Buscar con Cabri.

Michel CARRAL
IUFM Midi Pyrénées
Francia

0.1 *Introducción.*

En estas paginas me propongo a través de la resolución de un ejercicio de mostrar como un software como Cabri permite de entender, gracia a su ambiente matemático, una situación geométrica, es una ayuda a su resolución y a la validación de los resultados encontrados.

El uso de un instrumento cuando trabajamos en geometría, o más generalmente en matemáticas, necesita de tener unos conocimientos de las características del instrumento utilizado ; con los instrumentos proveniente de las nuevas tecnologías, este conocimiento se dobla de la filosofía subyacente inducida, consciente o inconsciente, por el constructor del software que queremos utilizar.

Los geómetras fueron siempre conscientes de que las herramientas usadas en sus actividades tienen un papel en la manera de trabajar, en los saberes-hacer. Más, las competencias matemáticas no son necesariamente las mismas : no tenemos las mismas heurísticas para los procedimientos y las mismas validaciones si hacemos la geometría con la regla y el compás, o con la regla y la escuadra, o con el compás solo, . . .

El objeto de este artículo no es de presentar las calidades, las ventajas, o los inconvenientes de Cabri, voy solamente enunciar dos características que permiten de hacer de la geometría “mas allá de la mano " como unos tienen costumbre de decir. Eso vale también para la regla y el compás, y comparar lo que esas dos tecnologías tienen en común a través la lectura de los elementos de Euclide, permite de ver Cabri de manera diferente que a través el prisma de la computadora.

El software Cabri es fundado sobre el dibujo y el numérico : eso tiene por consecuencia que Cabri no hace demostraciones (a pesar que calculo con una muy buena aproximación sobre el dibujo que se ve en la pantalla : el número de cifras después de la coma que se ven es de quince (¿ exactos ?), y que para utilizar la características dibujo con la ergonomía del

[1]Texto publicado *in* Actes du Colloque Inter-IREM de Géométrie de Liège, Chercher avec Cabri, mayo de 2003.

software, tendremos que desarrollar nuestra capacidad a ver y a construir con las funciones de Cabri que son, si no se utiliza la calculadora, esencialmente las inducidas por las construcciones con la regla y el compás punto a punto. Eso es un ventaja para el aprendizaje de la geometría, porque para ver y reconocer lo que buscamos en un contexto, hay que conocerlo antes, es decir haberlo conocido en otros contextos. Notamos que una dificultad para un profesor será de explicar a los alumnos el interés de la demostración, visto las resultados de la potencialidad de este software ; una pista será de explicar el papel de la demostración, que es también de explicar, de entender el porque.

0.2 *El ejercicio y las primeras observaciones*

Ejercicio :

Sean un triángulo ABC y un punto P del plano. Notamos A', B', C', los simétricos de P respectivamente a los lados BC, AC, y AB del triángulo. Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el área del triángulo $A'B'C'$ sea igual al área del triángulo ABC.

Este ejercicio, por lo menos en esta forma, no es un ejercicio clásico lo que hace que nos encontramos desmontado, un poco como los alumnos delante de unos ejercicios que los proponemos. Es esta situación que va guiarnos en la investigación de este ejercicio, tentaremos de guardar, lo máximo de tiempo, una “mirada ingenua " antes de utilizar las competencias de las matemáticas llamadas superiores en los añejos tiempos.

Una etapa de observación.

Dibujamos, con Cabri, un triángulo ABC (*cf fig.* 1), tomamos un punto P y con el ayuda de la función “simetría axial " construyamos el triángulo $A'B'C'$. Para comparar más fácilmente las áreas hacemos la razón r de las áreas de los triángulos $A'B'C'$ et ABC. Situamos el punto P para que esta razón r sea igual a 1.

En la posición encontrada vemos que el punto P es aislado, si nos alejamos del triángulo, la razón disminuya y después crece hacia el infinito (?) en todas las direcciones partiendo del triángulo ABC.
Podemos notar, en esta forma de hacer, que en geometría empezamos a buscar cerca del objeto sobre el cual trabajamos, y después nos alejamos más y más de el.

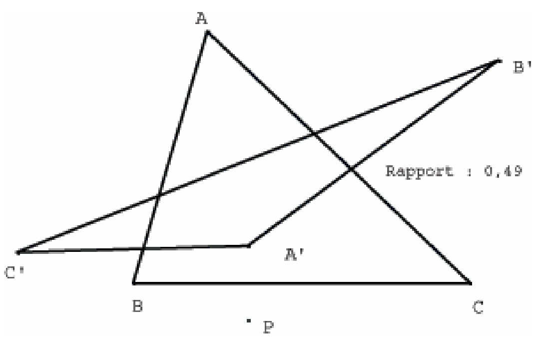

figure 1

Una primera constatación es que el lugar se compone de un punto particular, dentro o cerca del triángulo ABC, y de puntos bastante lejos del triángulo en todas las direcciones.

Déterminación de este punto :

Para empezar es conveniente de visualizar si este punto P es o no es un punto conocido (si no es conocido tendremos que utilizar una otra estrategia). Ver eso sobre un solo triángulo es una apuesta : la razón depende de la posición del punto respectivamente al triángulo escogido. Si modificamos la posición de un vértice del triángulo inicial tenemos que modificar la posición del punto P para que la razón r sea igual a 1, pero haciendo eso perdemos el dibujo inicial. Lo mejor es de considerar varios triángulos ABC en una misma pantalla y ver para cada triángulo donde se encuentra este punto.

Para no rehacer siempre esta construcción hacemos una macro. En el caso presente voy hacer dos macros : una llamada “razón " la otra “razón-triángulo " cuyo los objetos iniciales son el triángulo ABC y el punto P y los objetos finales son, por la primera, la razón r, y para la secunda la razón r y el triángulo $A'B'C'$.

En la pantalla (*cf fig.* 2) consideramos varios triángulo ABC y, para cada uno, aplicamos la macro “razón ". Como es más fácil de reconocer puntos particulares conocidos sobre triángulos que conocemos que sobre triángulos cualquier, modificamos estos triángulos de tal manera que uno sea rectángulo, otro equilátero, otro isósceles con un ángulo bastante agudo y otro bastante obtuso. Y para cada uno encontramos la posición del punto P respectivo.

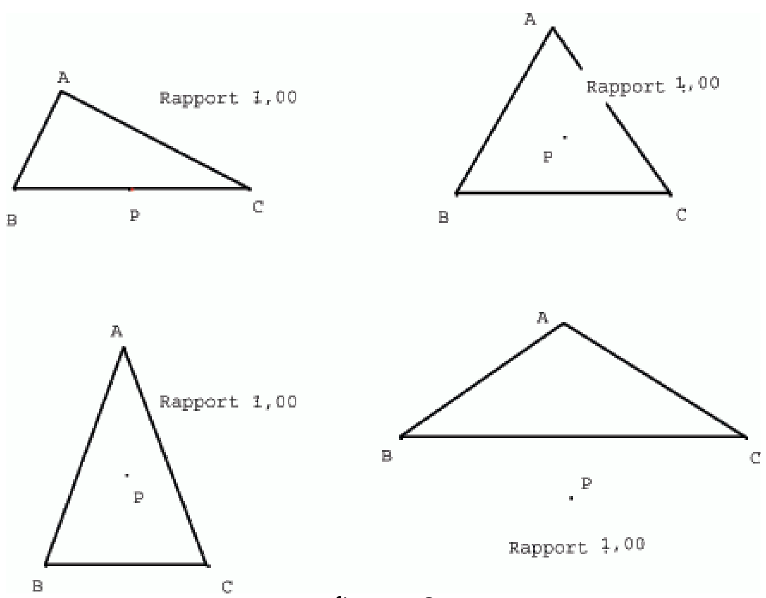

figure 2

Por eliminación sucesiva de los puntos conocidos posibles, punto medio de un lado (dependiendo del ángulo), centro de gravedad, centros de círculos circunscrito y inscrito, ortocentro, ... quedamos solamente con el centro del círculo circunscrito.

