INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Université Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
Tél. 67 14 33 83 ou 67 14 33 84

LA GEOMETRIE DANS L'ENSEIGNEMENT

AUDIBERT Gérard

-1990-

INTRODUCTION

Le texte qui suit s'appuie sur les travaux du groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie de l'I.R.E.M. de Montpellier.

En 1990, les enseignants qui font partie de cette équipe que dirige l'auteur de l'article sont les suivants : Amsalem A., Audibert G., Bascou N., Bonafé F., Brunet R., Chevalier A., Dray L., Jabot H., Naudeillo J., Pailhas N., Pais L.C., Pelouzet B., Rios-Fabre G., Sauter M.

Ce texte a été en grande partie exposé le Jeudi 7 Juin 1990 au colloque Inter-IREM de Géométrie à Port d'Albret (Landes). Il donne quelques éléments d'une problématique de l'enseignement de la géométrie pouvant servir de fils conducteurs à des recherches en didactique. Il analyse aussi le rôle joué par la géométrie dans l'enseignement et plus particulièrement dans l'enseignement obligatoire.

Ce texte est séparé en deux parties. L'une traite de la géométrie et de son contenu, l'autre de l'élève face à la géométrie. Mais ce découpage n'est qu'une commodité de rédaction car le contenu est toujours pensé à travers les élèves et les élèves n'agissent qu'en affrontant un contenu.

PREMIERE PARTIE

La géométrie et son contenu

1.1. Maîtrise de l'espace

Le premier objectif de la géométrie est de développer chez nos élèves une bonne habileté spatiale, une certaine maîtrise de l'espace qui nous entoure. Cette maîtrise est nécessaire à la vie privée et à la vie professionnelle. Dans cette optique, certaines questions, un peu négligées dans notre enseignement, nous paraissent primordiales, par exemple celles qui concernent les angles, les changements d'unités de longueur et de surface, les polygones réguliers, les égalités de triangles, l'orientation, les principaux solides, la similitude avec ses agrandissements et ses rapetissements. Comme nous le montrons un peu plus loin, les étudiants actuellement en licence de mathématiques méconnaissent totalement les questions les plus fondamentales de la géométrie.

L'apprentissage du raisonnement est en général considéré comme le principal objectif de l'enseignement de la géométrie. A notre avis, s'il reste un élément indispensable pour cet apprentissage il n'en est pas le but. Le raisonnement s'acquiert et se fortifie à travers toutes les disciplines, le français comme la technologie et c'est dévoyer la géométrie que lui réserver le rôle d'apprentissage du raisonnement comme premier objectif.

1.2. Structure euclidienne

la structure mathématique appropriée à l'apprentissage de la géométrie est la structure euclidienne avec ses plans, ses droites, ses angles et ses distances.

L'affirmation précédente repose sur deux arguments. D'une part la structure euclidienne est celle qui a les plus anciennes et les plus solides assises sociales. D'autre part, les autres structures associées à la géométrie se développent souvent à partir de la structure euclidienne.

A l'appui de notre premier argument vient le fait que la notion d'angle droit est acquise très tôt, certainement au tout début de l'école élémentaire, que le double décimètre est un instrument maîtrisé à 11 ans et qu'au même âge l'apprentissage du rapporteur peut être mené à bien.

A l'appui de notre deuxième argument, examinons comment Cremona (1875) introduit l'homologie en géométrie projective.Il considère deux plans σ et σ' illustrés par la figure 1 ci-après.

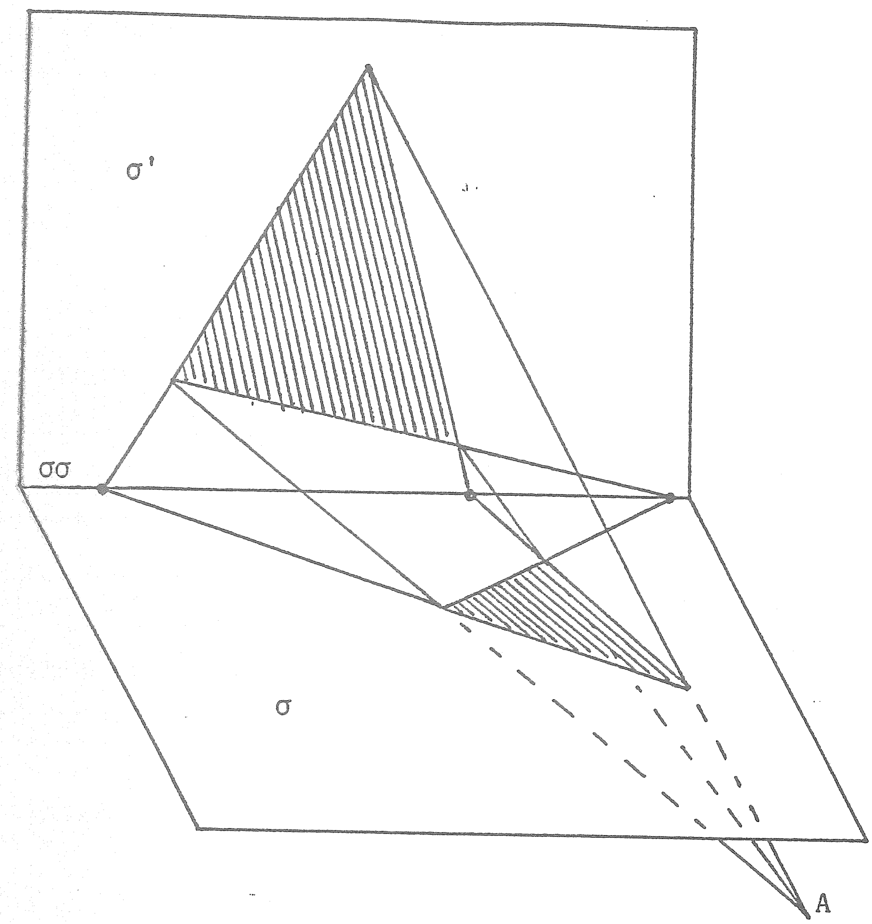

figure 1

Un triangle du premier plan correspond à un triangle du second plan dans une projection centrale de centre A. Les deux triangles sont hachurés sur la figure 1. Pour passer de la projection centrale à l'homologie il fait tourner le plan σ'autour de la droite σσ', intersection des deux plans, jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan σ. Il précise que "pendant cette rotation les deux figures restent perspectives et le centre de projection décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à σσ' "(cf. [19] page 8). La structure euclidienne lui permet donc d'introduire la structure projective.

C'est encore la structure euclidienne qui permet de présenter la géométrie non euclidienne au moyen du modèle de Poincarré. Ce modèle, décrit entre autre par Efimov N. (1945) est en effet fondé sur un demi-plan euclidien, des demi-cercles et l'orthogonalité (cf. [20] page 1962).

Pour donner la priorité à la structure euclidienne, nous pouvons dans l'enseignement secondaire:

* poser les problèmes vectoriels ou affines (addition de vecteurs, barycentre, ...) dans l'espace euclidien,

* utiliser régulièrement des repères orthonormés,

* traiter les affinités, les transvections, les applications linéaires comme des transformations d'un espace euclidien,

* ....

1.3. Espace; transformation

Dans l'enseignement de la géométrie **deux contenus sont particulièrement délicats : la géométrie de l'espace et les transformations.** Au cours de nos recherches, nous sommes arrivés à différentes conclusions. Nous estimons que la géométrie de l'espace nécessite impérativement l'usage des maquettes, qu'une représentation technique est indispensable et que la perspective cavalière semble la représentation la mieux adaptée aux aptitudes de nos élèves. Un certain nombre de questions liées à la géométrie de l'espace sont examinées dans [9] et dans [24]. Pais L.C. (1990) s'est plus particulièrement intéressé aux corps ronds. Au cours du colloque de Port d'Albret, notre groupe de recherche a présenté deux ateliers sur le thème de la géométrie de l'espace.

Les transformations ont fait l'objet d'un troisième atelier. Ajoutons trois remarques concernant les transformations.

Tout d'abord, il nous semble que les transformations, en tant qu'outil de résolution de problème, sont actuellement surestimées dans l'enseignement secondaire.

Ensuite, il nous semble utile d'associer aux transformations planes de bons algorithmes de construction, notamment des algorithmes de construction du symétrique d'un triangle par rapport à une droite, du symétrique d'un triangle par rapport à un point, du translaté d'un triangle et du transformé d'un triangle par une rotation de centre donné et d'angle 30° (ces algorithmes ont été proposés en atelier et sont donnés en annexe).

Enfin, il nous paraît indispensable que les théorèmes de classification des isométries et des similitudes soient parfaitement connus des enseignants. Les théorèmes qui nous paraissent les plus simples, les plus efficaces et les mieux adaptables à l'enseignement sont les suivants :

* une isométrie vectoirelle du plan est soit une rotation soit une symétrie (orthogonale),

* une isométrie plane est ou bien une translation ou bien une rotation ou bien une symétrie-translation, c'est-à-dire le produit d'une symétrie par rapport à une droite et d'une translation définie par un vecteur parallèle à la droite,

* une isométrie vectorielle de l'espace est ou bien une rotation ou bien une rotation-symétrie, c'est-à-dire le produit d'une rotation par rapport à une droite et d'une symétrie par rapport à un plan, la droite et le plan étant orthogonaux,

* une isométrie de l'espace est ou bien un vissage, ou bien une rotation-symétrie ou bien une translation-symétrie c'est-à-dire le produit d'une symétrie par rapport à un plan et d'une translation définie par un vecteur parallèle au plan,

* une similitude plane est ou bien une isométrie, ou bien le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre, ou bien le produit d'une symétrie par rapport à une droite et d'une homothétie dont le centre appartient à cette droite,

* une similitude de l'espace est ou bien une isométrie ou bien le produit d'une rotation et d'une homothétie dont le centre appartient à l'axe de rotation,

* les similitudes vectorielles sont les similitudes admettant l'origine comme point fixe.

1.4. Dessin

L'enseignement de la géométrie est inséparable du dessin. Depuis une dizaine d'années, la commission Inter-IREM Géométrie s'interroge sur le statut du dessin. Pour apporter notre contribution à cette réflexion, nous allons faire ici un inventaire de différents rôles joués par le dessin ou par des notions ou des objets associés au dessin dans le cadre de la géométrie. Cet inventaire comporte 14 points de a à n.

1.4.a Configurations

Parmi toutes les figures utilisées en géométrie, un certain nombre d'entre elles que nous appelons configurations ont un statut un peu particulier. Nous en avons longuement parlé dans deux textes, notés [8] et [7] dans la bibliographie ci-après. **Une configuration ou dessin fondamental est un dessin qui illustre un concept ou une propriété importante, qui respecte de fortes contraintes d'équilibre et qui est socialement reconnu.** En ce qui concerne la notion d'équilibre on peut consulter [5]. Les figures 2 et 3 ci-dessous sont des configurations.

