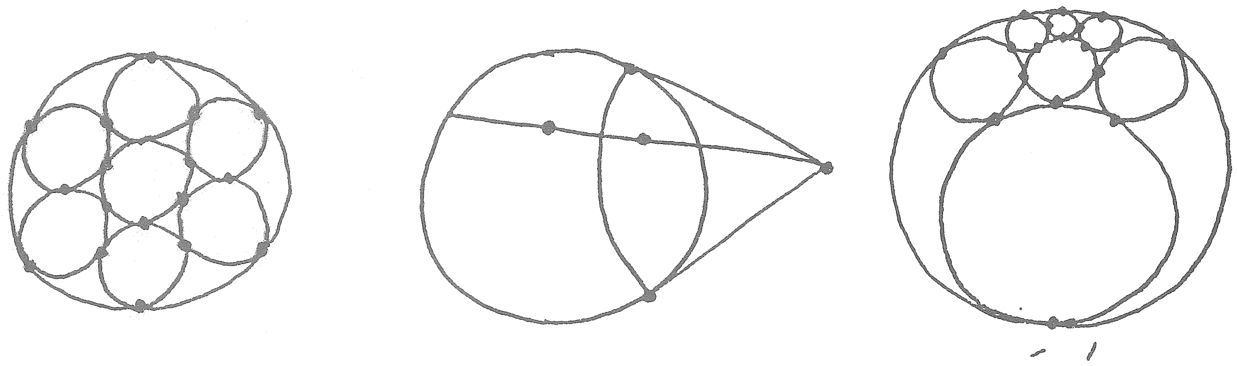
déploiement ?



III. <u>EMPILEMENTS DE CERCLES.</u>

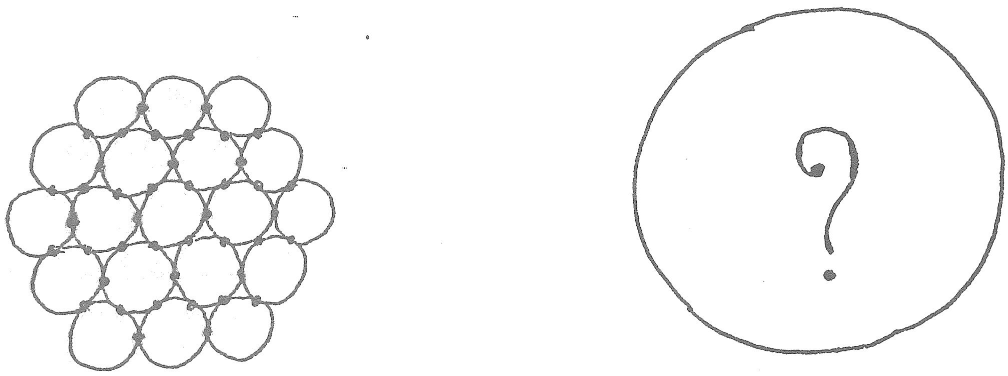
Le plus riche est l'empilement hexagonal régulier : il peut remplir tout le plan et est isotrope et homogène.

Essayer dans mettre dans un cercle :



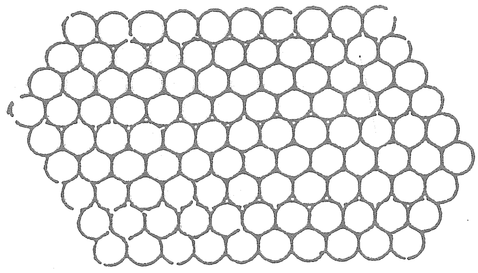
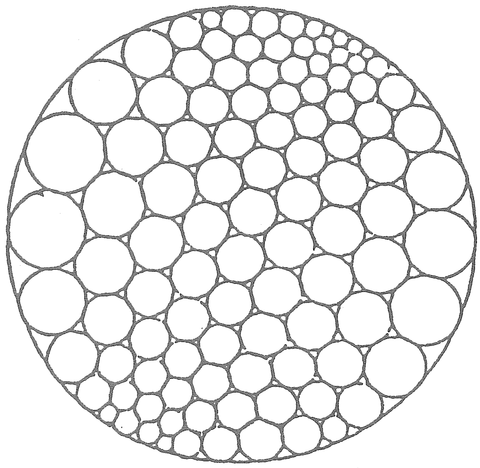
Pas d'autres que Möbius - transformés !

Essayer avec deux couronnes :



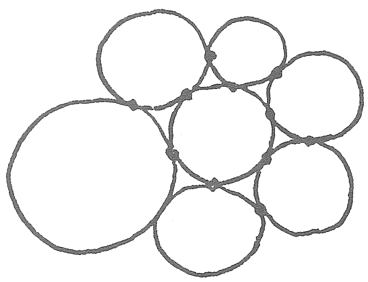
Possible par arguments simples. Unique ?