Validación con Cabri :

Construir el centro ω del círculo circunscrito de un triángulo cualquier, redefinir el punto P como siendo el punto ω con la función " Redefinir un objeto " : la razón es igual a 1 mismo si pedimos el máximo de cifras después de la coma. Para Cabri el punto ω, centro del círculo circunscrito es un punto del lugar buscado para cualquier triángulo (mover un vértice : la razón queda igual a 1).

Demostraciones :

$1°$) Utilizando los casos de congruencias relativos a los triángulos, es fácil de probar que los triángulos ABC et $A'B'C'$ son iguales : tienen las mismas áreas.

$2°$) Notamos por ω' el centro del círculo circunscrito del triángulo $A'B'C'$. Los puntos ω et ω' con los vértices de los triángulos ABC, $A'B'C'$ son los vértices de un cubo visto en perspectiva cavaliera. Esos triángulos son sobre planos paralelos y se deducen uno de otro por la simetría central de centro el centro del cubo (punto medio de AA'). Estos triángulos son iguales : tienen mismas áreas.

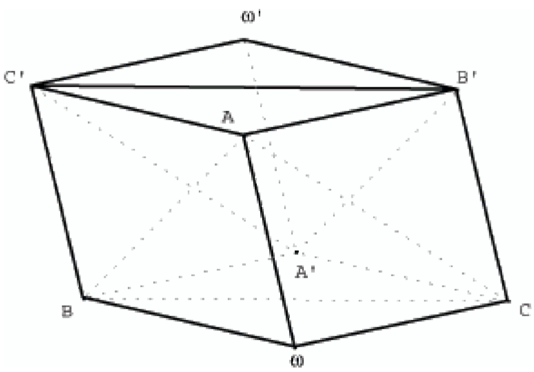

figure 3

$3°$) Las proyecciones ortogonales a, b, c del punto ω sobre los lados del triángulo inicial son los puntos medios I, J, K de los lados del triángulo ABC : el área del triángulo IJK es el cuarto del área del triángulo ABC. Los triángulos ABC et $A'B'C'$ tienen mismas áreas.

Notas :

1. Una demostración basta para probar un resultado en matemática, pero varias demostraciones pueden explicar mejor, traer otra mirada y dar una mejor inteligencia de la situación. En este caso no tenemos ninguna información pertinente para los otros puntos.
2. Para todo punto P del plano, consideramos las proyecciones ortogonales sobre los lados del triángulo, el triángulo que obtenemos se llama triángulo podaria, es homotético del triángulo $A'B'C'$ en la razón $\frac{1}{2}$.

Para investigar nuestro problema podemos escoger indiferentemente uno o otro triángulo.

0.3 *Busca de los otros puntos. Primera conjetura.*

A primera vista no es fácil determinarlos, una idea es de ver como se comporta la razón r cuando nos alejamos del punto ω, centro del círculo circunscrito. De hacerlo al asar moviendo el ratón no nos da ideas donde podemos encontrarlos. Es conveniente de limitar el grado de libertad del punto P para tener una idea un poco mejor.

Comportamiento de la razón r cuando P recorre una circunferencia de centro ω :

Si rodeamos el punto P alrededor del punto ω, vemos que la razón r toma valores continuos cercas unos de otros. Trazamos un círculo de centro ω, y redefinimos el punto P como siendo un punto sobre la circunferencia. Moviendo P vemos que la razón r es constante. Modificamos el radio de la circunferencia y repetimos la experimentación : obtenemos el mismo resultado. Deducimos el teorema probable (conjetura visual) siguiente :

Conjetura A : *El valor de la razón r entre las dos áreas es constante sobre una circunferencia concéntrica al círculo circunscrito del triángulo dado.*

Nota : En este caso para mostrar que cuatro puntos son conciclicos, podremos mostrar que los triángulos podarias respectivos a un mismo triángulo espéc'ficos son de misma área.

Miramos como se comporta la razón r cuando modificamos el radio : alejandose del centro del círculo circunscrito esta razón disminuya y tienda a cero (¿ o casi ?), después crece cada vez más. ¡ Cuando la razón es casi nula, el círculo es casi el círculo circunscrito al triángulo inicial ! Conociendo la recta de Simson (o de Wallace), sabemos que la razón es nula en este caso : las proyecciones ortogonales de todo punto situado sobre el círculo circunscrito de los lados de un triángulo son colineados.

Este resultado que sabemos demostrar confortar nuestra conjetura.

Nota : Si notamos a, b, c, las proyecciones ortogonales de un punto P sobre los lados del triángulo ABC la razón de las áreas de los triángulos $A'B'C'$, ABC y abc, IJK son iguales. Tomando las áreas algébricas, el producto vectorial de dos vectores del plano es un escalar igual al área del paralelogramo definido por los dos vectores. Notando $r(P)$ la razón de las áreas de los triángulos considerados tenemos :

$$r(P) = \frac{\vec{Pa} \wedge \vec{Pb} + \vec{Pb} \wedge \vec{Pc} + \vec{Pc} \wedge \vec{Pa}}{\vec{\omega I} \wedge \vec{\omega J} + \vec{\omega J} \wedge \vec{\omega K} + \vec{\omega K} \wedge \vec{\omega I}}$$

Queda hacer el cálculo para encontrar las lineas de nivel de la función $r(P)$.

0.4 *Una otra experimentación. Secunda conjetura.*

La razón debe ser constante sobre las circunferencias concéntricas al círculo circunscrito. Para tentar de entender la situación modificamos el marco dado : inscribimos un triángulo ABC en una circunferencia de centro ω, aplicamos la macro "razón " al triángulo y a un punto cualquier. Moviendo el vértice A (se queda sobre la circunferencia) la razón es constante. Moviendo los otros vértices, tenemos el mismo resultado, eso independientemente de radio del círculo.
Deducimos el teorema probable :

Conjetura B : *El valor de la razón r entre las dos áreas dependen del radio del círculo circunscrito, del alejamiento del punto P al centro del círculo circunscrito, y no de la forma del triángulo o del área del triángulo.*

0.5 *Estudio de la variación en función del alejamiento al centro del círculo circunscrito.*

Para este estudio limitamos el grado de libertad del punto P poniendole sobre una recta que pasa por el centro del círculo circunscrito (este punto será un centro de simetría para los valores tomados por la razón r).

Vamos estudiar esta relación, la función, que existe entre la razón r y la distancia d del punto P al centro del círculo circunscrito ω. Para eso mostramos en la pantalla los ejes, y transferimos la distancia d sobre el eje de los x, y la razón sobre el eje de los y. Definimos una nueva macro "paralelogramo " que a tres puntos R, S, T da el punto U tal que el cuadrilátero $RSTU$ sea un paralelogramo (para construir el punto U tomamos el punto medio de los puntos R, T, y después el simétrico de S respectivamente a este punto medio).

Aplicamos esta macro a los puntos de coordenadas $(d, 0)$, $(0, 0)$, $(r, 0)$: obtenemos el punto M de coordenadas (d, r). Pedimos el lugar geométrico de este punto M cuando el punto P recorre la recta : tenemos el grafo a continuación (*cf fig.* 4), si necesario podemos pedir más puntos para el lugar. Queda estudiar este grafo (esta curva).