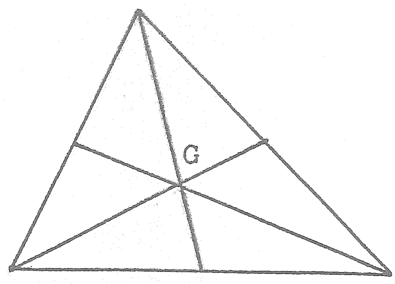

figure 2

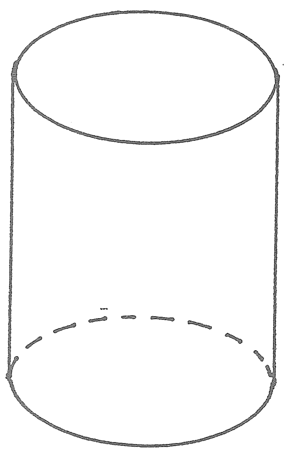

Figure 3

Plusieurs personnes actuellement, notamment à l'IREM de Bordeaux, étudient le rôle des configurations dans la résolution de problème (cf.[28]); c'est certainement une des questions clé liée à la notion de configuration.

1.4.b. Recherche de problème

Le dessin est utilisé par les élèves pour amorcer la recherche d'un problème. C'est un rôle essentiel en géométrie.

Nous avions déjà constaté, il y a une dizaine d'année, que le dessin jouait un rôle indispensable pour l'élève dans la résolution des problèmes de géométrie euclidienne plane (cf. [1] et [2]). Nous voulons insister ici plus particulièrement sur son rôle de déclencheur de recherche.

Nous avons proposé en Mai 1990 à douze élèves de première S l'un des deux problèmes suivants au choix.

Enoncé du problème "cône sur le cube"

Un cube de 10 cm d'arête est posé sur une table. On le recouvre d'un cône qui repose sur la table. Le diamètre du cercle de base est une fois et demi plus grand que la diagonale d'une face du cube. Quelle est la plus petite hauteur possible pour le cône ?

Enoncé du problème "chapeau de clown"

Un disque en carton de 15 cm de rayon est découpé en deux morceaux comme le montre la figure 4 ci-dessous. On fabrique deux chapeaux de clown (de forme conique) à partir des deux morceaux de disque. Un des deux chapeaux doit avoir une hauteur de 12 cm. Quelle et la hauteur de l'autre chapeau ?

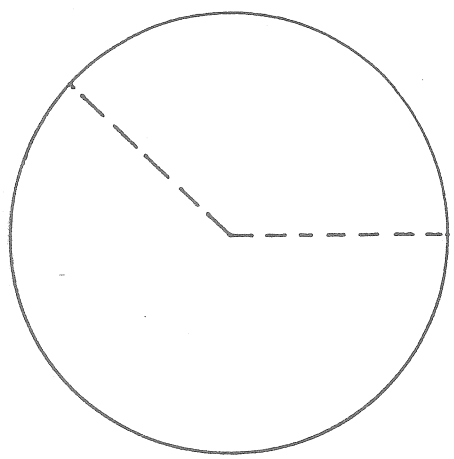

Figure 4

Les élèves devaient raconter par écrit leur propre recherche, selon la méthode décrite dans [18] ou dans [14]. Neuf élèves sur douze ont écrit au début de leur narration les phrases suivantes :

* Mon premier réflexe est de représenter un cône approximatif pour avoir une idée de la forme du chapeau.
* J'ai regardé mes figures de géométrie dans mon agenda.
* J'ai pensé que je comprendrais mieux sur un dessin.
* J'ai essayé de trouver la solution en construisant la figure mais cela m'a été difficile.
* C'est en dessinant un cône dans l'espace ...
* La première chose qui me vient à l'esprit est un dessin.
* En posant le problème graphiquement une solution possible apparut.
* Avant de faire quoique ce soit, je décide de faire un dessin pour y voir plus clair.
* Je passe directement au schéma, je le fais à l'échelle.

Ces phrases montrent que l'élève utilise le dessin pour amorcer sa propre recherche.

1.4.c. Particulier et général

Une des caractéristiques du dessin est sa particularité. Or très souvent en géométrie, il est utilisé pour traiter des questions générales. **Nous mettons les élèves dans une situation contradictoire lorsqu'un dessin particulier est présent en même temps qu'une question générale.**

Examinons les trois exercices ci-dessous, extraits d'ouvrages scolaires.

Exercice N°1
cf. figure ci-contre où ABCD est un parallélogramme aux côtés prolongés.
Est-il vrai que A'B'C'D' est un parallélogramme ?
(chercher une symétrie centrale).

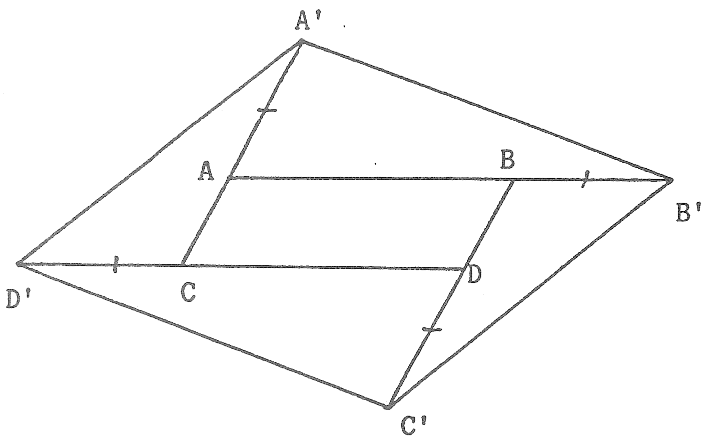

Figure 5

Exercice N°2
Dans un premier carré de côté 2 pénétre un second carré, plus grand que la moitié du premier, de telle façon que l'un de ses sommets soit au centre du premier.
Quelle est la surface du quadrilatère commun aux deux carrés ?

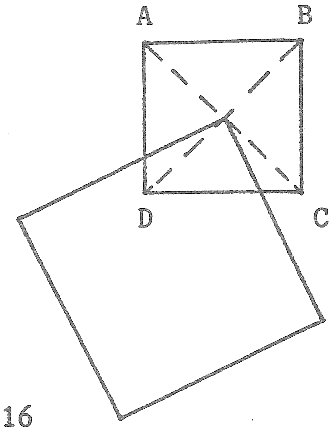

Figure 6

Exercice N°3

Soient deux droites parallèles D et D' et de part et d'autre de la bande qu'elles délimitent deux points A et B (figure ci-contre).

Trouver M sur D et M' sur D' avec (MM') ⊥ D tels que

1er cas : AM = BM'

2èmecas : (AM)⊥BM'.

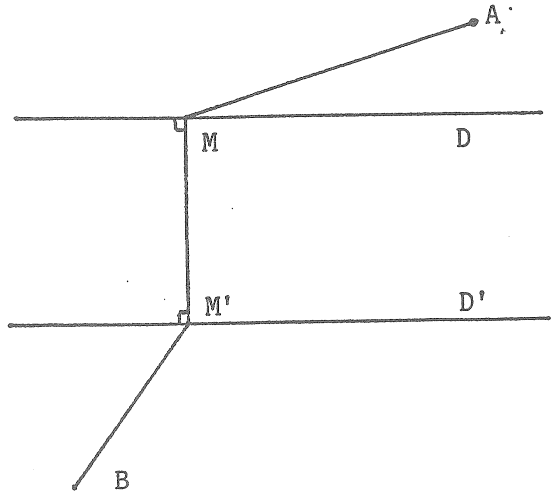

Figure 7

L'exercice N°1 désigne une figure bien particulière sur laquelle on peut vérifier immédiatement que A'B'C'D' est un parallélogramme. La question générale n'est même pas posée; elle devrait préciser que le problème doit être résolu quel que soit le parallélogramme ABCD et le rapport $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{DC}}$. La réponse à la question explicitement posée est donc évidente, elle l'est aussi pour l'élève qui va alors être fort étonné par les raisonnements que le professeur développera, comme il est d'usage à propos d'un tel problème.

L'exercice N°2 n'en est pas moins ambigu. Il ne précise pas si le problème est posé dans toute sa généralité, c'est-à-dire quel que soit la position du carré de sommet O, ou s'il consiste à mesurer sur le dessin une certaine surface. On sait très bien que c'est la question générale qui va intéresser l'enseignant. On sait aussi que l'élève, suivant en cela la logique de l'exercice tel qu'il est explicité avec son texte et son dessin, va aller vers la solution particulière.

L'exercice N°3 permet de mieux discerner le problème général car il sous-entend qu'on prend en compte tous les points M de la droite D. Mais la figure qui est explicitement désignée, induit une recherche graphique de la solution. La réponse qui consiste à placer plusieurs points M sur la figure en cherchant au moyen de mesures celui qui convient le mieux n'est pas un contre sens; elle suit la logique de l'exercice tel qu'il est explicité avec son texte et son dessin.

De nombreux exercices de géométrie présentent des énoncés de ce type : un texte et un dessin. Ils induisent cette double lecture générale et particulière. Ils sont donc source d'une difficulté que nous avons voulu signaler. Remarquons toutefois que la suppression du dessin ne fait pas disparaître cette difficulté car pour résoudre de tels exercices l'élève doit nécessairement introduire son propre dessin qui est toujours un dessin particulier. Une plus grande explicitation de la généralité de la question va alourdir considérablement l'énoncé et accroître ainsi les difficultés de la lecture. Il n'est donc pas simple de palier à cette contradiction entre le général et le particulier que nous rencontrons à propos des exercices de géométrie. On peut toutefois la minimiser en travaillant minutieusement les textes des exercices.

1.4.d. Règles de traçage

Nous avons pu constater qu'**une des principales difficultés dans l'utilisation du dessin provient de l'absence de règles de traçage explicites.** Nous avons abordé cette question dans [4] et dans [11]. Cette absence de règles de dessin est particulièrement nuisible en géométrie de l'espace comme l'ont montré Parzysz B. (1989), Keita B. (1990) et Pais L.C. (1990) (cf. respectivement [25], [22] et [24]). Nous restons toujours très étonnés du souci de rigueur qui accompagne la rédaction des textes de mathématiques alors que les figures de géométrie sont la plupart du temps dessinées sans aucun commentaire.

1.4.e. Instruments de dessin

L'enseignement de la géométrie passe par le dessin et le dessin passe par les instruments de dessin.

"Dans le premier cycle doit être réalisé un apprentissage effectif, réitéré et argumenté des diverses utilisations des instruments de dessin" disions-nous dans [21] à la page 18.

Les principaux instruments de dessin sont les règles graduée et non graduée, le compas, l'équerre et le rapporteur. On peut lire, à titre d'illustration du rôle que peuvent jouer certains instruments de dessin, le compte-rendu d'une séance de travail en classe de 4ème fait par Conéjéro M.T. qui se trouve dans l'annexe de [16]. Le lot d'instruments cité peut être complété par certains pochoirs; notamment d'après Pais (1990) (cf. [24]) le pochoir trace-ellipse semble offrir des possibilités d'utilisation dans les collèges.

1.4.f. Main levée ou instruments de dessin

Nous devons confronter deux sortes de dessins : le dessin à main levée et le dessin avec instruments de dessin. A propos de la dialectique entre ces deux types de dessin, nous avons obtenu en 1982, 1984 et 1985 (cf. [2], [15] et [3]) un certain nombre d'hypothèses d'enseignement que nous énonçons à nouveau.

Le dessin, et plus particulièrement le dessin précis avec usage d'instruments de dessin, joue un rôle indispensable pour l'élève dans la résolution de problème de géométrie euclidienne plane.

Dessins à main levée et dessins avec instruments ont des statut différents, le second ayant une fonction plus expérimentale.

Le dessin avec instruments prend de l'importance par rapport au dessin à main levée pour les élèves de 5ème et de 4ème, et par contre nos élèves de second cycle ont de plus en plus tendance au fil des années à abandonner le dessin avec instruments pour utiliser essentiellement le dessin à main levée.