Théorème d'Andreev 1970 : N'importe quel morceau de l'empilement hexagonal régulier peut être inscrit dans un cercle et est Möbius-unique.

En fait beaucoup plus général : combinatoire quelconque imposée ==> toujours réalisable. Preuve : Andreev compliquée, très chère. Colin de Verdière 1990 : trouvé une fonctionnelle strictement convexe telle que minimum <==> empilement désiré dans le cercle.

Maintenant on essaie de prolonger en un empilement hexagonal (non régulier !). L'expérience montre que très vite on trouve des cercles très petits.

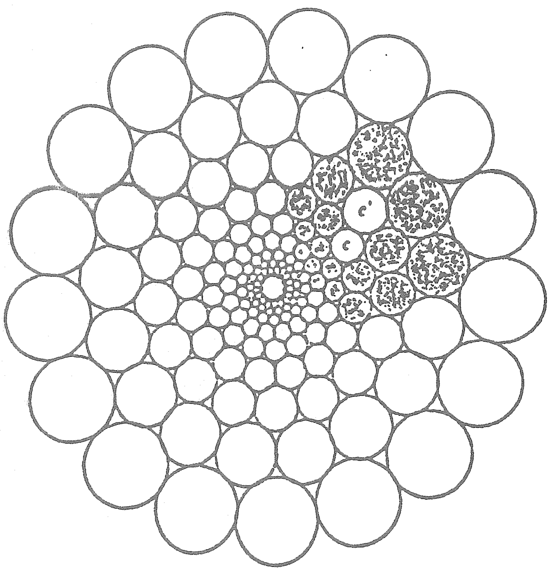


Rodin-Sullivan 1987 : Le seul empilement hexagonal qui remplit tout E^2 est le régulier. On a beaucoup plus fort (intuition dessins) :

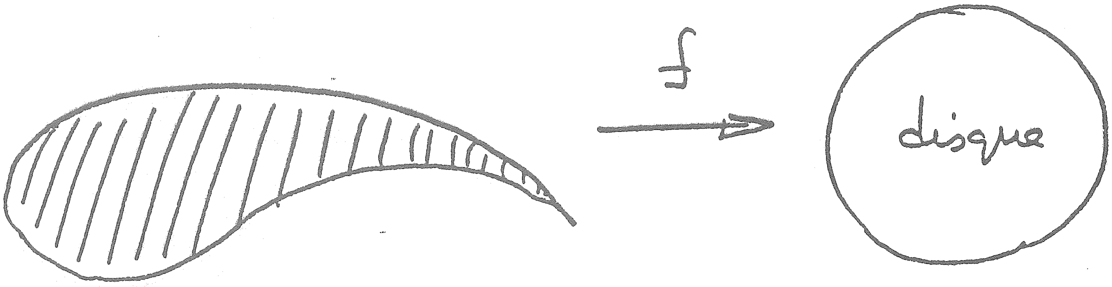
Rodin-Sullivan plus He 1989 :

Si le cercle C possède une n-fleur alors le plus grand rapport ρ des rayons des six cercles tangents à C vérifie $\rho < a \frac{\log^2 n}{n}$ (a universelle)

On peut toujours en trouver avec $\rho > \frac{4}{n}$!



<u>Application</u> : Rodin-Sullivan-Thurston 1987.