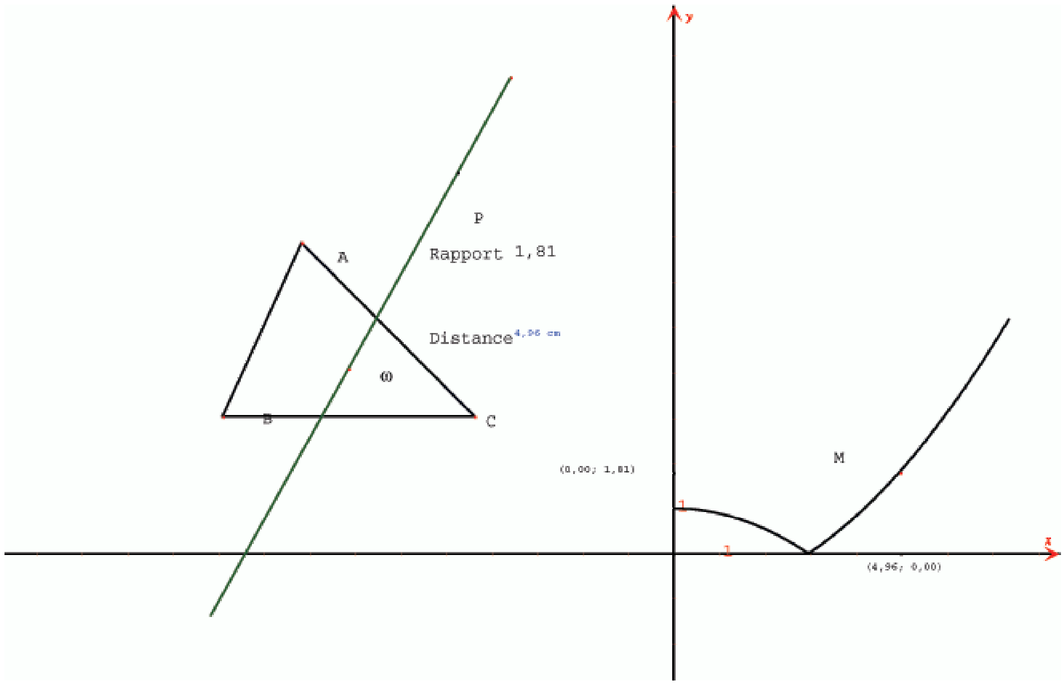

figure 4

El trabajo que hicimos previamente sobre un círculo concéntrico al circunscrito nos permite de decir que existe una simetría axial de eje el eje de los y ; la distancia es siempre un valor positivo (la parte que corresponde a la parte negativa de este valor no aparece). Podemos hacerla aparecer de la manera siguiente, sin utilizar la simetría axial de eje el eje de los y :

Definimos nuevos ejes tomando por origina el punto ω, por eje de las abscisas la recta recorrida por el punto P, y por eje de las ordenadas una recta cualquiera pasando por ω. Pedimos las coordenadas del punto P en este nuevo sistema de ejes, sea $(x, 0)$, y construimos como precedentemente sobre el sistema de ejes iniciales el punto N de coordenadas (x, d). Pedimos a Cabri de trazar el lugar geométrico del punto N cuando el punto P recorre la recta. Tenemos el grafo a continuación siguiente simétrico respectivamente al eje de las ordenadas :

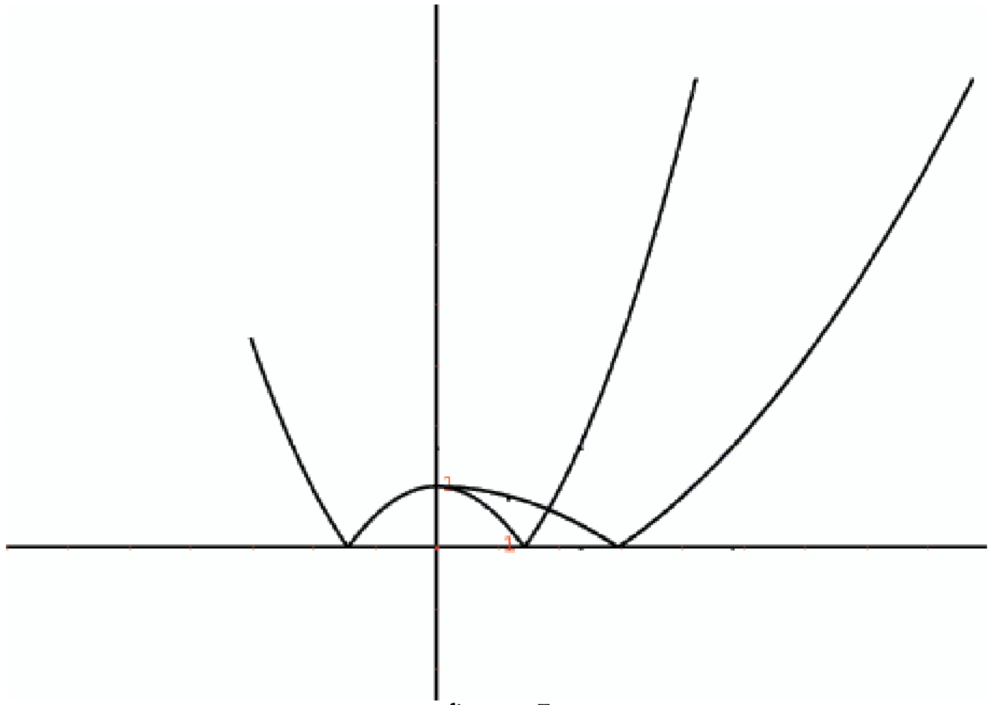

figure 5

Sobre la parte positiva, los dos grafos no se superponen porque Cabri calcula siempre con el mismo sistema de ejes (el que escogió el constructor), mismo si pública las coordenadas de un punto en cualquier sistemas de ejes. Para convencerse modificamos la posición del punto sobre la recta que define la unidad de las abscisas en el secundo sistema de ejes : el lugar geométrico del punto N se deforma y podemos, sobre la parte positiva hacerlo coincidir con el lugar del punto M.

0.6 *Cálculo del valor d que corresponde al valor de r igual a 1. Tercera Conjetura.*

i) Del punto $(0, 1)$ trazamos una paralela al eje de las abscisas y estimamos el valor correspondiente de d. Esta tentativa no nos da informaciones a más que cuando tentábamos colocar el punto P para tener la razón igual a 1 ; Cabri (el que tengo) no hace las intersecciones con los lugares geométricos.

ii) Podemos notar que el grafo es un grafo conocido : ¿ una parábola, o más bien el valor absoluto de una parábola ? Para confirmación tomamos la función "cónica " y escogemos cinco puntos sobre un ramo del lugar : la cónica se superpone al lugar. Hacemos de nuevo sobre el otro ramo, es lo mismo. Si acercamos el cursor, Cabri nos dice de escoger entre "este lugar " y "esta parábola ". Moviendo uno de los cinco puntos, quedándonos sobre el ramo, la cónica no se mueve y se superpone siempre al lugar. La cónica no depende de los puntos escogidos.

Pedimos las ecuaciones de las dos parábolas. La traducción geométrico-algebrica nos dice que pasamos de una a otra por una simetría axial de eje el eje de las abscisas : el grafo es el valor absoluto de una parábola. Para ser más seguro, podemos pedir a Cabri un punto del lugar que moveremos está sobre la cónica : ¡ Cabri nos dice que si, pero de vez en cuando nos dice que no ! ¿ Que pensar ? En las primeras versiones que testé, Cabri dice siempre no. El oráculo, la Pitia, depende del épsilon escogido por el constructor para la aproximación y del algoritmo utilizado, en función de la curva objeto.
Como no tenemos escolla (no tenemos una otra idea para seguir en nuestra investigación) y que conocemos las dificultades para obtener una parábola cuando definimos una cónica con cinco puntos libres vamos conjeturar :

Conjetura C : *la función que define la razón r en función de la distancia d es el valor absoluto de una parábola.*

0.7 *Determinación del lugar. Cuarta conjetura.*

Volvemos a la idea enunciada en $i)$: hacemos la intersección de la cónica con la recta, y pedimos las coordenadas del punto de intersección. De esta manera tenemos un valor numérico estable con Cabri, pero no nos hace entender mejor el problema.