La nécessité d'un dessin technique avec instruments de dessin est nettement ressentie par l'élève en situation de recherche d'un problème de géométrie de l'espace. Ce besoin dépend de la plus ou moins gande facilité du problème et de l'importance donnée par principe à la démonstration.

Lorsqu'au cours d'une recherche d'un problème de géométrie s'appuyant essentiellement sur des dessins avec instruments, un dessin moins technique ou un dessin à main levée apparaît, il est là simplement pour soutenir une idée, une anticipation ou une explication; il n'élimine pas les processus de recherche fondés sur les dessins avec instrument.

1.4.g. Construction effective

Dans son traité de géométrie descriptive, Leroy C.F.A. (1855) donne comme argument justifiant l'apprentissage des méthodes de géométrie descriptive l'explication suivante :
"Ces méthodes devant servir, non à établir des théories purement spéculatives mais bien à effectuer des opérations réelles, il faut qu'elles offrent une précision complète dans la manière d'exprimer les données et les résultats graphiques de chaque question" (cf. [23] page 1).

En géométrie de l'espace, nous devons distinguer les problèmes de construction effective des problèmes d'existence.

Examinons par exemple le problème suivant :
Un plan peut-il couper un dièdre d'un tétraèdre régulier de telle sorte que la section soit un angle droit?

Ce problème peut être traité comme un problème d'existence; Si ABCD est un tétraèdre régulier et si I est le milieu du segment AB, l'angle $\widehat{CID}$ est inférieur à 90° et l'angle $\widehat{AIB}$ est égal à 180°. On peut donc trouver, pour des raisons de continuité, un point M appartenant au segment AC et un point N appartenant au segment BD tel que l'angle $\widehat{MIN}$ soit égal à 90°, ce qui démontre l'existence d'un angle droit.

Ce problème peut aussi être traité comme un problème de construction effective. Représentons sur la figure 8 dans une perspective cavalière d'angle de fuite 30°, un dièdre du tétraèdre régulier, noté P_1GHP_3, avec une droite HG verticale et un plan P1 frontal.

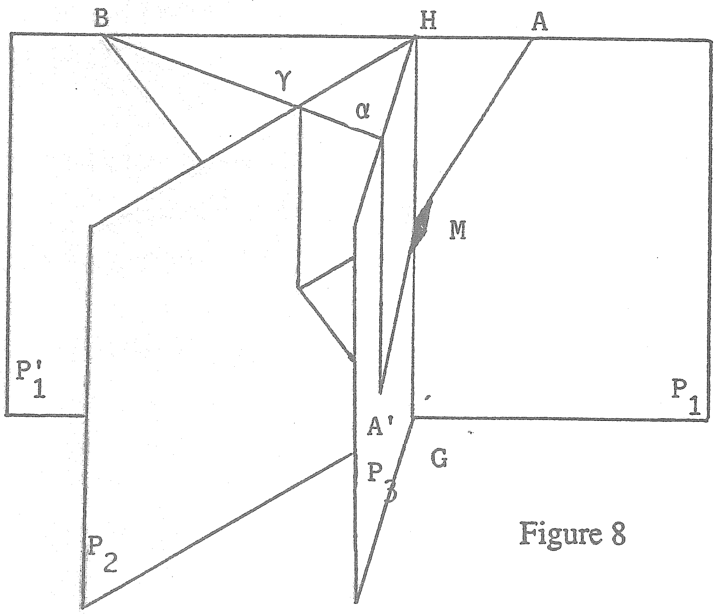

Figure 8

Représentons encore le demi-plan HGP'$_1$ prolongeant HGP$_1$ et le demi-plan HGP$_2$ perpendiculaire à P$_1$. Les trois droites passant par H, autres que HG et représentées sur la figure 8, sont horizontales. Appelons M le milieu du segment HG. Plaçons les points A et B dans les demi-plans P$_1$et P'$_1$ de telle sorte que $\widehat{AMB} = 90°$. Les points A, B et H sont alignés sur une droite horinzontale. Plaçons dans le plan P$_2$ un point C tel que CM soit une droite perpendiculaire au plan P$_1$; sur la figure 8, CM est donc une fuyante. Le plan vertical passant par le points B et C coupe le plan P$_2$ selon une droite verticale Cγ. La droite horizontale Bγ coupe le plan P$_3$ en α . La verticale passant par α rencontre la droite BC en A'. L'angle $\widehat{A'MA}$, construit effectivement, représente un angle droit, section d'un plan et d'un dièdre d'un tétraèdre régulier.

Nous ne voulons pas discuter ici des mérites respectifs des problèmes d'existence et des problèmes de construction effective mais signaler qu'en géométrie de l'espace, sans dessin technique on renonce aux constructions effectives. L'enseignement de la géométrie de l'espace donne ainsi l'exclusivité au savoir penser (les théorèmes d'existence) et élimine le savoir faire (les constructions effectives). C'est une source de difficulté propre à l'apprentissage des mathématiques qui se répercute certainement sur la formation générale de nos élèves.

1.4.h. Démarche expérimentale

Le dessin valorise la démarche expérimentale. Cette dernière est caractérisée par l'énonciation d'une hypothèse, suivie d'une observation accompagnée ou non d'une réalisation nouvelle et se terminant par une prise de décision portant sur la valeur de vérité de l'hypothèse.

La démarche expérimentale fait appel en géométrie au dessin qui va être observé. Un dessin précis bien codifié est souvent indispensable. La démarche expérimentale est à la portée de nos élèves de l'enseignement obligatoire, pourtant elle ne leur est quasiment jamais présentée.

Pour une étude plus détaillée de la démarche expérimentale, on pourra consulter [6].

1.4.i. Exact ou approché

Une terminologie classique distingue les constructions exactes des constructions approchées.

La figure 9 réalise la construction que nous allons décrire.

Etant données une corde BB' et une flèche AC où A est le milieu de BB', l'arc de cercle $\overset{\frown}{CB}$ correspondant est construit de la manière suivante ; on achève le rectangle ABEC; on place le point D sur la droite CE tel que CBD = 90°; on divise les segments AB, CD et EB en n parties égales; on obtient ainsi n-1 points sur le segment AB, soient A_1 A_2 ... A_{n-1}, n-1 points sur le segment CD, soient C_1 C_2 ... C_{n-1} et n-1 points sur le segment EB, soient E_1 E_2 ... E_{n-1}. Les points d'intersections des droites A_iC_i et CE_i pour chaque i = 1, 2, ..., n-1, sont sur l'arc $\overset{\frown}{CB}$.

Sur le dessin constituant la figure 9, on choisit n=5. On vérifie que les quatre points d'intersection semblent bien appartenir à l'arc de cercle $\overset{\frown}{CB}$. Mais on démontre aussi qu'ils appartiennent au cercle de diamètre CD' où D' est à l'intersection des droites AC et BD. On dit alors que cette construction est exacte, bien que le dessin soit toujours une réalisation matérielle qui repose donc sur des approximations.

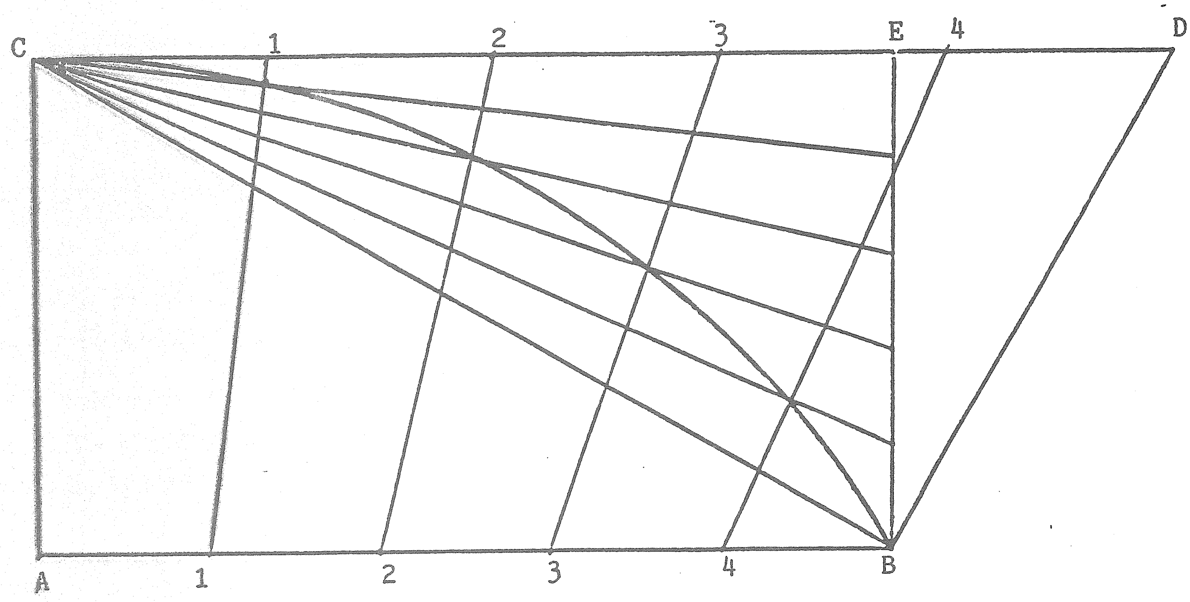

Figure 9

Considérons maintenant la construction suivante : traçons un cercle de diamètre AB. Marquons un point C tel que ABC soit un triangle équilatéral et six points A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 et A_6 divisant le segment AB en sept segments égaux. Le prolongement du segment CA_2 coupe le cercle en un point D. Le segment AD semble être le côté de l'heptagone régulier inscrit dans le cercle. La figure 10 réalise la construction que nous venons de décrire.

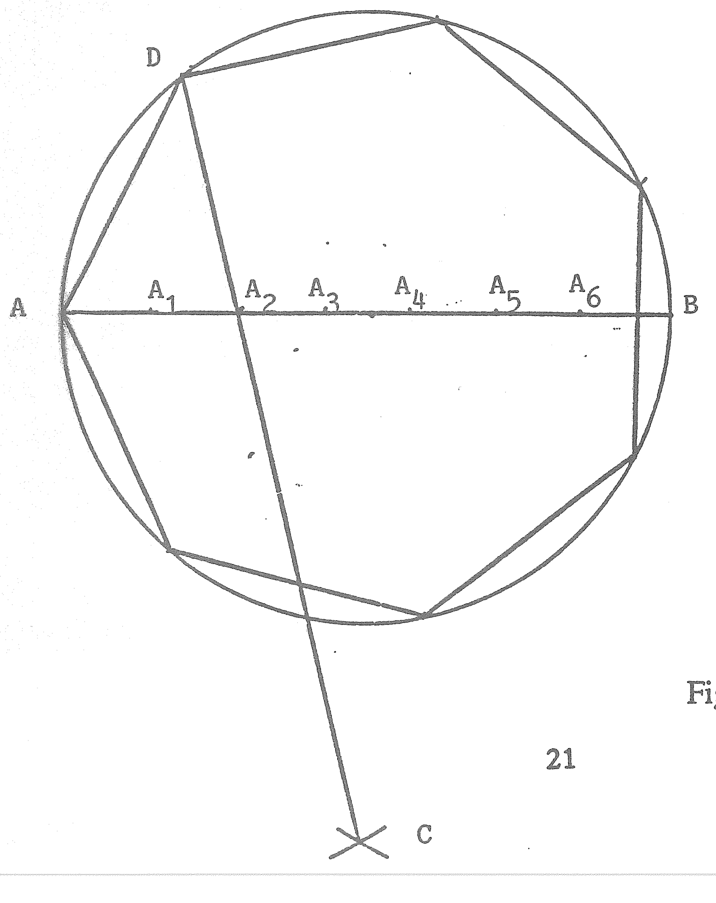

Figure 10

On démontre que AD n'est pas le côté de l'heptagone régulier. On dit alors que cette construction n'est pas exacte; de plus la réalisation matérielle repose comme tous les tracés sur des approximations.