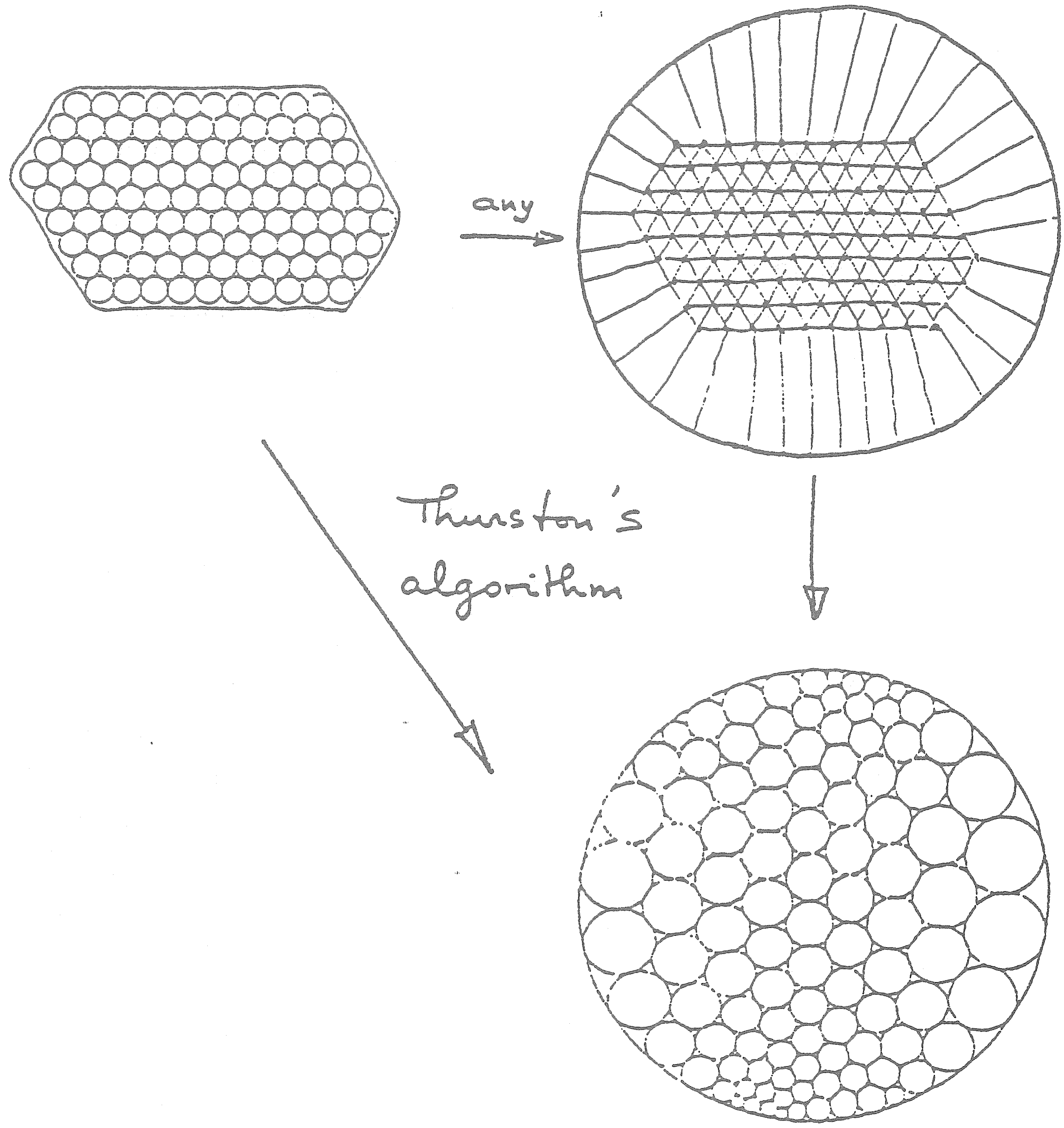


application à trouver qui soit conforme <==> préserve les angles <==> infinitésimalent isotrope (pas d'étirement dans un sens plus que dans l'autre, ce en chaque point).

<u>Riemann-Koebe 1907</u> (beaucoup de fausses) : existe et unique à Möbius près.

Utile : chaleur, ailes d'avion, électricité. Techniciens recherchaient une construction "pratique".

Le théorème de Rodin-Sullivan (Andreev) montre que la méthode imaginée par Thurston marche effectivement :



On fait comme sur le dessin.

Pour réaliser l'empilement d'Andreev il y a des algorithmes faciles. On prend des empilements hexagonaux réguliers à rayon de plus en plus petit. Ca converge vers la représentation conforme et l'intuition est sauve : car on sait que chaque point à des n-fleurs pour n de plus en plus grand ! Donc les rayons autour sont de plus en plus égaux.