Sabemos que la función buscada se anula en los puntos de abscisas $\pm R$, donde R es el radio del círculo circunscrito, y que toma el valor 1 en 0. Si esta función es realmente el valor absoluto de una parábola, las ecuaciones de estas parábolas son :

$$Y_1 = -\frac{1}{R^2}(X_1^2 \ - \ R^2) \ \text{ et } \ Y_2 = \frac{1}{R^2}(X_2^2 \ - \ R^2)$$

Eso nos permite de calcular el valor de d por el cual la razón es igual a 1. También tenemos una relación entre las distancias d_1 y d_2 tales que las razones sean iguales : $Y_1 = Y_2$ si y solamente si $X_1^2 + X_2^2 = 2R^2$, es decir si y solamente si $d_1^2 + d_2^2 = 2R^2$.

Este resultado es comprobado por Cabri mismo si pedimos el valor d con la aproximación máxima. Deducimos el teorema probable siguiente :

Conjetura D : *El lugar geométrico buscado es un círculo concéntrico al circunscrito, de radio $R\sqrt{2}$, donde R es el radio del circunscrito.*

Sostenimiento de nuestra conjetura

Para sostener nuestra conjetura **C**, vamos testarla sobre ejemplos donde los cálculos son fáciles de hacer y las relaciones métricas conocidas.

0.8 *Área definida por el centro del círculo inscrito.*

Notamos O el centro del círculo inscrito de un triángulo ABC, y D, E, F sus proyecciones ortogonales sobre los tres lados, R y R' los radios de los círculos circunscrito y inscrito respectivamente y S y s las áreas de los triángulos ABC y DEF.

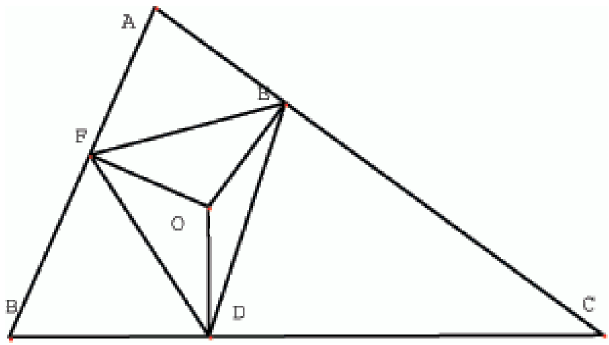

figure 6

Tenemos $2S = R'^2\,(\,sin\,A + sin\,B + sin\,C\,) = R'^2(\frac{p}{R}) = \frac{S\,R'}{R}$, donde $\frac{s}{S} = \frac{R'}{2R}$. Como la ecuación de nuestra parábola es igual a $Y = -\frac{1}{R^2}(X^2 - R^2)$, deducimos de las igualdades anteriores $\frac{R'}{2R} = \frac{R^2 - X^2}{4R^2}$ es decir $X^2 = R(R - 2R')$. Esta fórmula es une fórmula conocida entre la distancia de los centros inscrito y circunscrito de un triángulo en función de los radios de estos círculos.

Este trabajo nos da más confianza en nuestra conjetura, ademas de ver que el diámetro del círculo inscrito es menor que el radio del círculo circunscrito, y que son iguales si y solamente si el triángulo es equilátero.

0.9 *Punto de Lemoine.*

Bajo la hipótesis de nuestra conjetura, podemos calcular la distancia d entre el centro del círculo circunscrito y el punto de Lemoine, resultado poco conocido (?).

El punto de Lemoine para un triángulo de lados a, b, c se define como el punto cuyas las distancias x, y, z a los tres lados son entre ellas en la misma razón que los lados correspondientes [2].

Al número $2\,361$ del mismo libro F.G.M. prueba que el punto de Lemoine es el punto cuyo la suma de los cuadrados de las distancias a los tres lados es mínima.

De la relación $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, deducimos $\frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$, donde S es el área del triángulo dado. Si s designa la área del triángulo podaria, tenemos $\frac{s}{S} = \frac{12S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ (número n°2364 de F.G.M.). Utilizando la ecuación

[2] F.G.M., Exercices de Géométrie, n°103, $1\,920$, p. 46.

de la parábola tenemos $d^2 = R^2 - 3\left(\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$ donde R es el radio del triángulo dado.

Nota : Si nuestra conjetura es válida, tenemos una fórmula para la distancia del punto de Lemoine al centro del círculo circunscrito para un triángulo dado ; también para todo punto del plano el conocimiento de la razón de la área de su triángulo podaria al área del triángulo nos da la distancia de este punto al centro del círculo circunscrito en función del radio de este último círculo.

Notamos que para los tres otros puntos del plano del triángulo cuyos las distancias a los tres lados son entre ellas en la misma razón que los lados correspondientes, tenemos una fórmula análoga para expresar la distancia de estos puntos al centro del círculo circunscrito.

0.10 *Investigación analítica.*

Ahora tenemos suficientes elementos para empezar un estudio analítico : sabemos lo que tenemos que encontrar (con una buena probabilidad). Puede ser una buena ayuda para dirigir los cálculos : podemos escoger un sistema de ejes que los simplifica y permite de hacerlos. Una otra dirección es de consultar la bibliografía para saber si nadie hizo un trabajo sobre este problema, o un problema semejante.

He encontrado, después de una investigación histórica, el problema debajo la forma de las proyecciones ortogonales sobre los lados de un triángulo (*cf.* nota 2 del párrafo " Una etapa de observación ") ; La igualdad de la razón $\frac{1}{4}$ no fue tomada en consideración. Parece que podemos dar la paternidad de este problema a Lhuilier[3] :

– *Si de l'un quelconque des points d'une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés, l'aire du triangle dont les sommets seront les pieds de ces perpendiculaires sera constante. Si, en particulier, ce cercle se confond avec le premier, cette aire deviendra nulle ; c'est-à-dire qu'alors les pieds des trois perpendiculaires seront en ligne droite* ($\star$).
– *En outre, si deux cercles concentriques au cercle circonscrit sont tels que la somme des carrés de leurs rayons soit double du carré du sien, les triangles qui auront pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées des points des circonférences des dernier cercles sur les directions des côtés du triangle inscrit au premier seront équivalents.*

($\star$) *Ce cas particulier a déjà été démontré dans le présent recueil (tom.IV, p. 251)*

[3] Lhuilier, Théorème de Géométrie, Annales de Gergonne, tome XIV, $1\,823 - 1\,824$, p. 28.

En este mismo toma el problema fue resuelto por M. Querret (p. $280-285$) y por Sturm (p. $286-292$). La demostración de Querret es analítica y se puede traducir fácilmente como un cálculo vectorial (determinante). Querret toma un sistema de coordenadas rectangulares cuyo la origina es un vértice del triángulo dado. En este sistema los dos otros vértices son de coordenadas a, b, et a', b' respectivamente ; las ecuaciones de las rectas de los tres lados son :

$$b'X - a'Y = 0, \qquad bX - aY = 0, \qquad (b-b')(X-a)-(a-a')(Y-b) = 0$$

Para un punto P dado (de facto un punto interior) Querret calcula la distancia del punto a los tres lados, después el área de los tres triángulos determinando el triángulo cuyo los vértices son los pies de las perpendiculares ; después deduce k^2, el área de este último, y la ecuación en función de las coordenadas x y y del punto P :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm \frac{2c^2c'^2c''^2k^2}{(ab'-ba')^3}$$

donde α y β son las coordenadas del centro del círculo circunscrito y $c = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, $c' = \sqrt{a^2+b^2}$, y $c'' = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$.