On doit donc, à propos des constructions exactes ou approchées, distinguer trois notions ; l'approximation propre à chaque dessin, le dessin correspondant à une construction exacte et le dessin correspondant à une construction approchée.

1.4.j. Dessin et calcul

Dans notre enseignement de la géométrie, le calcul puis le calcul algébrique ont pris trop de place par rapport au dessin. Ce manque de dialectique entre calcul et dessin est certainement nuisible à l'esprit de synthèse et entraîne semble-t-il une perte de sens chez l'apprenant. Pour nous faire comprendre, prenons comme exemple un problème qui est proposé par beaucoup d'auteurs :

On dispose d'une plaque carrée de côté a. Dans chaque coin de la plaque, on enlève uncarré de côté x. On va alors obtenir le patron d'une boîte ouverte. Pour quelle valeur de x obtient-on la boîte de plus grand volume ?

La figure 11 ci-dessous représente le patron de la boîte et la boîte en perspective cavalière, d'angle de fuite 60° et de rapport de réduction $\frac{1}{2}$.

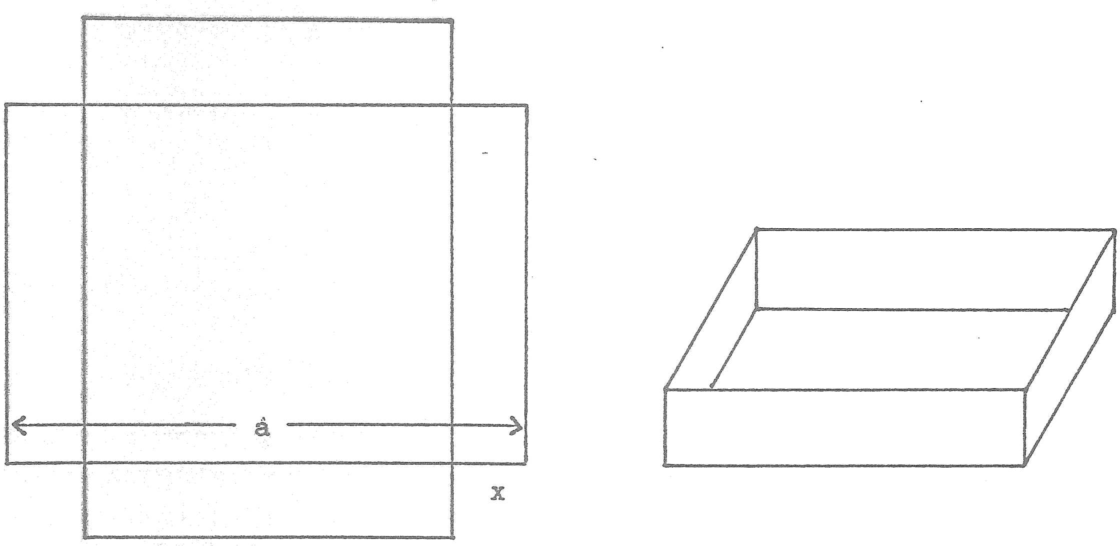

Figure 11

Ce problème est en général résolu au moyen de l'algèbre. Sa résolution est fondée sur le raisonnement suivant : le volume de la boîte est égal à $x(a-2x)^2$; la dérivée de cette fonction de x est égale à $(a-2x)(a-6x)$; elle s'annule pour $x = \frac{a}{6}$. Le volume est maximum pour $x = \frac{a}{6}$. Mais une question tout à fait naturelle n'est pas posée : quelle relation y-a-t-il entre cette variation de volume de la boîte et le coefficient 1/6 ? Ou encore, comment s'explique géométriquement cette valeur 1/6 ? Nous allons répondre à cette question.

Pour cela, dessinons la figure 12 représentant dans une PC (1/2,60°) la boîte de hauteur x. La figure 12 est agrandie par rapport à la figure 11.

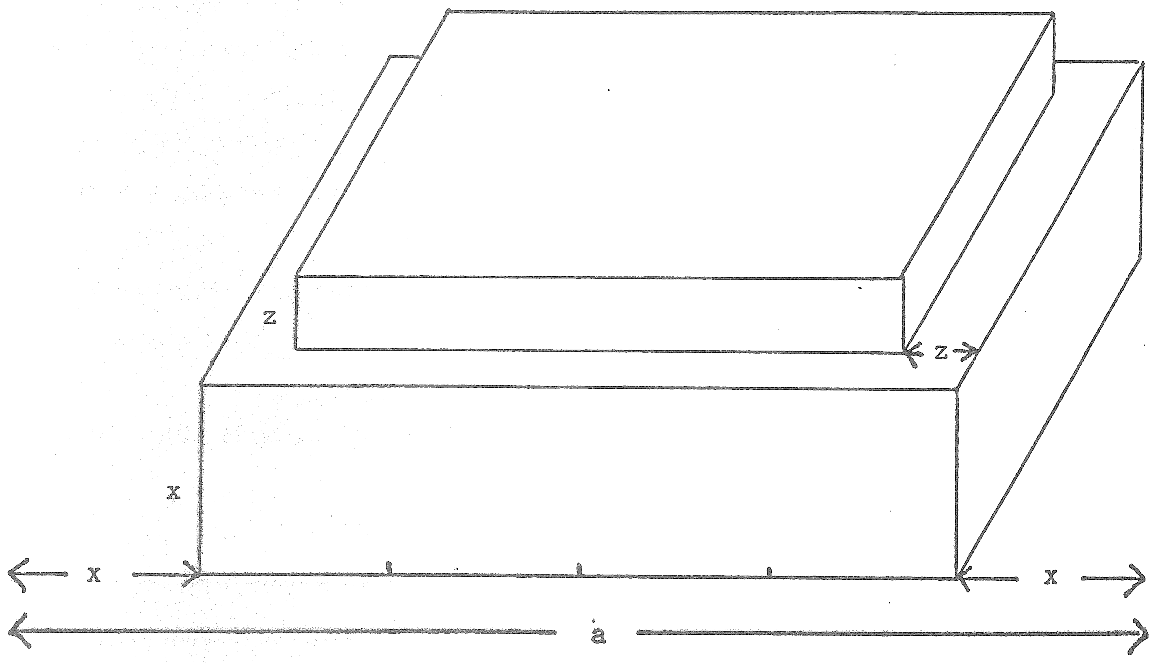

Figure 12

En prenant maintenant une hauteur x + z, nous enlevons au volume quatre morceaux d'épaisseur z et nous ajoutons un volume de hauteur z. Pour qu'il y ait compensation, il faut que le morceau ajouté ait un côté quatre fois plus grand que x, donc que x soit le sixième de a comme le souligne la figure 12. Ce coefficient provient donc du fait qu'on enlève quatre morceaux latéraux pour accroître la hauteur de la boîte. Bien entendu, cette explication très synthétique ne remplace pas l'aspect différentiel du problème mais rééquilibre géométriquement la solution.

Cette dialectique entre le calcul et cet aspect synthétique nous paraît nécessaire en géométrie et trop minimiser la place du dessin par rapport au calcul c'est handicaper nos élèves.

1.4.k. Dessin et maquettes

En géométrie de l'espace tout au long de l'enseignement obligatoire, il faut garder la possibilité d'utiliser des objets. Dessins et maquettes doivent être constamment associés car la non bijectivité entre l'espace et le dessin est une difficulté majeure. De nombreux exercices sont à développer sur le thème des rapports entre le dessin et la maquette de l'objet dessiné. Donnons deux exemples.

Disposant d'un cube et d'une tige rectiligne, comment placer la tige relativement au cube pour que l'ensemble soit représenté en perspective cavalière par la figure 13 ?

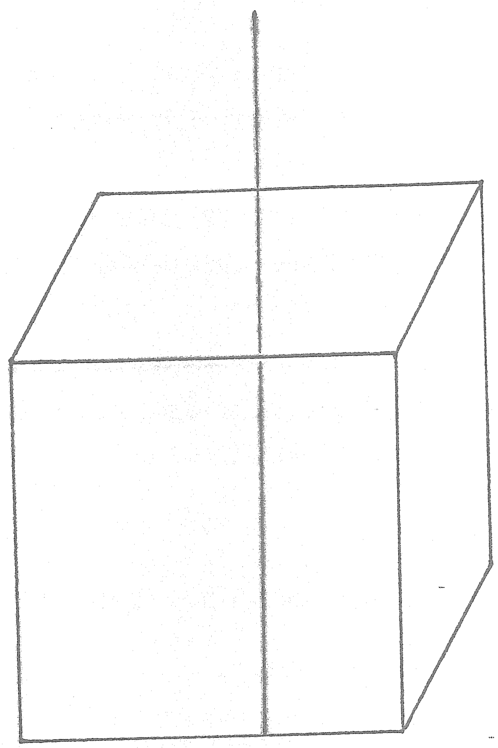

Figure 13

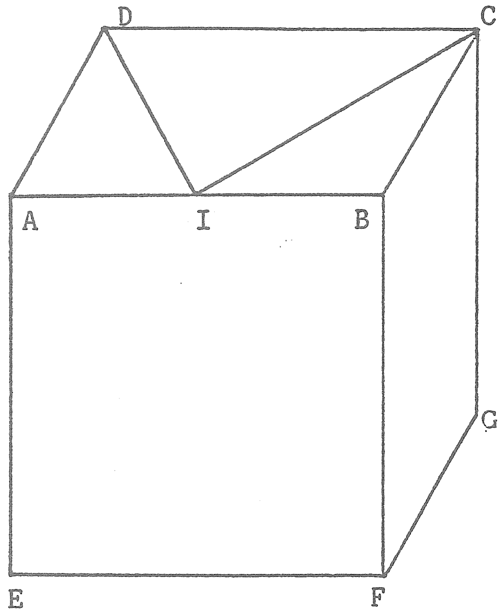

Figure 14

Sur un cube en bois ABCDEFGH représenté en PC(1/2, 60°) par la figure 14, on considère le point I milieu de l'arête AB. Quelles sont les particularités des trois triangles AID, DIC et ICB du dessin (figure 14) et des trois triangles analogues sur la face du cube en bois ?

De nos expériences nous avons tiré certaines hypothèses d'enseignement relatées dans [10] mais que nous rappelons ci-après :

* La géométrie de l'espace en premier cycle se développe de façon satisfaisante en confrontant pour des polyèdres l'object et son dessin en perspective cavalière.

* Une progression de cette perspective passe par quatre étapes :

1ère étape : apprendre les règles de dessin de la perspective cavalière.

2ème étape : dessiner plusieurs polyèdres en présence de l'objet.

3ème étape : réaliser des maquettes de polyèdres dont les arêtes sont toutes parallèles ou perpendiculaires à la face choisie comme face frontale.

4ème étape : réaliser des maquettes de polyèdres dont certaines arêtes ni parallèles ni perpendiculaires à la face choisie comme face frontale sont représentées par des obliques.