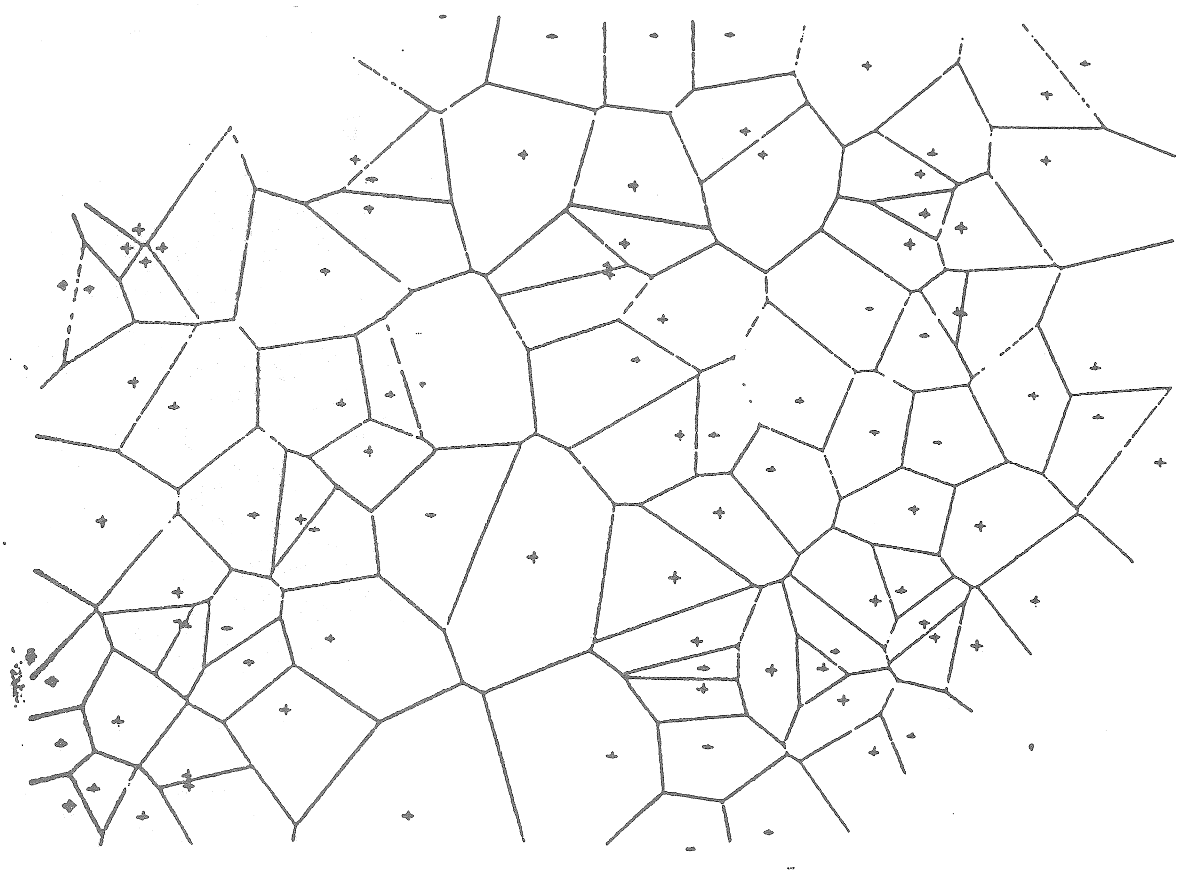
Ceci donne en prime : le rapport de conformité (dilatation) est approché de mieux en mieux par le rapport en le rayon d'un cercle et de son image.

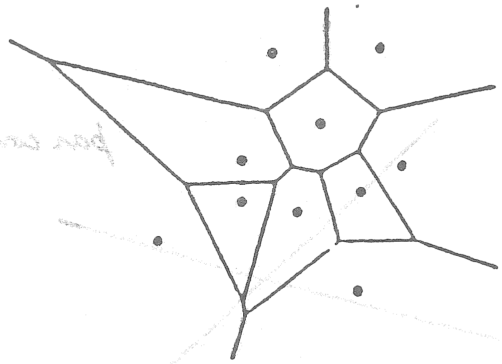
IV. GEOMETRIE ALGORITHMIQUE.

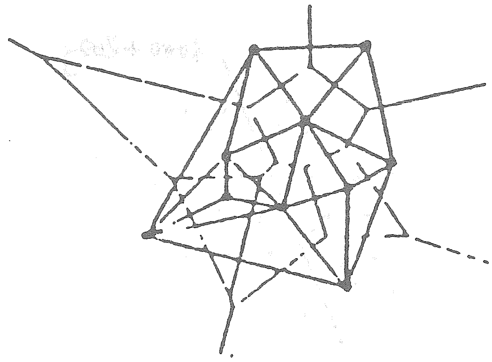
Cette discipline est en pleine effervescence (de bon aloi) depuis 10 ans. Elle a commencé avec la méthode du simplexe de Dantzig. Elle nécessite de la géométrie (plus que son seul nom). Deux exemples.

Les domaines de Voronoï et le paraboloïde de révolution.

C'est le problème (par exemple) du bureau de poste le plus proche. En fait, il y a des applications à toutes les disciplines scientifiques.







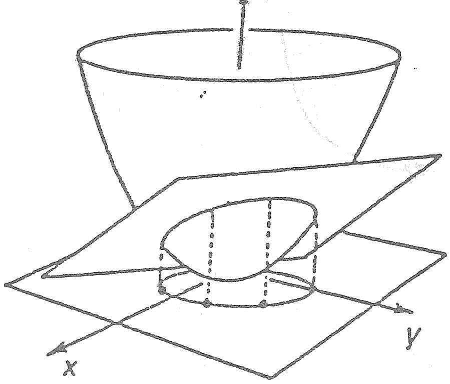
Un critère est que la triangulation associée vérifie : le cercle circonscrit à chaque triangle ne contient aucun autre point en son intérieur.