Si R es el radio del círculo circunscrito y T el área del triángulo dado, Querret da la ecuación $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2 \cdot \frac{T \pm 4k^2}{T}$, y después los radios r y r' de dos círculos soluciones del problema : $r^2 = R^2 \cdot \frac{T-4k^2}{T}$, $r'^2 = R^2 \cdot \frac{T+4k^2}{T}$. Este último resultado demuestra el que habíamos conjeturado con Cabri, a saber las ecuaciones de las parábolas. Ademas Querret nota que la cuerda t del círculo cuyo el radio es igual a R, tangente al círculo cuyo el radio es igual a r, es igual a la cuerda t' del círculo cuyo el radio es r', tangente al círculo cuyo el radio es igual a R. Si α, α', α'', son los ángulos del triángulo dado, Querret encuentra :

$$k^2 = t^2 \cdot \frac{Sin.\alpha}{2} \cdot \frac{Sin.\alpha'}{2} \cdot \frac{Sin.\alpha''}{2} = t'^2 \cdot \frac{Sin.\alpha}{2} \cdot \frac{Sin.\alpha'}{2} \cdot \frac{Sin.\alpha''}{2}$$

La demostración dada por Sturm es basada sobre las relaciones métricas del triángulo, esencialmente las relaciones trigonométricas que dan el valor de la área y del radio circunscrito ; como Querret, Sturm toma un punto interior y deja al lector los otros casos de figura.

Si α, β, γ, son los ángulos del triángulo dado, r el radio del círculo circunscrito x, y las coordenadas del punto P correspondientes a los dos lados de ángulo γ tomado como ejes de coordenadas, y k^2 el área del triángulo cuyo vértices son los pies de las perpendiculares sobre los lados bajadas de P, Sturm encuentra la ecuación siguiente :

$$r^2 - \frac{k^2}{Sin.\alpha Sin.\beta Sin.\gamma} =$$

$$\left(x - \frac{rCos.\beta}{Sin.\gamma}\right)^2 + \left(y - \frac{rCos.\alpha}{Sin.\gamma}\right)^2 + 2\left(x - \frac{rCos.\beta}{Sin.\gamma}\right)\left(y - \frac{rCos.\alpha}{Sin.\gamma}\right)Cos.\gamma$$

Eso demuestra que para todo valor de k tenemos la ecuación de un círculo, y si $k = 0$ es la ecuación del círculo circunscrito ; ademas si el área es nula, Sturm prueba que los puntos proyectado son alineados, y para todo k, que los lugares buscados son circunferencias concéntricas al círculo circunscrito. Entonces Sturm encuentra los resultados de Querret, y yendo más allá en su investigación, proyectando el punto P siguiendo oblicuas haciendo ángulos constantes, encuentra que el lugar geométrico de los puntos tales que las áreas de los triángulos cuyo los vértices son las proyecciones oblicuas es una circunferencia concéntrica al círculo circunscrito.

Después generalizando el problema tomando un polígono Sturm afirma, dando una idea como demostrarlo, que el lugar es una linea de secundo orden.

Unos 40 años más tarde el problema reaparece : se puede pensar que su fuente se perdió. Números matemáticos lo trabajaron, pero las demostraciones que dieron fueran pocas diferentes entre ellas en sus esencias. Por otro lado puede ser interesante de compararlas para estudiar las diferentes prácticas de la geometría analítica de esta época en relación a la visión geométrica y de las traducciones en geometría analítica (o cálculo algébrico) y en geometría sintética. Dentro de estos numerosos autores citamos entre otros Briot y Bouquet[4], M. Combette[5], A. Duporcq[6], M. F. Stordeur[7], por lo que esas soluciones traen comprensión o tecnicismo.

El trabajo hecho por M. Combette me parece el más rico, voy contar los elementos esenciales. M. Combette situa el problema en el espacio para un polígono (plano) debajo de la forma de las proyecciones ortogonales sobre cada lado. Vamos a relatar solamente la parte plana. Los lugares encontrados para un valor constante de la área del polígono construído son circunferencias de mismo centro. Tomando su texto :

Je prends l'équation de la droite sous la forme

$$x\,cos\,\alpha + ysin\,\alpha - p = 0$$

dans un repère orthonormé, (p) représentant la distance de l'origine à la droite, et (α) l'angle que fait cette perpendiculaire avec les (x) positifs ; cet angle devant être toujours compté dans le sens de la flèche.

Sous cette forme, la distance (δ) d'un point quelconque (x, y) à la droite s'exprime simplement au moyen de la formule

$$\delta = \pm\,(x\,cos\,\alpha + ysin\,\alpha - p),$$

[4] Briot et Bouquet, Leçons de Géométrie analytique, 13^e édition.

[5] M. Combette, Etude d'un lieu géométrique, Revue des sociétés savantes, tome V, 1 870, p. $203 - 233$.

[6] A. Duporcq, Aire polygonale, Intermédiaire des mathématiciens, 1 898, p. $166 - 167$, n°1 232.

[7] M. F. Stordeur, Question 1 174, p. $470 - 471$.

avec la convention de prendre le signe $(+)$ si le point et l'origine sont de côtés différents de la droite, et le signe $(-)$ dans le cas contraire.

Dans tout ce qui va suivre, je représente symboliquement par (α) la quantité $(x\, cos\, \alpha + y sin\, \alpha - p)$.

Ceci posé, je considère un polygone plan quelconque, et je désigne les équations de ses côtés par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad , \gamma = 0, \ldots, \quad \omega = 0,$$

et par A l'angle formé par les côtés .... $\alpha = 0, \quad \beta = 0,$
par B l'angle formé par les côtés .... $\beta = 0, \quad \gamma = 0,$

par O l'angle formé par les côtés .... $\omega = 0, \quad \alpha = 0,$
Dans ces hypothèses, la fonction

$$\alpha\beta\, sin\, A\, + \beta\gamma\, sin\, B\, + \ldots + \omega\alpha\, sin\, O,$$

dans laquelle (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque, par exemple, intérieur au polygone, représente précisément le double de l'aire (σ) du polygone a, b, c, d,...o. Par suite, l'équation du lieu des points pour lesquels σ a la même valeur est

$$(1) \qquad \alpha\beta\, sin\, A\, + \beta\gamma\, sin\, B\, + \ldots + \omega\alpha\, sin\, O = 2\sigma$$

... Je vais démontrer que généralement l'équation (1) représente une circonférence.

Para hacer eso, M. Combette demuestra que los coeficientes de x^2 y de y^2 son iguales haciendo la diferencia entre ellos, y que el coeficiente de xy es nulo. Lo que le permite de constatar que todas las circunferencias tienen el mismo centro.
Notas :

1°) Este cálculo es esencialmente el que habíamos notados en nuestra conjetura A.

2°) M. F. Stordeur nota que lo diferida entre esta ecuación y la ecuación del círculo circunscrito es una constante igual a 2σ. Deduce de este que el lugar es una circunferencia concéntrica al círculo circunscrito.

Más allá en el articulo de M. Combette encontramos el mismo resultado proyectando el punto relativamente a una misma dirección sobre los lados del polígono ; la ecuación de la parábola da la razón como siendo igual a $\pm \frac{R_1^2 - R^2}{4R^2\, sin^2\, \phi}$.

El estudio que M. Combette hace para el triángulo demuestra lo que habíamos conjeturado con Cabri : **nuestros resultados son probados.**

Continuando el artículo, tenemos una generalización considerando las proyecciones ortogonales de un triángulo y de su círculo circunscrito sobre un plano : el círculo se proyecta en una elipse, el triángulo en un triángulo, y las rectas perpendiculares a los lados a, b, c del triángulo en paralelas a las direcciones conjugadas de los lados... Entonces, si un triángulo es inscrito en una elipse, y si por un punto cualquier de esta curva trazamos unas paralelas a las direcciones conjugadas de los lados, los tres pies serán alineados, y la elipse será el lugar geométrico de los puntos teniendo esta propiedad.