Ces hypothèses d'enseignement mettent en évidence l'importance de la dialectique entre maquette et dessin.

1.4.l. Représentations de l'espace

Maîtriser l'espace est le premier objectif de l'enseignement de la géométrie et le dessin est essentiel pour atteindre cet objectif. Il nous faut donc faire le point sur les différentes représentations de l'espace.

Les principales représentations de l'espace sont : la perspective cavalière, les vues du dessin industriel, la perspective axonométrique, l'épure de géométrie descriptive, l'épure de géométrie côtée, la perspective linéaire (ou conique, ou centrale, ou vraie, ...). Une description de ces représentations se trouve dans le chapître 11 de [9]. Précisons toutefois que la plus élémentaire est la perspective cavalière. Cette représentation est la mieux adaptée aux possibilités des élèves.

1.4.m. Dessins et concepts

Lorsque nous considérons un dessin, nous devons examiner parallèlement objets, concepts et images mentales.

Considérons par exemple le dessin d'un cube en perspective cavalière représenté par la figure 15 ci-contre. Nous pouvons lui associer une série d'objets; tout d'abord une maquette en carton, ou un cube en bois, une peinture ou une photographie du cube, ... Le dessin du cube est lui-même un objet matériel.

Nous lui associons encore une série de concepts mathématiques, carrés, angles, parallélogrammes, points, côtés, attachés directement au dessin; ou encore arêtes, faces, sommets, dièdres, cube, attachés plutôt à l'objet.

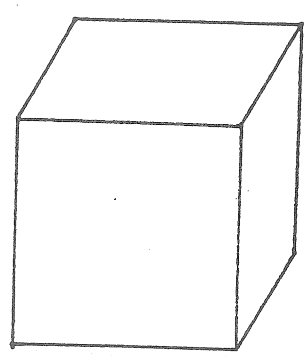

Figure 15

Parallèlement au dessin, aux objets et aux concepts se mettent en place des images mentales. Nous ne savons pas définir une image mentale, mais dans certains cas nous savons la reconnaître. Nous disons qu'il y a image mentale s'il y a énonciation de concepts associés à des objets (dessins, maquettes, peintures, ...) en l'absence de ces objets, avec (ou sans) référence explicite ou gestuelle à ces objets.

En résumé, nous disons qu'un couple fondamental intervient en géométrie c'est le couple concept-objet. Parmi les objets on trouve le dessin et associé à chaque couple se mettent en place des images mentales.

1.4.n. Dessin et structures

Le dernier point que nous voulons signaler à propos du dessin porte sur les rôles relatifs du dessin et des structures mathématiques. Nous avons déjà abordé cette question dans [4].

Dessins et structures sont indépendants, c'est-à-dire que différents types de dessins peuvent être associés à la même structure et différentes structures peuvent être ilustrées par le même dessin. Une mauvaise gestion de cette indépendance est souvent source d'ambiguïté et même d'erreur. Afin de convaincre le lecteur de cette indépendance nous remarquons, par exemple, qu'un espace vectoriel de dimension 3 peut être représenté au moyen de la perspective linéaire et alors la somme de deux vecteurs V et W est un vecteur V+W qui n'est pas dessiné au moyen de la règle du parallélogramme utilisée d'ordinaire pour l'addition des vecteurs. Lorsqu'on utilise cette représentation la somme des deux vecteurs V et W est dessinée au moyen de la construction illustrée par la figure 16.

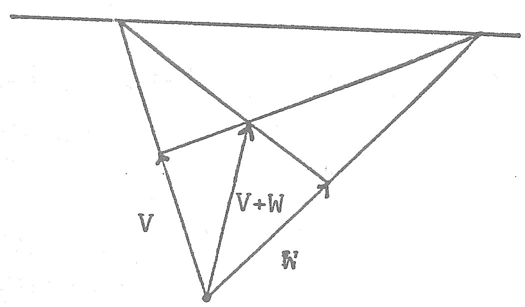

Figure 16

Si on veut éviter bien des confusions, il faut répondre à des questions telles que :
Peut-on représenter un vecteur au moyen d'une trace ponctuelle ?
Peut-on représenter un vecteur au moyen d'une flèche ?

Si on dessine les éléments d'un espace affine dans lequel il n'y a pas d'orthogonalité, peut-on dessiner deux droites d'équerre ?

Durant la décennie 1970-1980, on a souvent estimé que la structure vectorielle ne pouvait pas s'accompagner de dessin et que seule la structure affine pouvait ("éventuellement" disaient certains) être ilustrée par des dessins.

En bref, il nous semble que dans l'enseignement secondaire, chaque structure géométrique doit être accompagnée de dessins et que les rapports entre les dessins et la structure doivent être clairs pour l'enseignant même s'ils ne sont pas dans une première approche explicités aux élèves.

Dans le chapître 1.4, nous avons examiné quatorze points qu'il nou fait prendre en compte si nous voulons avancer dans l'élaboration d'un statut du dessin. Rappelons ces différents points :
Le dessin et son rôle de configuration (a), d'amorce de problème (b), de cas particulier (c), de représentation de l'espace (l), le dessin et son rôle dans les constructions effectives (g), dans la démarche expérimentale (h), le rôle des règles de dessin (d), des instruments de dessin (e), les rôles relatifs de la construction exacte et de la construction approchée (i), du dessin à main levée et du dessin avec instruments (f), du dessin et du calcul en géométrie (j), du dessin et de la maquette (k), du dessin et des objets, des concepts ou des images mentales (m), du dessin et des structures mathémtiques (n).

1.5. Raisonnement

L'apprentissage du raisonnement n'est pas le premier objectif de la géométrie. Mais le raisonnement est une clé importante de la géométrie.

Bien que les élèves soient fréquemment appelés à démontrer, surtout à partir de la classe de 4ème, leur perplexité face à la démonstration est notoire. Nous avons proposé à une classe de 1ère scientifique le problème suivant :
ABC est un triangle fixe. MNPQ est un rectangle variable. Les points M et N sont sur le côté [BC] du triangle, le point P sur le côté [AC], Q sur le côté [AB]. Déterminer l'ensemble des positions possibles pour le centre I du rectangle variable MNPQ.

La solution de ce problème s'obtient en introduisant le milieu A' du segment BC, puis la hauteur AH issue de A. Plaçons-nous dans le cas où H appartient au segment BC, et appelons J le milieu de PQ. La figure 17 présente les éléments A,B,C,M,N,P,Q,I et J. Le lieu de J est le segment AA' que nous présente la figure 18. Donc le lieu de I est le segment A'K joignant A' au milieu K de AH; ces éléments apparaissent sur la figure 19.

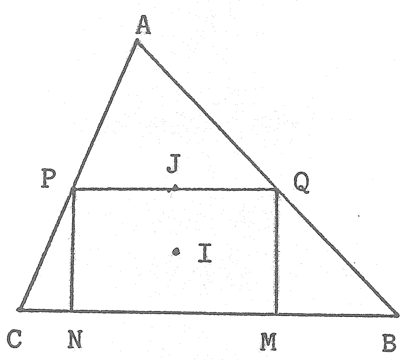

Figure 17

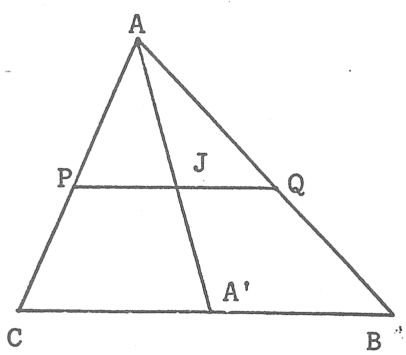

Figure 18

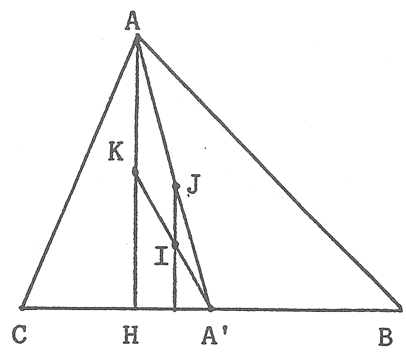

Figure 19

Sur les 24 élèves de 1ère S, trois n'ont rien trouvé, deux ont parlé d'une courbe, un élève a trouvé un point, douze ont proposé une droite, une demi-droite ou un segment, six ont trouvé le segment KA' solution. Mais toutes les solutions ont été trouvées empiriquement; les élèves vérifient simplement que quelques points sont alignés. Aucun élève n'a fait de démonstration, n'a même exprimé le besoin d'une démonstration. On peut penser que la classe est "mauvaise", mais on peut aussi se poser des questions sur notre enseignement de la démonstration ...

La démonstration apparaît souvent aux élèves comme une manie de professeur et non comme une nécessité. Plutôt que d'insister sur la déonstration qui donne une vision un peu étroite des mathématiques, nous pensons qu'il faut essayer de développer le goût et le besoin du raisonnement. Trois pratiques particulières, parmi d'autres, nous paraissent aptes à rendre le raisonnement nécessaire : la présentation de problèmes exhaustifs, de problèmes dont la réponse n'est pas connue et de problèmes de l'espace.

Nous entendons par problème exhaustif un problème dont la solution consiste à organiser et à énumérer un nombre fini de cas. On peut par exemple chercher toutes les positions relatives de deux cerclces d'un même plan; ou bien étant donnés deux triangles ABC et A'B'C', chercher parmi les six relations $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\widehat{B}=\widehat{B'}$, $\widehat{C}=\widehat{C'}$, AB=A'B', BC=B'C', AC=A'C', toutes les familles de relations qui entraînent l'égalité des deux triangles; ou encore chercher toutes les classes de triangles obtenues en prenant trois sommets d'un cube, deux triangles égaux étant dans la même classe; ou encore tous les patrons d'un cube; ou bien toutes les sortes de sections d'un cube ou d'un tétraèdre régulier, ...

La plupart des exercices proposés dans l'enseignement des mathématiques donnent la solution et demandent une démonstration, cela fait disparaître le rôle du raisonnement dans la découverte de la solution. Nous estimons qu'il faut donner plus d'importance aux problèmes dont la solution est inconnue. C'est le cas des énoncés tels que :

* On donne deuxcercles et un rectangle. Quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection (cf. [2]) ?
* Complète le tableau ci-dessous :

Si j'ai	*Je peux tracer au plus*
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	
5 points	
6 points	
7 points	
12 points	
20 points	
108 points	
n points	

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place un point P sur l'hypothénuse. On trace alors le segment [PI] perpendiculaire à [AB] et le segment [PJ] perpendiculaire à [AC]. On trace le segment [IJ]. Si on déplace le point P sur l'hypothénuse, la longueur du segment [IJ] varie. Où faut-il placer le point P pour que le segment [IJ] soit le plus court possible ? La figure 20 illustre la situation dans un cas particulier.