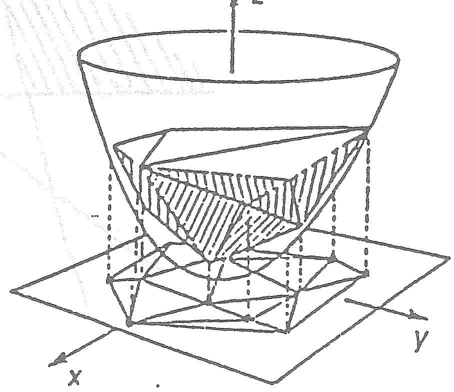
Brown (1979) a remarqué que, en se plaçant dans E^3, on réduit le problème à celui -connu mieux- de la recherche d'une enveloppe convexe :

$$(x,y) \longrightarrow (x,y,x^2 + y^2)$$

On gagne en recherchant le polyèdre de E^3 enveloppe convexe des points remontés sur le paraboloïde.

Parce que les sections planes du paraboloïde se projettent selon des cercles !

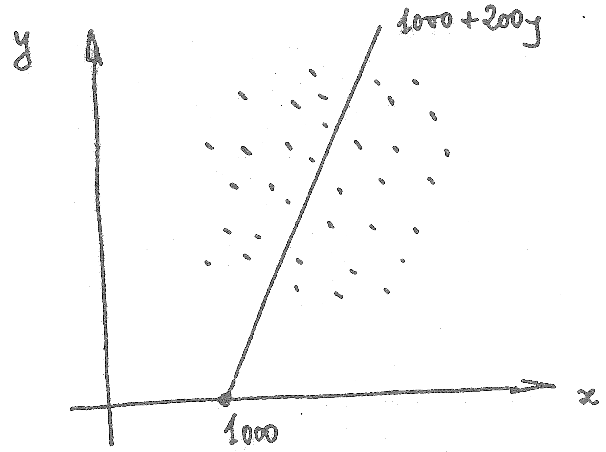


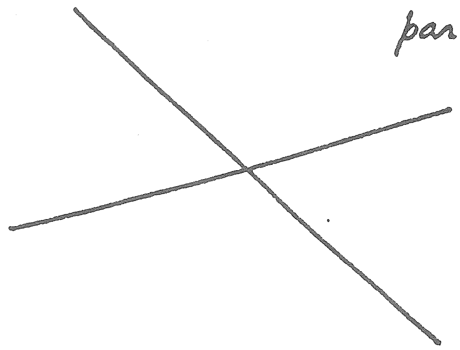


Recherche d'appartenance à un demi-plan

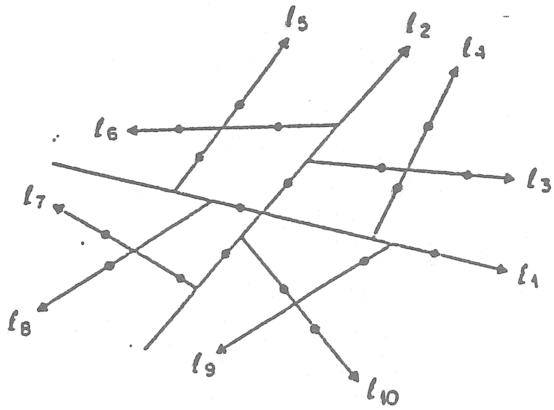
On donne, pour des ménages, le revenu x et le nombre d'enfants y. On cherche ceux pour lesquels le revenu dépasse 10 000 F. plus 2 000 F. par enfants :

$\in$ demi-plan $\qquad\qquad x \geq 1\ 000 + 200\ y$





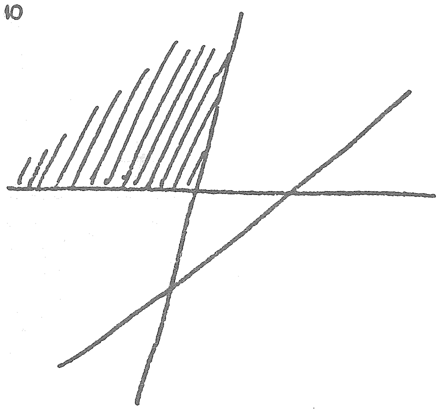
par continuité facile



Willard 1985 :

$$T(n) = 3\,T(n/4) + O(1) \Longrightarrow T(n) = O(n^{\alpha}),\ \alpha = \log_4 3$$

supprimable de suite.