Tenemos más, considerando una circunferencia concéntrica a la primera, su proyección será una elipse concéntrica y homotética a la primera, y la área del triángulo teniendo como vértices los pies de los conjugados de los lados trazados por un punto cualquier de esta elipse será constante.

Para acabar el estudio de este problema, M. Combette da relaciones métricas deducidas de la ecuación de la parábola : a saber la distancia del centro del círculo circunscrito a los centros de los círculos inscrito y ex-inscrito, el valor del radio del círculo circunscrito en función de los radios de los círculos inscrito y ex-inscritos, la distancia del ortocentro al centro del círculo circunscrito, al centro inscrito y a los centros de los ex-inscritos. M. Combette deduce también una propiedad menos conocida del círculo de los nueve puntos : el círculo de Euler es tangente al círculo inscrito y a los tres círculos ex-inscritos.

0.11 *Conclusión.*

La investigación que acabamos de relatar es una investigación donde la álgebra y la geometría no son dos campos distintos, pero campos que hacen parte de un mismo corpus : es una manera de ver y de hacer que estaba reservada hasta el siglo pasado a los matemáticos confirmados, y que ahora con el ayuda de un software como Cabri se puede concebir en el secundario, sobre ejemplos que no son necesariamente ejercicios de escuela. Los pasajes geometría-álgebra, álgebra-geometría piden para ser pensado en su cabeza (según la expresión que estaba en uso) por lo menos maduración, práctica, competencias técnicas ; no era concebible, y no lo es aún, de pedir a un alumno de trazar a la regla y al compás un número suficiente de puntos de un lugar (otro que un círculo o una recta) para tener una idea del lugar, o de dejar el problema completamente abierto como lo tomamos, sin un bagaje de geometría sintética y/o analítico suficiente, bagaje que se obtiene solamente a partir de una cierta edad.

Aquí el software nos permitió de visualizar una propiedad que habíamos percibido (?) sobre un ejemplo dado, ejemplo que pudimos deformar para ver la solidez de nuestra hipótesis. De esta manera pudimos validar o invalidar conjeturas como lo hace un físico (lo hacemos de buena gana porque la validación no pide mucha energía y la respuesta es de inmediato), haciendo observaciones numéricas o no sobre dibujos virtuales, idas y vueltas álgebra geometría y teniendo una inteligencia de la situación sin el socorro de la prueba matemática, prueba que tendremos que dar para tener la certeza absoluta.

Entonces cuando entraremos en la busca de una prueba tendremos una comprensión intuitiva, sabremos lo que tendremos “con derecho " que encontrar con un cierto grado de confianza, y sobre que ideas tendremos que adelantar. Si tenemos que hacer cálculos, estos cálculos no serán echo a ciegas, serán pensados y hechos hacia un objetivo que pensamos conocer. Recordamos que en geometría analítica el único momento de libertad que tenemos es la escolla de los ejes. Este trabajo inicial puede ser una buena herramienta para esa escolla.

Si miramos con distancia nuestra investigación y sus diferentes etapas, hicimos al inicio una observación, un poco como un ciego (es Cabri, que hacía los cálculos, mas para eso nuestras construcciones no eran echas “al ojo " eran echas a la regla y al compás de Cabri). Eso nos permitió de conjeturar unos resultados que pudimos probar (el centro del círculo circunscrito hace parte del lugar buscado). Después ensanchamos el problema : en lugar de buscar una razón igual a 1, buscamos, estudiamos la relación entre la razón y la posición del punto P del plano limitando el grado de libertad para controlar mejor la situación. Pudimos enunciar conjeturas, y utilizar la función lugar de Cabri para pasar en geometría analítica. Los resultados algébricos que deducimos de este cambio de marco nos permitió de determinar, de conjeturar el lugar buscado.

En resumen, hemos emitidos hipótesis, hemos hechos como si eran probadas, lo que nos permitió de encontrar otros resultados, resultados que pudimos confrontar sobre ejemplos. La validación nos dio fe en nuestras hipótesis, y nos permitió ir más allá en nuestra gestión. Hemos realizados una demostración “con huecos "; como el corazón de nuestra demostración era la ecuación de la parábola, hemos testado la solidez de esta última conjetura utilizándola para encontrar resultados conocidos.

Quedaba dar la prueba formal, lo que hizo nuestra investigación histórica.

0.12 *Para ir más lejos.*

El estudio hecho por M. Combette para un polígono cualquier muestra que el lugar es siempre un círculo : la parte final de su artículo es consagrada al caso de un cuadrilátero. Vamos testar sus resultados algébricos con Cabri, para validarlos experimentalmente y visualizarlos.

En el caso de un cuadrilátero para determinar el centro de las circunferencias, curvas que definen los lugares geométricos buscados, M. Combette estudia la ecuación de la curva cuando la constante $\sigma = 0$, es decir cuando el área del cuadrilátero definido por las proyecciones ortogonales es nula (de facto esta curva es similar a la propiedad que tenemos para el círculo circunscrito de un triángulo).

Para un cuadrilátero convexo cualquier $ABCD$ notamos θ y ω las intersecciones de las rectas BC, AD et AB, CD respectivas. Los puntos θ et ω verifican trivialmente las ecuaciones : hacen parte de los puntos de este lugar. Queda encontrar un otro punto del lugar. El punto de Miquel es el candidato apropiado : es el único punto del plano tal que sus cuatro proyecciones sobre los lados del cuadrilátero son alineados (se puede probar fácilmente utilizando el teorema de los ángulos inscritos). Para construirlo trazamos los cuatros círculos circunscritos a los cuatros triángulos θAB, θCD, ωAD, ωBC, definidos por el cuadrilátero completo $ABCD\theta\omega$: estos círculos son concurrentes en un punto G, punto de Miquel que es un tercero punto del lugar (y el único bajo esta forma).

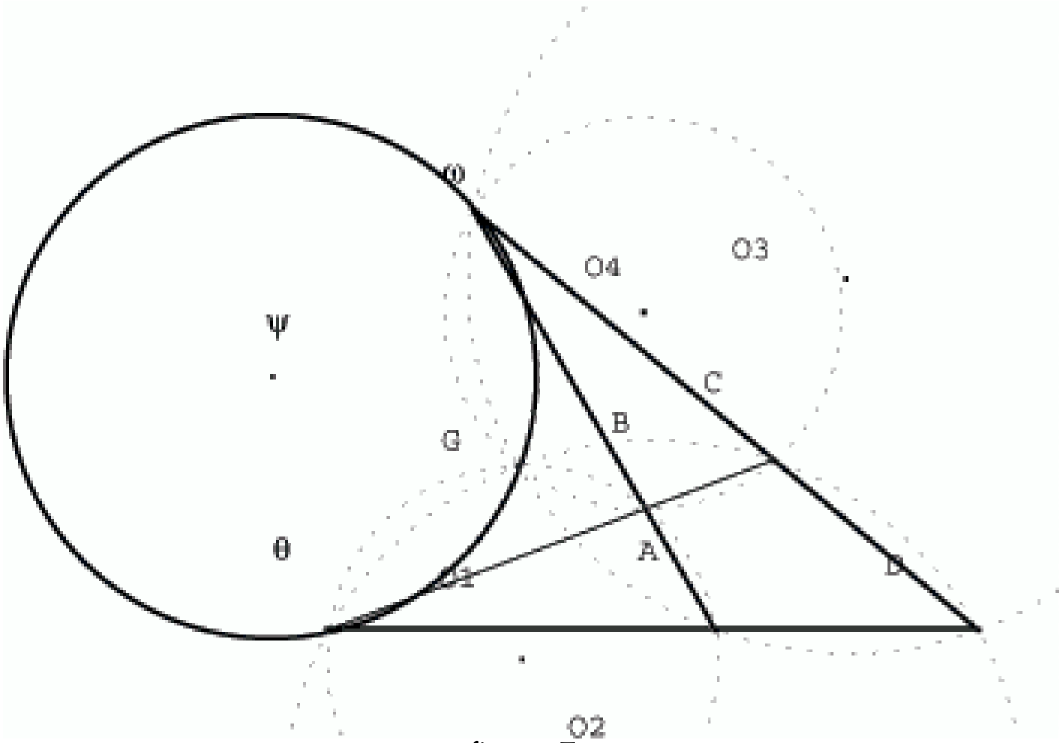

figure 7

Si notamos O_1, O_2, O_3, O_4, los centros respectivos de estos círculos, el centro ψ de las circunferencias buscadas se encuentra a la intersección de las rectas O_1O_2 et O_3O_4 (son mediatices de los segmentos θG y ωG). Para acabar el estudio general (M. Combette vio que había casos de figuras, y estudió solamente uno : el cuadrilátero obtenido por las proyecciones ortogonales no es cruzado. Él afirma que, si es el caso, tenemos resultados semejantes utilizando áreas negativas), M. Combette da la ecuación de los rayos de los círculos buscados :