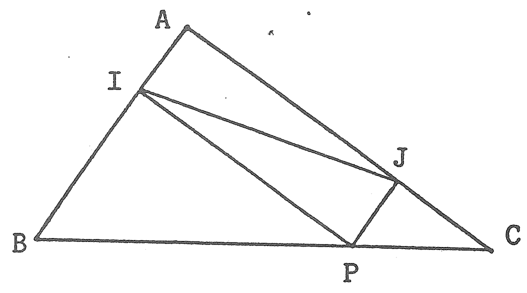

Figure 20

Dans [6], nous remarquons qu'en géométrie de l'espace observation active et raisonnement déductif vont interagir de façon fructueuse. En géométrie de l'espace, le dessin ne pouvant pas être en correspondance bijective avecl'objet, le raisonnement devient nécessaire. La démonstration est motivée par la recherche d'une économie d'action. Elle n'est plus un simple artifice magistral mais une nécessité. Le dosage entre observation et raisonnement peut varier comme le montrent les quatre problèmes I, II, III et IV énoncés ci-après :

I. Deux diagonales d'un cube sont-elles perpendiculaires ?

II. En quels points d'une diagonale d'un cube se projettent orthogonalement tous les sommets de ce même cube ?

III. Peut-on couper un tétraèdre régulier de telle sorte que cette section soit un triangle rectangle isocèle ?

IV. Peut-on couper un cube par un plan de telle sorte que cette section soit un pentagone régulier ?

La place du raisonnement progresse d'un problème au suivant. On peut répondre au problème I, accessible à des élèves de 5ème, par la lecture directe d'un dessin bien choisi (le choix est toutefois facilité par le raisonnement). Le problème II accessible à des élèves de 2nde, nécessite observations et raisonnements. Le raisonnement pourra seul justifier les solutions des problèmes III et IV que nous réservons aux élèves de Terminale ou de Deug Scientifique.

DEUXIEME PARTIE

L'élève face à la géométrie

2.1. Etudiants

Nous faisons une constatation : ces dernières années, nos étudiants d'université ont très peu de connaissances géométriques.

Nous avons eu l'occasion de travailler à l'Université de Montpellier durant l'année scolaire 1989-1990 avec une soixantaine d'étudiants de licence de mathématique ayant choisi une option de géométrie constituant un sixième de la licence. Cette option respecte un programme de pré-préparation au CAPES. Elle est dispensée durant 64 heures d'enseignement.

Durant l'année, les étudiants ont passé quatre épreuves. Trois de ces épreuves ont eu lieu respectivement en Décembre 1989, en Avril 1990 et en Septembre 1990. Au cours de ces épreuves ont été proposés, entre autres, les trois exercices suivants :

Exercice de Décembre :

Les faces du trièdre OXYZ sont données; $\widehat{XOY} = 37°$, $\widehat{YOZ} = 60°$, $\widehat{ZOX} = 37°$. Quelle est la mesure en degrés du dièdre admettant OX comme arête, XOY et ZOX comme faces ?

Exercice d'Avril :

Etant données les mesures suivantes : $B_1C_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, $D_1B_1 = 6$, $A_1B_1 = 12$, $A_1C_1 = 8$, $A_1D_1 = 12$ et $B_2C_2 = 5$, $C_2D_2 = 5$, $D_2B_2 = 9$, $A_2B_2 = 7$, $A_2C_2 = 10$, $A_2D_2 = 7$, quel est celui des deux tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ qui existe ? Donner la valeur d'au moins un angle dièdre de ce tétraèdre.

Exercice de Septembre :

ABCD est un tétraèdre régulier et G est le centre de gravité du triangle ABC. Quelle est la mesure en degrés de l'angle dièdre admettant DB comme arête, ADB et GDB comme faces ?

Dans le tableau 21, nous indiquons le nombre d'étudiants, sur les 59 ayant composé, qui ont obtenu respectivement 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 points aux exercices de Décembre et d'Avril; ces exercices étaient notés sur 6.

Note	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'étudiants en Décembre	40	4	5	2	2	2	4
Nombre d'étudiants en Avril	34	10	4	3	4	1	2
% approximatif	75%			15%			

Tableau 21

Sur les 35 étudiants ayant composé en Septembre et qui ont eu à traiter l'exercice cité, un seul étudiant a trouvé la réponse.

Nous avons là une preuve de plus des carences de notre enseignement de la géométrie et plus particulièrement de la géométrie de l'espace qui est pourtant indispensable dans la plupart des matières scientifiques, chimie, physique, mécanique, technologique, ...

Nous avons testé à travers ces exercices les connaissances en géométrie d'étudiants en licence de mathématiques, anciens bacheliers de la série C pour la plupart. Mais quelle place occupe cette géométrie dans l'apprentissage proposé aux séries F ou G par exemple?

2.2. Examens

Les examens ont une place tellement importante dans notre enseignement que l'évaluation est en train de prendre le pas sur la formation. Nous ne développons pas ici cette affirmation dont nous assumons la responsabilité car à ce jour peu de travaux ont pris en considération l'influence de l'évaluation sur la formation aussi notre point de vue est-il plus intuitif qu'étayé scientifiquement. Pourtant le peu d'épreuves officielles de mathématique faisant appel à l'usage de maquettes, à des démarches expérimentales, à des problèmes de géométrie pure n'est certainement sans influence sur le temps de formation consacré à de tels sujets.

Ce problème de l'influence de l'évaluation sur la formation n'est pas seulement institutionnel. Les professeurs de 2nde ont souvent affirmé qu'ils délaissent la géométrie de l'espace car elle se prête mal à des contrôles satisfaisants.

Ce problème est aussi accentué par le rôle de sélection que jouent les mathématiques dans l'ensemble des recrutements. On ne garde pour mettre en place ces évaluations que quelques notions, calculs ou formules passe-partout dont le bachotage intensif et nécessaire empêche un développement harmonieux et formateur des mathématiques. Est-ce un hasard si la priorité donnée aux mathématiques comme moyen de sélection à partir de la décennie 1950-1960 s'est accompagnée très vite de la disparition de la géométrie qui se prête plus mal que l'algèbre ou le calcul à une évaluation toujours quantifiée ? Dans l'enseignement, la géométrie analytique domine la géométrie synthétique. Mais n'est-il pas plus facile de fabriquer une épreuve d'examen avec la première qu'avec la seconde ?

Beaucoup de questions de posent. Les réponses à ces questions risquent d'être déterminantes pour l'évolution de l'enseignement de la géométrie.

2.3. Formation scientifique

Les lignes qui précèdent montrent que nous donnons une grande importance à l'enseignement de la géométrie. Quelles raisons fondamentales avons-nous de privilégier cet enseignement parmi tous ceux qui s'adressent aux élèves ayant entre 11 et 16 ans ? Donnons une de nos raisons :

la géométrie semble être la discipline apportant la meilleure formation scientifique aux élèves ayant entre 11 et 16 ans.

Six arguments justifient cette affirmation.

2.3.1. Démarches de pensée

La géométrie utilise les démarches de pensée les plus riches et les plus fondamentales parmi celles qui sont nécessaires à la formation de l'esprit scientifique.

Les contradictions y jouent un grand rôle; qu'elles prennent la forme de contradictions observées ou de contradictions logiques (cf.[2]). L'empirisme et les démarches expérimentales y tiennent une place importante (cf.[6]). Chevalier A. a souligné l'importance des vérifications, des contre-exemples, des tâtonnements (cf. [15] et [16]).

2.3.2. Matériel

L'élève doit se servir de ses mains. **Un travail matériel et des réalisations pratiques justifient et permettent d'assimiler la géométrie.** Les activités les plus importantes concernent l'analyse des objets, la réalisation des maquettes, la lecture et le tracé des dessins. La géométrie peut être associée à de nombreux travaux : mesures de terrains, travaux de menuiserie, ...

2.3.3. A la portée des élèves

Grâce aux sujets qu'on peut proposer et aux problèmes qu'on peut traiter, **la géométrie est bien adaptée aux élèves. Elle peut en particulier être mise à la portée des élèves des collèges.** Nous avons pu constater à quel point les élèves étaient actifs et détendus en cherchant en classe des petits problèmes semblables aux deux problèmes suivants :

* Découpe un disque de 15 cm de rayon. Trace un angle de 120° comme le montre la figure ci-contre. Enlève le morceau du disque qui se trouve dans cet angle. Fabrique avec le reste un chapeau de clown ayant la forme d'un cône.
Quelle est la hauteur de ce cône ?
Quel est le rayon du cercle de base de ce cône ?

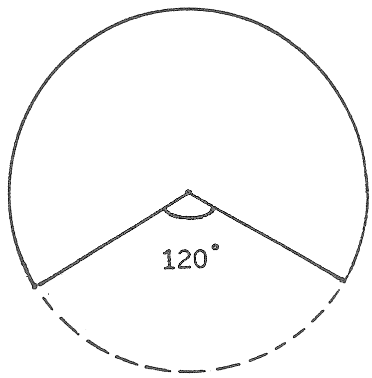

Figure 22

* Le périmètre d'un triangle est de 12 cm. Sachant que la mesure d'un côté est toujours un nombre entier, dessinez ce triangle.
Existe-t-il plusieurs solutions (cf. [16] page 34).

Le matériel utilisé, instruments de dessin et maquettes, est particulièrement bien adapté aux élèves ayant entre 11 et 16 ans. Les concepts introduits de façon explicite ou implicite dans l'apprentissage, comme par exemple l'inégalité triangulaire et le cône dans les deux problèmes précédents, arrivent au bon moment de la scolarité et sont indispensables aux premiers pas en formation scientifique.

2.3.4. Discipline de service

La géométrie est une discipline utilisée dans de très nombreux domaines autres que les mathématiques. Elle joue un rôle important en tant que discipline de service. Comment faire de la physique sans les aires, les volumes, les vecteurs, ... ? Comment faire de la chimie sans les polyèdres, les isométries, ... ? de la géographie sans les sphères, les agrandissements ou les similitudes, ... ? Du dessin industriel sans l'orthogonalité, sans une certaine maîtrise de la géométrie de l'espace, ... ? Des statistiques sans la notion de répartition de masse, de barycentre, ... ? De la technologie, ...

2.3.5. Raisonnement

Par l'importance qu'ont le raisonnement et l'organisation de la rigueur, la géométrie prépare l'élève à l'élaboration d'une conceptualisation rationnelle. De nombreux thèmes sont très formateurs dans cette optique. Soulignons par exemple la richesse de l'étude des positions relatives de deux cercles, des sections du cube ou du tétraèdre régulier, des constructions de triangles connaissant certains de leurs éléments, ou de l'inventaire des polyèdres réguliers.

2.3.6. Formalisation

La formalisation est indispensable à la vie scientifique. **Pour construire la géométrie un formalisme est mis en place de façon progressive et argumentée. Cette mise en place constitue un excellent apprentissage à la vie scientifique.** La richesse et la variété de la formalisation géométrique est particulièrement remarquable. Il y a un langage avec son vocabulaire qui va de mots très courants, points alignés par exemple, à des mots plus spéciaux comme forme linéaire. Il y a des symboles bien connus,$4m^2$ par exemple et d'autres plus sophistiqués comme $\|\vec{V_1}\|\,\|\vec{V_2}\|.|\sin(\vec{V_1},\vec{V_2})|$. Il y a des techniques nombreuses et variées; par exemple en trigonométrie, dans le plan complexe, en représentation de l'espace ou pour résoudre des systèmes,simplifier des transformations (ou réduire des matrices), ...

2.4. Pour tous ou pour de hauts niveaux

Pour bien cerner les objectifs de la géométrie, nous devons répondre à la question suivante : **l'enseignement de la géométrie doit-il avoir pour but d'augmenter les connaissances de chacun ou de former de hauts niveaux de qualification?**

Nous estimons que, surtout dans le cadre de l'enseignement obligatoire, nous devons viser un enseignement pour tous sans chercher nullement à former de hauts niveaux de qualification. Notre réponse à la question posée ci-dessus détermine certains choix pédagogiques. Nous allons en examiner deux dans ce chapître, l'un concerne la simplicité de l'enseignement, l'autre l'autonomie de l'élève.