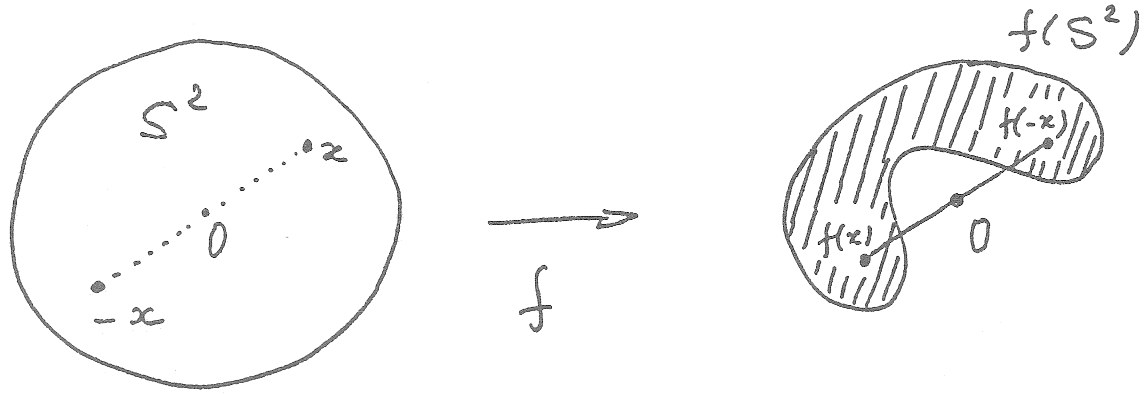


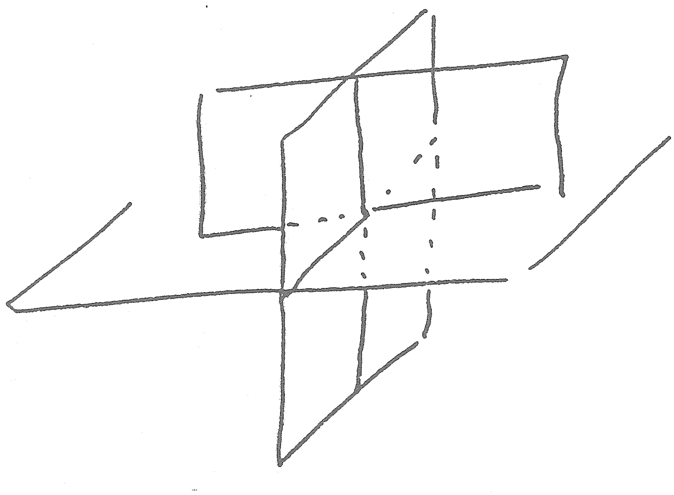
Et dans l'espace ?

On peut ici couper en 8 avec 3 plans avec au plus $\frac{n}{8}$ points dans chaque. Mais ici existence beaucoup plus chère. Il faut Brouk-Ulam (wico 1933) :

Si $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue et $f(-x) = -f(x)$ alors $\exists\ x$ tel que $f(x) = 0$

Plus cher que continuité, ou champs de vecteurs non nul sur S^2.

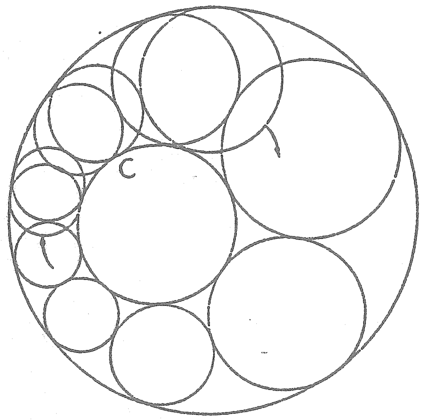


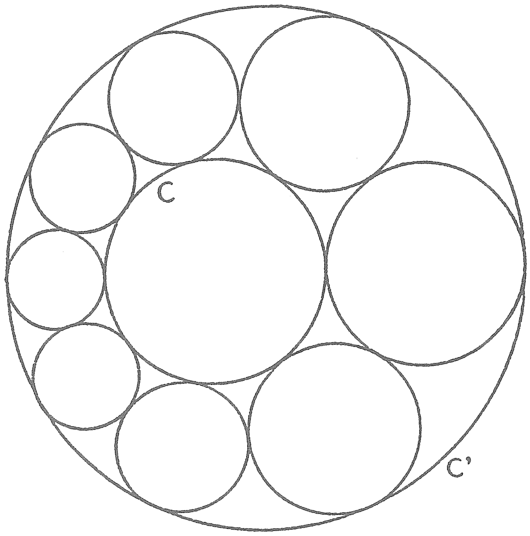


V. GROUPES ET GEOMETRIE

Géométrie envahie par les groupes progressivement. Quelques exemples :