$$R_1^2 = R^2 + \frac{\sigma}{2\sin(A+D)\cos(D+C)\cos(D+B)}$$

Si el cuadrilátero $ABCD$ es inscribible el lugar se reduce a una recta, y en el caso que la área es nula es la tercera diagonal del cuadrilátero completo, lo que era previsible : los puntos G, θ, ω son alineados.

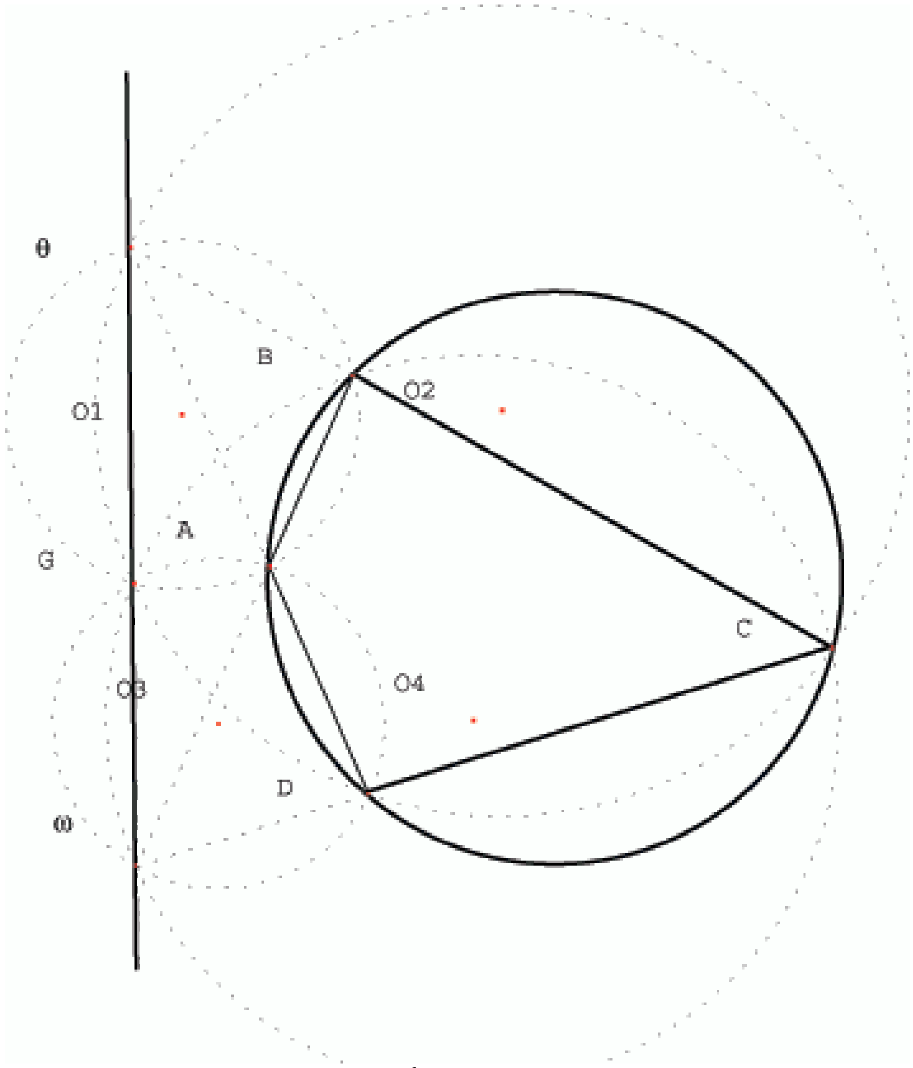

figure 8

Si el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio, el lugar es una recta también, esta recta es la tangente comuna a los dos círculos que definen el punto de Miquel G.

Si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, la razón de las áreas es constante entre las dos bandas definidas por los lados del paralelogramo ; para M. Combette este lugar no existe (no lo mencionó).

Visualización de los resultados :

Trazamos el círculo de centro ψ pasando por los puntos G, ω, θ y para un punto P sobre esta circunferencia aplicamos la macro "razón " (similar a la macro "razón " de un triángulo) : la razón no es nula, cambia con la posición del punto P sobre la circunferencia. Es nulo solamente en los puntos θ, G, ω. Tomamos otra circunferencia de mismo centro que corta los lados del cuadrilátero. Para un punto sobre la circunferencia aplicamos de nuevo la macro " razón " : la razón no es constante, menos en las lúnulas definidas por el punto de Miquel donde. Si aplicamos la macro "razón-cuadrilátero " vemos que fuera de las lúnulas el cuadrilátero es cruzado y dentro no lo es.

Un estudio más profundizado muestra que podemos extender estas porciones de circunferencias en algunos casos. Si utilizamos áreas negativas, vemos que el resultado queda valido para toda la circunferencia.

Determinación del lugar cuando la razón es igual a 1 :

Un estudio al ojo de la circunferencia deseada (el centro es en ψ) no nos da ninguna información sobre el radio. Vamos estudiar el problema sobre ejemplos particulares donde será más fácil de contestar para tener una idea.

El cuadrilátero es un trapecio :

Los lados BC et AD son paralelos : el punto ω es rechazado al infinito, y la recta, lugar buscado del punto P, es paralela a la tangente comuna de los círculos pasando por P. Trazamos una recta paralela a esta recta y para un punto P, situado sobre esta recta, aplicamos la macro “razón ". Buscamos la posición de esta recta para que la razón sea igual a 1, para una región adecuada del plano : después de una observación rápida, esta recta parece pasar por el punto medio de O_1O_2.

Trazamos la mediatriz de O_1O_2, y redefinimos el punto P como un punto de esta mediatriz : la razón es igual a 1 sobre dos segmentos de esta recta, que no son definidos por lúnulas.

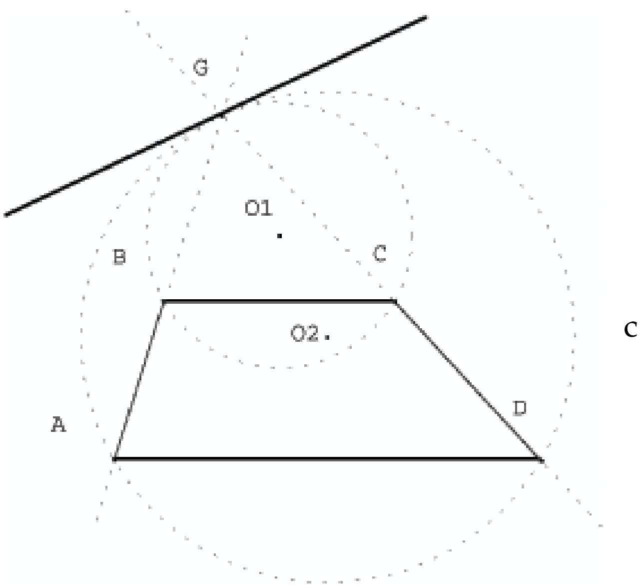

figure 9

El cuadrilátero $ABCD$ es cualquier :

Para tentar de determinar un punto de la circunferencia buscada, podemos determinar el punto E tal que los puntos $(O_1,\ O_2,\ \psi,\ E)$ hacen una división armónica (cuando el cuadrilátero tiende a ser trapecio, el punto E tiende a ser el punto medio de O_1O_2). Si trazamos el círculo de centro ψ pasando por E y si definimos el punto P como un punto del círculo, la razón no es igual a 1.

El cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero inscribible :

Inscribimos en un círculo un cuadrilátero $ABCD$, construimos su punto de Miquel G y trazamos la recta $\theta G\omega$. Reiteramos la experimentación que hicimos con el trapecio : la recta parece pasar por los puntos medios de los segmentos O_1O_2 y O_3O_4. Ademas el cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ parece ser un trapecio isósceles.

Una validación con Cabri nos dice que el lugar buscado es la mediatriz de los segmentos O_1O_2 et O_3O_4 ; eso confirma nuestra opinión sobre el cuadrilátero de los centros.

Secundo ensayo : el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero cualquier :

Varios ensayos basados sobre una razón armónica dieron nada, una observación más pensada de la configuración tiene que ser hecha cuando el cuadrilátero es inscribible.

El cuadrilátero de los centros $O_1O_2O_3O_4$ es, según Cabri, un trapecio isósceles, es decir inscribible. Una idea es de ver a que condiciones el cuadrilátero de los centros es inscribible. Tomamos un cuadrilátero cualquier, trazamos las mediatrices de los segmentos O_1O_2, O_3O_4 : se cortan al punto F. Trazamos el círculo de centro F pasando por O_1 (y O_2) : ¡ para Cabri este círculo pasa por los puntos O_3, O_4 y G !

Una conciclícidad :

Este resultado es interesante por si mismo : una tentativa de validación se necesita antes de seguir nuestra investigación.

Teorema : *El punto de Miquel de un cuadrilátero completo, y los cuatro centros de los cuatro círculos circunscritos a los triángulos definidos este cuadrilátero, son situados sobre una misma circunferencia.*

Este resultado es clásico : es el círculo de Miquel del cuadrilátero que acabamos de encontrar y se prueba utilizando ángulos de rectas.

De nuevo el secundo ensayo :

Tomamos un punto P sobre un círculo de centro ψ, aplicamos la macro “razón " y modificamos el radio del círculo para que la razón sea igual (al ojo) a 1. Esta observación no es tanto fácil : tenemos demasiadas curvas. Utilizando la herramienta “ocultar/mostrar " borramos los círculos que utilizamos para construir el punto de Miquel y las rectas dibujadas en nuestra investigación basada sobre la razón armónica. Una idea es de ver como podemos utilizar el círculo de Miquel. Notaremos O su centro.

Al inicio es mejor de hacer testes simples : por eso tentamos el círculo de diámetro ψO. ¡ Este círculo con el círculo que da la razón 1 (al ojo) y el círculo de Miquel parecen concurrentes !

Redefinimos el círculo que da la razón 1 (al ojo) como el círculo de centro ψ pasando por M, punto de intersección del círculo de Miquel y el círculo de diámetro ψO. La razón dada por Cabri es 1 con toda las decimales que querremos, y eso modificando también el cuadrilátero. Cabri afirma :

Conjetura E : *Para un cuadrilátero, el lugar de los puntos del plano tales que las áreas son iguales es contenido en el círculo de centro ψ, pasando por el punto de intersección del círculo de Miquel y del círculo de diámetro ψO.*

Si queremos todo el círculo tenemos que utilizar áreas negativas para integrar el caso del cuadrilátero cruzado.

Conclusión

El inicio de la investigación sobre el cuadrilátero fue de visualizar los resultados de geometría analítica dados por M. Combette, quién había visto ciertas límites a sus cálculos, límites sobre las cuales pasó rápidamente. Hemos podido entenderlas (cuadrilátero cruzado o no) y seguir nuestra investigación sobre el problema análogo al triángulo. Exploramos unas configuraciones particulares para ver si en estos casos podíamos concluir (trapecio, cuadrilátero inscrito). Buscamos una solución en estos casos para tentar de tener una idea en el caso general.

Los diferentes caminos ensayados en la experimentación y la observación, nos permitieron de hallar de nuevo un resultado interesante por si mismo : el círculo de Miquel y la conciclicidad de cinco puntos. Este último resultado, nos permitió de resolver con Cabri el problema. Nos queda a dar la prueba formal. Mas vamos parar aquí y dejar el lector seguir…

Cabri nos facilitó idas-y-vueltas álgebra geometría, lo que hacia los geómetras confirmados, con validación visual o calculatoria, y nos permitió de entender mejor nuestra configuración. El aporte suplementaria de las construcciones *via* Cabri permite de concebir la figura y de hacerla variar. Nuestra manera de investigación hechas de experimentaciones, de observaciones, de demostraciones geométricas y/o analítica, fue más dinámica que lo que haríamos podido hacer en el único marco del papel-lápiz. Hemos hecho como si sabíamos, y fuimos más allá para confirmar o anular hipótesis observando o confrontandolas a resultados conocidos ; eso nos dio una inteligencia de la situación y nos permitió de resolver más fácilmente el ejercicio propuesto. Desarrollamos nuestro sentido de observación y lo utilizamos. La conjugación de la visión y del pensamiento acelero la percepción para aprehender mejor la situación.

Para el placer

Damos aquí unos resultados relativos a nuestro estudio, resultados que probamos o no. En este último caso Cabri nos dijo que eran buenos… ¿ realmente ?

1) Consideramos O_i para $i = 1, \ldots, 4$ cuatro puntos de una circunferencia. Para todo punto G de esta circunferencia existe un cuadrilá-

tero tal que el punto G es su punto de Miquel y la circunferencia su círculo de Miquel ;

Para determinarle basta trazar los círculos de centros O_i pasando por G.

2) El cuadrilátero es inscribible si y solamente si los puntos O_i hacen un trapecio isósceles ;
3) Los lugares geométricos de los puntos que definen los vértices del cuadrilátero cuando el punto G recorre la circunferencia son circunferencias iguales entre ellas y iguales a la circunferencia dada. Cada una de ellas pasa por dos puntos O_i ;
4) Los centros de las circunferencias se deducen entre ellos dos a dos por una simetría central ;
5) El ángulo formado por las rectas AB, y CD es igual al ángulo inscrito interceptando el arco de los centros de los círculos circunscritos a los triángulos $AB\theta$ et $CD\theta$. Tenemos un resultado similar para el ángulo de las rectas BC y AD ;
6) Encontramos de nuevo estos ángulos, o sus suplementarios, considerando los triángulos formados por los centros de las circunferencias, lugar de los puntos de los vértices del cuadrilátero completo, cuando el punto G recorre la circunferencia dada ;
7) Los ángulos formados por las rectas AO_2, $A\omega$ y AO_4, $A\omega$ son constantes (la recta AT pasa por un punto fijo) ;
8) El ángulo de las rectas $G\theta$ et $G\omega$ es constante cuando el punto G recorre el círculo dado : es el suplementario del ángulo de las rectas O_1O_2 et O_3O_4 que define el punto ψ ;
9) El lugar geométrico de los puntos tales que el cuadrilátero obtenido por las proyecciones ortogonales del punto sobre los cuatros lados es de área igual a la cuarta parte del área de un cuadrilátero dado, es un círculo si consideramos la familia de los cuadriláteros teniendo el mismo círculo de Miquel con los cuatros centros O_i.

Dejamos al lector probar o negar esas aserciones.