2.4.1. Simplicité

Le vocabulaire utilisé en mathématique dans l'enseignement obligatoire n'est jamais assez simple. Le vocabulaire du petit Larousse illustré suffit amplement pour enseigner les mathématiques aux élèves ayant entre 11 et 16 ans.

Examinons le travail d'OLI un élève de 1ère scientifique cherchant le lieu du centre d'un rectangle inscrit dans un triangle. L'énoncé de ce problème lui a été fourni sous la forme proposée dans le paragraphe 1.5.

OLI commence sa recherche en dessinant un premier triangle que reproduit la figure 23. Il explique :

* *J'ai donc tracé le triangle puis à l'intérieur j'ai construit un rectangle (M, N, P, Q) de centre C. Ensuite, j'en ai tracé un second (M', N', P', Q') de centre C'.*

Il cherche, mais *"mécontent de ce premier résultat"* il réalise un autre dessin reproduit par la figure 24.

* *J'ai donc reconstruit un triangle fixe mais quelconque j'ai tracé un premier rectangle (M, N, P, Q) puis un second, ...*

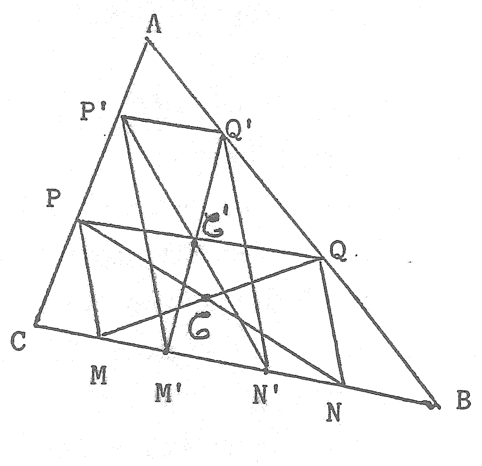

Figure 23

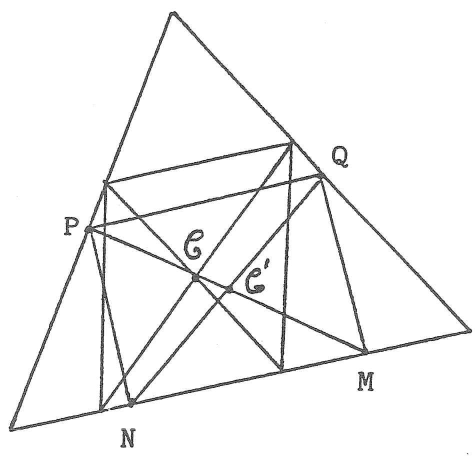

Figure 24

Mais c'est encore l'impasse. Il dit d'ailleurs :

* *Mais en traçant la droite passant par les deux centres des deux rectangles, je ne trouve aucun lien entre les milieux. J'ai donc fait une troisième figure avec trois nouveaux rectangles.*

C'est la figure 25 ci-après et il ajoute :

** Je ne l'ai pas encore dit mais ce que je cherche ce n'est pas seulement cet ensemble des positions possibles mais un lien entre ces positions qui me permette d'établir une régle vérifiée et juste.*

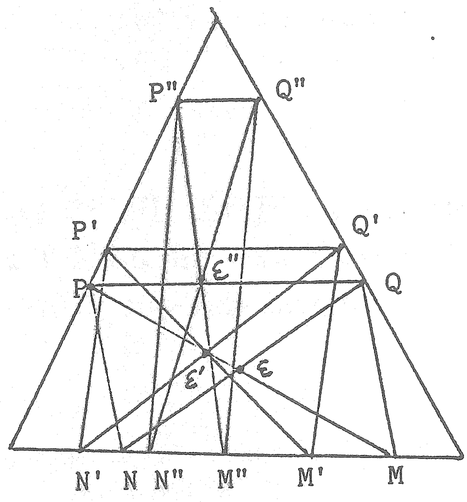

Figure 25

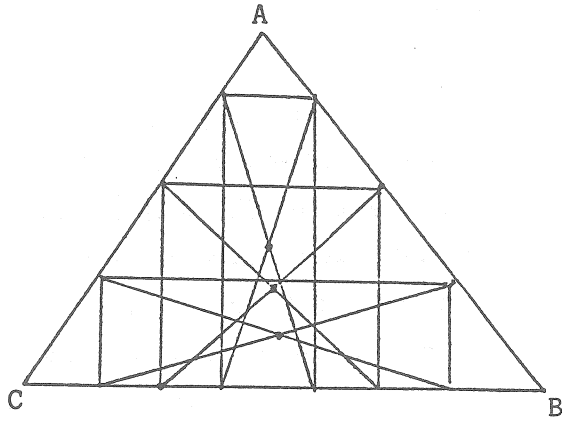

Figure 26

Il n'aboutit toujours pas. Il ne trouve aucune relation entre les centres :

** Le résultat était le même il n'y avait aucun lien avec les points.*

C'est alors qu'il prend conscience de l'origine de ses difficultés. En effet, il écrit (et nous reproduisons en italique son texte in extenso en respectant sa syntaxe et son orthographe comme précédemment) :

** Après ces deux derniers résultats où je ne trouvais aucun lien j'ai relu l'énoncé puis j'ai buté sur le mot rectangle. Je ne savais plus ce que c'était ! Je savais que les côtés étaient parallèles 2 à 2 mais il me semblait que les soi-disants rectangles que j'avais précédemment dessiné en étaient vraiment. Je suis donc allé cherché la définition et là je trouvai l'élément qu'il me manquait qui était que les côtés formaient des angles droits.*

Il réalise alors un quatrième dessin, reproduit par la figure 26. Le travail d'OLI a duré environ deux heures et demi. Nous n'en avons décrit partiellement que le premier tiers.

Ce travail met en évidence un grand nombre de qualités : activité, patience, précision, richesse de la réflexion. Notons par exemple qu'il entrevoit que le lieu du centre d'un parallélogramme inscrit n'est pas une ligne mais un morceau de plan. Nous avons d'ailleurs là une nouveau et joli problème qui introduit le triangle des milieux des côtés de ABC. Il prend, de plus, le moyen de s'en sortir, grâce au dictionnaire. Pourtant, il ne connaît pas la définition du rectangle ...

Nous avons choisi ce travail d'OLI pour illustrer notre point de vue sur la nécessaire simplicité du vocabulaire que nous avons à utiliser si nous ne voulons pas conduire à des impasses de jeunes esprits qui par ailleurs ont un fonctionnement tout à fait remarquable.

A propos du vocabulaire de base en géométrie nous pouvons constater que sur les sept cent cinquante mots que le petit Larousse en couleur consacre aux mathématiques, trois cent cinquante environ concernent la géométrie. Ils suffisent amplement pour l'enseignement obligatoire. Les présentent l'avantage d'être présents dans bien des familles ce qui permet d'augmenter globalement les connaissances de la gande majorité de nos élèves. Ils ont quelquefois l'inconvénient de présenter des définitions qui laissent à désirer, mais nous ne cherchons pas dans notre enseignement obligatoire un haut niveau de qualification.

Cet effort de simplicité doit aussi porter sur la syntaxe et la mise en page des textes. Nous estimons que de ces deux points de vue, les ouvrages scolaires sont des modèles très néfastes. Ils sont pratiquement illisibles pour des élèves.

Le choix et la présentation des concepts demandent eux aussi un effort important si nous voulons aller dans le sens d'une plus grande simplicité. C'est ce qui a guidé notre travail sur les configurations (cf. II dans [8]), et notre recherche de classification des isométries (cf. 1.3. ci-dessus) qui devrait permettre aux enseignants ayant en charge des élèves en fin d'études secondaires ou au début des études supérieures de concevoir un enseignement plus simple des isométries. Insistons encore sur un avantage que présente la plupart des concepts géométriques : ils s'accompagnent d'objets matériels et s'assimilent ainsi plus facilement que d'autres concepts grâce à cette confrontation entre objets et concepts (cf. 1.4.m. ci-dessus).

2.4.2. <u>Autonomie</u>

Nous pouvons promouvoir une certaine autonomie des élèves en leur donnant l'habitude d'utiliser la non contradiction.

Pour résoudre le problème du "cône sur le cube" dont nous avons donné l'énoncé dans le paragaphe 1.4.b., les élèves ont besoin de connaître la longueur de la diagonale d'une face du cube de 10 cm d'arête. Certains élèves mesurent pour cela la diagonale d'un carré de 10 cm de côté qu'ils ont dessiné sur une feuille. Ils calculent aussi avec "Pythagore" cette diagonale. La non contradiction entre les deux résultats les conforte dans la fiabilité de leur réponse. Cet usage de la confrontation de la mesure et du calcul est un exemple d'usage de la non contradiction. La géométrie est particulièrement propice à cette confrontation grâce à la variété de ses méthodes : raisonnement, dessin, calcul, mesures, ...

La non contradiction est possible dès qu'on utilise au moins deux méthodes pour aboutir au résultat cherché : elle donne confiance dans un résultat sans que la compétence d'une autre personne soit nécessaire. Elle renforce l'autonomie de l'élève. Elle peut être utilisée dès le début du collège. Elle semble demander au moins deux fois plus de temps pour une question particulière mais globalement sur un apprentissage de plusieurs années est-ce bien une perte de temps que d'acquérir cette maîtrise des contradictions ? La prise de conscience d'une telle méthode est indispensable à la formation générale de chaque élève.

2.5. Les narrations de recherche

Pour bien concevoir la formation que nous voulons donner à nos élèves, un travail d'observation d'élèves nous paraît indispensable. **L'observation de résolutions de problèmes effectuées par des élèves est particulièrement enrichissante. Parmi toutes les méthodes d'observation utilisables, celle fondée sur les narrations de recherche (en abrégé N.R.) paraît présenter de sérieux avantages.** Cette méthode a été présentée dans [18] et [14]. Elle a été aussi présentée dans un atelier du colloque de Port d'Albret. Donnons quelques informations au sujet des N.R.

Une narration de recherche est un texte écrit par un élève. C'est un exposé détaillé d'une suite d'activités qu'il a réalisé au cours de la recherche d'un problème de mathématique.

Les N.R. sont intéressantes si elles font état des erreurs, des doutes, des difficultés, des tâtonnements, si elles donnent beaucoup de précisions, de détails, de descriptions matérielles.

Deux consignes sont données aux élèves en priorité :

* Essaie de toujours dire pourquoi tu fais ceci, tu dis cela.
* Joins tous tes brouillons en les numérotant si possible.

Les N.R. peuvent être présentées comme des devoirs à faire à la maison. Un compte-rendu en classe permet de mettre au point la manière de réaliser des N.R. intéressantes. Pour cela, on montre la qualité des N.R. de certains élèves. Lorsque nous analysons les N.R. nous distinguons trois aspects : la solution, la narration et la recherche. La solution mathématique est le moteur qui fait agir l'élève. La narration est le moyen pour nous de comprendre ses démarches. Mais c'est la recherche réalisée par l'élève qui nous intéresse et qui va peut-être apporter les réponses aux questions que nous nous posons.

N'importe quel professeur peut organiser des N.R. dans sa classe. Il nous semble aussi que ces N.R. peuvent être utilisées fructueusement comme méthode expérimentale en didactique des mathématiques.

2.6. Les résolutions de problèmes

Comme on a pu s'en rendre compte tout au long de ce texte, nous attachons une grande importance à la résolution de problème.