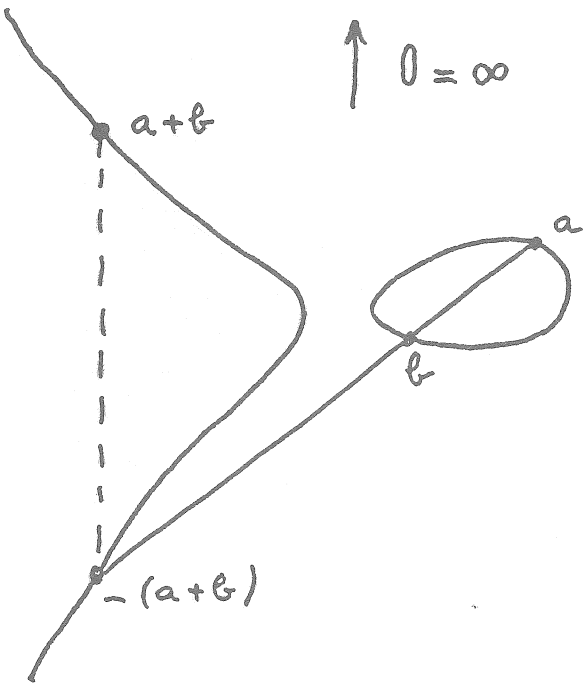
- alignement des centres d'homothétie de trois cercles
  Z quatre sphères voir Hilbert-Cohn-Vossen
- groupe de Möbius = prisme de Streiner

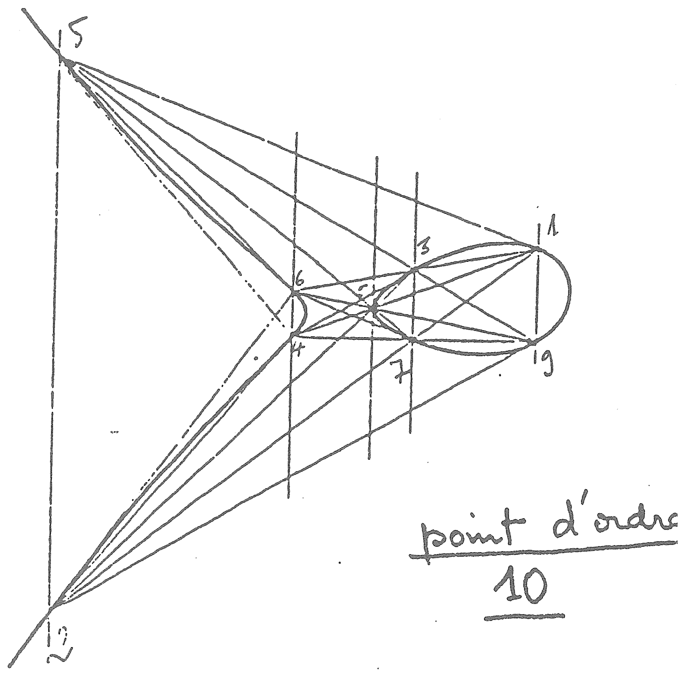




(et empilement plus haut)

- loi de groupe abélien sur une cubique plane non singulière.





- groupe des automorphismes ==> toute la géométrie (invariants, représentations). Et même principe de transfert.

PSL(2 ; $\mathbb{R}$)

droite projective (birapport) | groupe de Möbius (angle) | plan hyperbolique (distance)

Depuis plusieurs mathématiciens ont -au contraire- utilisé de la géométrie (extrinsèque ou intrinsèque) pour étudier les groupes.

Cependant -essentiellement- les groupes étudiés provenaient de la géométrie plus ou moins directement.

Objets : les groupes de type fini, discrets : G, S partie génératrice.

$g \in G$: $||g||_S$ = longueur minimal d'un mot en $\{S, S^{-1}\}$

Distance $d_S(g,h) = ||g^{-1}h||_S$ ==> (graphe, géodésiques)

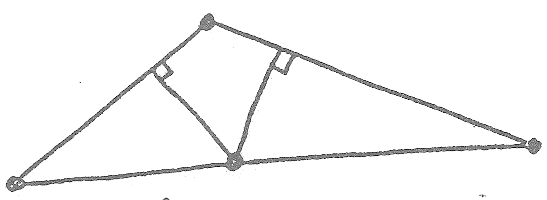
On se débarasse de S par la notion d'espace métrique <u>quasi-isométrique</u> (ce n'est que très loin, à l'infini, que les choses sont intéressantes).

Une propriété d'un groupe discret de type fini est dite <u>géométrique</u> si elle est invariante par quasi-isométrie.