Les résolutions de problèmes amènent les élèves à être actifs et ainsi les aident à s'épanouir et à développer leur créativité. Elles leur font acquérir et consolider leurs connaissances en géométrie.

Encore faut-il pour cela apporter un très grand soin aux énoncés. L'énoncé doit être vite compris. La solution ne doit pas être évidente ni, non plus, être ambigue. L'élève doit être intéressé et actif. On ne doit pas oublier que l'habillage d'un problème crée des difficultés spécifiques à chaque habillage.

Un travail collectif d'expérimentations multiples et variées mené par une équipe de professeurs permet d'avoir de bons énoncés. Lorsqu'on veut écrire des énoncés correspondant à des objectifs assez précis plusieurs mois d'expérimentation peuvent être nécessaires. Ce fut le cas, entre autres, pour les énoncés des problèmes FIL et SIM qui devaient nous permettre d'avoir des informations sur les procédures utilisées par les élèves dans les domaines de la représentation de l'espace pour le problème FIL et de la similitude pour le problème SIM. L'analyse du premier problème est faite dans [26], [3] et [27]; celle du second dans [2]. Les énoncés de ces deux problèmes sont :

Problème FIL

Une salle de classe a pour dimension 7 m de long, 5 m de large et 3 m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol. Une balle de révolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5 m au-dessus du sol.
A quelle distance de chaque mur le fil était-il placé ?

Problème SIM

Construisez dans le rectangle, un triangle qui soit le même que celui-ci (on montre le triangle dessiné sur la feuille carrée), mais le plus grand possible.

Une feuille carrée sur laquelle est dessiné un triangle et une feuille rectangulaire sur laquelle est dessiné un rectanlgle sont fournies. Nous représentons ces deux feuilles, à l'échelle 1/3 par les figures 27 et 28.

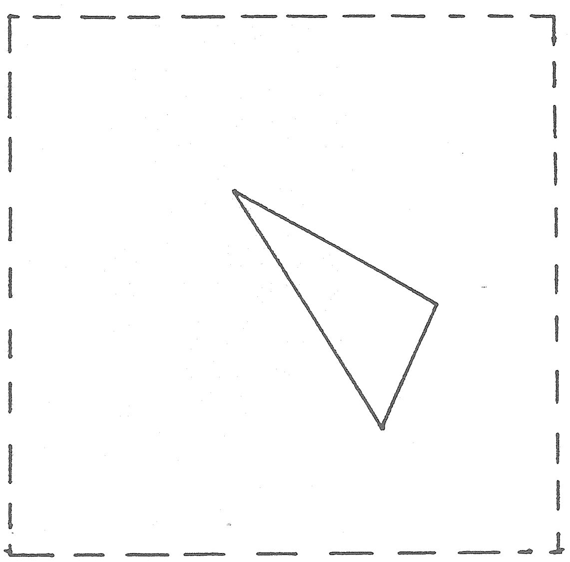

Figure 27

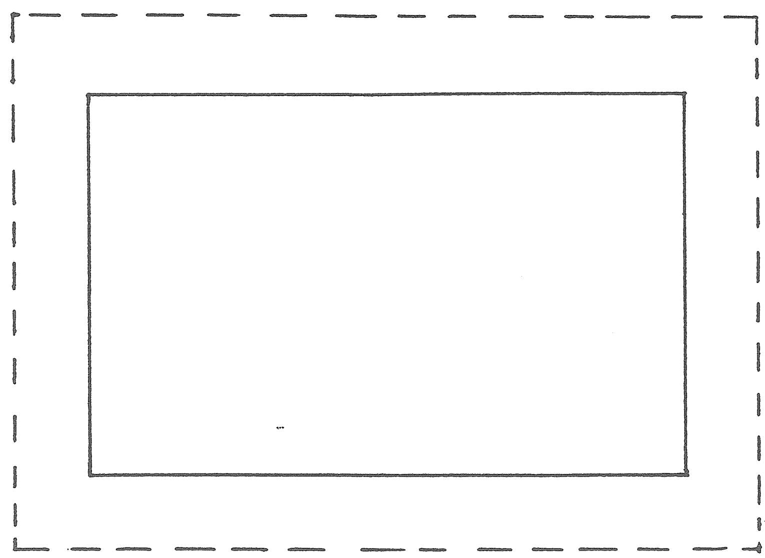

Figure 28

La genèse du problème SEC dont nous ne donnons pas ici l'énoncé et qui devait nous fournir des informations sur les rapports entre le dessin et l'objet en géométrie de l'espace a été longuement présentée par Bonafé F. dans [12] et [13]. L'analyse des travaux d'élèves ayant cherché ce problème se trouve dans [17].

2.7.La formation des maîtres

Dans la formation des maîtres, deux périodes sont à distinguer : la formation initiale centrée sur les contenus mathématiques et la formation permanente centrée sur les élèves.

La formation initiale en géométrie doit donner aux étudiants une complète maîtrise des structures euclidiennes, des techniques de dessin, de la géométrie de l'espace, des transformations, des raisonnements et procédures géométriques, de la rédaction de textes de géométrie. Des connaissances doivent être données sur le contenu des disciplines associées à la géométrie : physique, technologie, nformatique, audio-visuel, ...

La formation permanente qui commence avec l'année du C.P.R. doit être centrée sur la connaissance de l'élève face à la géométrie. Elle doit s'accompagner d'observations d'élèves, d'analyse des procédures d'élèves.

Les différents éléments présentés dans ce texte donnent une idée des contenus de la formation en géométrie que nous préconisons.

ANNEXE

Algorithmes de constructions de transformations

Construction du symétrique d'un triangle par rapport à une droite

* Par un sommet du triangle, on trace la perpendiculaire à la droite et on la prolonge de l'autre côté.
* Sur le prolongement, on reporte une longueur égale.
* On procède de la même façon pour les deux autres sommets.
* On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

Construction du symétrique d'un triangle par rapport à un point

* Par un sommet, on trace la droite passant par le point et on la prolonge de l'autre côté du point.
* Sur le prolongement, on reporte une longueur égale.
* On procède de la même façon pour les deux autres sommets.
* On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

Construction du translaté d'un triangle

* A et B étant deux points donnés, construction du translaté d'un triangle dans la translation de A vers B.
* Par un sommet, on trace le parallèle à la droite AB.
* A partir du sommet, on reporte la longueur AB dans le sens de A vers B.
* On procède de la même façon pour les deux autres sommets.
* On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

Construction du transformé d'un triangle par une rotation de centre O et d'angle 30°

* On trace la demi-droite d'origine O passant par un sommet du triangle.
* On construit une demi-droite d'origine O qui fait un angle de 30° avec la précédente.
* On reporte sur cette deuxième demi-droite la même longueur.
* On procède de même avec les deux autres sommets du triangle, en tournant dans le même sens.
* On obtient les trois sommets d'un nouveau triangle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **AUDIBERT G.** 1980 - *Processus de recherche de problèmes de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire.* IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (92 pages).

[2] **AUDIBERT G.** 1982 - *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, volumes 1 et 2.* Nouvelle édition publication de l'APMEP 1984 N°56 (831 pages).

[3] **AUDIBERT G.** 1985 - *Représentation et empirisme dans le problème FIL,* IREM-USTL, place E. Bataillon, 79 pages.

[4] **AUDIBERT G.** 1986a - L'enseignement de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP N°355*, pages 501 à 526.

[5] **AUDIBERT G.** 1986b - *Equilibre ou obstacle* ? IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (25 pages).

[6] **AUDIBERT G.** 1989a - Empirisme et géométrie de l'espace chez les élèves ayant entre 11 et 18 ans. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 1989 - IREM de Strasbourg, pages 65 à 86.

[7] **AUDIBERT G.** 1989b - *A propos du statut du dessin : configurations géométriques.* IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier (23 pages).

[8] **AUDIBERT G.** 1989c- Les configurations en géométrie. Dans les *Actes du colloque Inter-IREM "du collège au lycée pour mieux réussir"* des 25, 26 et 27 Mai 1989 à Troyes. Edité par l'IREM de Toulouse.

[9] **AUDIBERT G.** 1990 - *La perspective cavalière.* Publication de l'APMEP,N°75 (220 pages).

[10] **AUDIBERT G., BONAFE F.** 1987 - Apprentissage de la perspective cavalière dans *Rabardel P., Weil-Fassina A. Le dessin technique. Apprendre, utilisation, évolution.* Paris-Londres-Lausanne, Hermès, pages 139 à 147.

[11] **AUDIBERT G., NAUDEILLO J.** 1989 - Les définitions de la perspective cavalière dans les livres de 6ème et de 5ème. Que proposer aux élèves ? Dans la commission *Inter-IREM Géométrie 1989, actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze* édité par l'IREM de Montpellier, p.84-90.

[12] **BONAFE F.** 1985 - *La genèse du problème SEC,* édition IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (53 pages).

[13] **BONAFE F.** 1986 - Représentation d'un objet de l'espace : la construction d'un problème. *Petit x N°11.* Journal pour les enseignants de mathématiques et des sciences physiques du premier cycle de l'enseignement secondaire édité par l'IREM de Grenoble (pages 37 à 64).

[14] **BONAFE F., CHEVALIER A.** 1990 - Narration de recherche. Dans le *compte-rendu de la journée GACEM* (Mercredi 16 Mai 1990), IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (14 pages).

[15] **CHEVALIER A.** 1984 - *Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève.* IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (442 pages).

[16] **CHEVALIER A.** 1988 - *Procédures de construction de triangles.* Publication IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (42 pages).

[17] **CHEVALIER A.** 1989a - *Analyse du problème SEC,* IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (59 pages).

[18] **CHEVALIER A.** 1989b - Narration de recherche en classe de 4ème : influence sur les stratégies et la motivation des élèves. A paraître dans les *actes de la 41ème rencontre de la CIEAEM.*

[19] **CREMONA L.** 1875 - *Eléments de géométrie projective* traduit par Dewulf, Paris, Gauthier-Villars

[20] **EFIMOV N.** 1945 - *Géométrie supérieure,* nouvelle édition, MIR, Moscou, 1981.

[21] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie et AUDIBERT G.** 1987 - Géométrie dans l'enseignement secondaire et technique dans *Commission Inter-IREM Géométrie 1988 Enseigner la géométrie, brochure ICME 6,* Budapest, 1988.

[22] **KEITA B.** 1990 - *Production et interprétation de dessins en perspective dans l'enseignement de la physique au premier cycle universitaire.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, 221 pages.

[23] **LEROY C.F.A.** 1855 - *Traité de géométrie descriptive,* 4ème édition, Paris, Mallet-Bachelier.

[24] **PAIS L.C.** 1990 - *La représentation du cylindre dans les manuels scolaires et chez les élèves,* IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (13 pages).

[25] **PARZYSZ B.** 1989 - *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse de Doctorat en Didactique des Mathématiques. Université de ParisVII, 490 pages.

[26] **PELOUZET B.** 1984 - Phases pré-expérimentales d'une recherche sur la géométrie de l'espace. *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, journée SMF* Marseille 1-2 Juin 1984. Publication de l'IREM de Marseille (pages V.1 à V.18).

[27] **PELOUZET B.** 1986 - *La proposition de Thalès dans le problème FIL.*IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (53 pages).

[28] **TERRACHER P., ARTIGUES C., BELLECAVE Y., DELORD R.,** 1990 - *Des figures pour nos élèves,* édité par l'IREM de Bordeaux (à paraître).