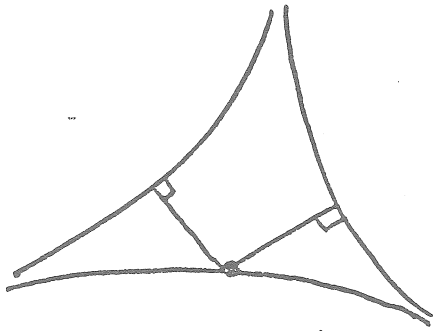
<u>Exemple</u> : Une variété compacte riemannienne a un revêtement universel et un groupe fondamental qui sont toujours quasi-isométrique.

La grande nouveauté est l'introduction par Gromov des groupes (plus généralement des espaces <u>métriques hyperboliques</u> : (X, d) est hyperbolique s'il existe $\delta \geq 0$ telle que, quel que soit le triangle $\{x,y,z\}$ tout point de $[x,y]$ est à une distance $\leq$ d'un point de $[x,z] \cup [z,y]$.

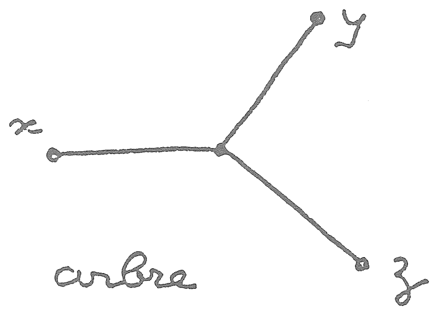
- Les espaces euclidiens (le groupe Z^n) ne sont pas hyperboliques
- Les groupes libres, les espaces hyperboliques sont hyperboliques.
- Les arbres sont hyperboliques



$\mathbb{R}^n$



$\mathbb{H}^n$

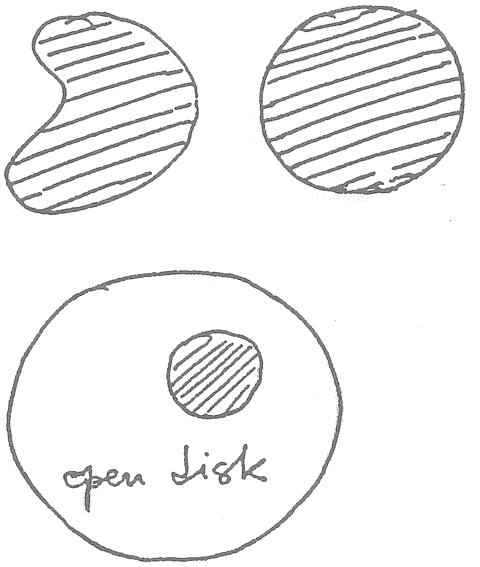


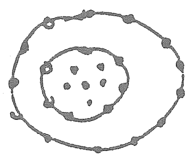
arbre

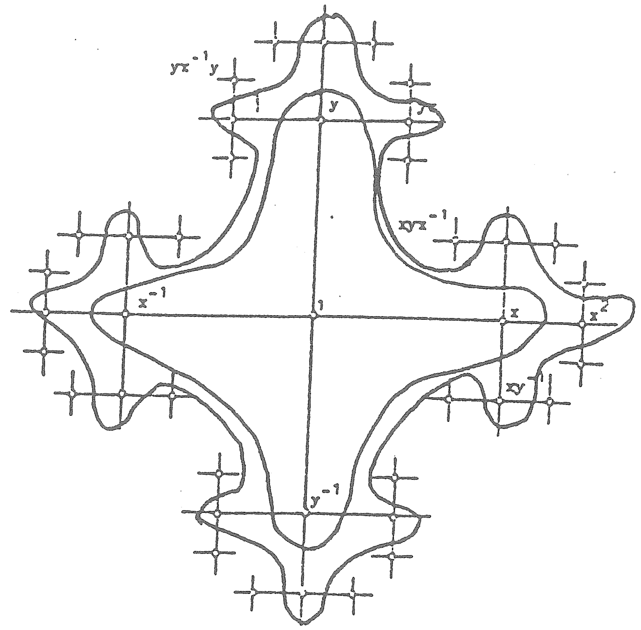
Définition équivalente via l'inégalité isopérimétrique :

$$\underset{\text{(rayon } r\text{)}}{\underline{\text{dans } \mathbb{R}^n}} \qquad \begin{cases} \text{"aire" sphères} \approx r^{n-1} \\ \text{volumes boules} \approx r^n \end{cases}$$

$$\text{dans } H^n \qquad \begin{cases} \text{"aire" sphères} \approx e^r \\ \text{volumes boules} \approx e^r \end{cases} \quad \text{"}\approx\text{"}$$







"Presque tous les groupes discrets de type fini sont hyperboliques".

"Presqu'aucun groupe discret de type fini n'est un sous-groupe d'un groupe de Lie".