

Chercher avec Cabri.

Michel Carrat.

12.1 Introduction.

Dans cet article je me propose, à travers la résolution d'un exercice, de montrer comment un logiciel comme Cabri permet de comprendre, grâce à l'environnement mathématique qu'il génère, une situation géométrique, est une aide à sa résolution et à la validation des résultats obtenus.

L'utilisation d'un instrument lorsqu'on fait de la géométrie, ou plus généralement des mathématiques, demande d'avoir une connaissance des caractéristiques de l'instrument utilisé ; avec les instruments issus des nouvelles technologies, cette connaissance se double de celle d'une philosophie sous-jacente induite, consciemment ou inconsciemment par le constructeur, du logiciel que l'on veut utiliser.

Les géomètres ont toujours été conscients que les outils utilisés dans leur activité jouent un rôle dans leurs modes de fonctionnement, leurs savoirs-faire. Plus encore, les compétences mathématiques ne sont pas nécessairement les mêmes : on n'a pas les mêmes heuristiques de procédures et les mêmes validations si on fait de la géométrie à la règle et au compas, ou à la règle et à l'équerre, ou au compas seul, etc.

L'objet de cet article n'étant pas de présenter les qualités, les avantages ou les inconvénients de Cabri, je me contenterai d'énoncer deux caractéristiques essentielles de ce logiciel, caractéristiques qui permettent de faire de la géométrie "dans le prolongement de la main" comme certains ont

coutume de dire, mais plus encore. Ceci vaut aussi pour la règle et le compas, et comparer ce que ces deux technologies ont en commun à travers la lecture des éléments d'Euclide, permettrait de voir Cabri autrement qu'à travers le prisme de l'ordinateur.

Le logiciel Cabri est basé sur le dessin et le numérique : ceci a pour conséquences qu'il ne démontre pas (même s'il calcule avec une très bonne approximation sur la situation que l'on voit à l'écran : le nombre de chiffres après la virgule affiché est de quinze (valides ?)), et que pour utiliser la caractéristique dessin avec l'ergonomie attenante, il nous faudra développer notre faculté à voir et à construire avec les fonctions de Cabri qui sont, si on n'utilise pas la calculatrice, essentiellement celles induites par les constructions à la règle et au compas point à point. Ceci est un très bon atout pour l'apprentissage de la géométrie, car pour voir et reconnaître dans le contexte où on cherche, il faut connaître déjà, c'est-à-dire avoir vu dans d'autres contextes. Notons qu'une difficulté pour l'enseignant sera d'expliquer aux élèves l'intérêt de la démonstration, vu les performances de ce logiciel, d'où un questionnement sur le rôle de la démonstration, qui est aussi de comprendre, et ses heuristiques.

12.2 Premières observations et énoncé de l'exercice.

Exercice proposé :

Soient un triangle ABC et un point P de son plan. On note A', B', C' les symétriques de P par rapport aux côtés $BC, AC, et AB$ du triangle. Trouver le lieu géométrique des points du plan tels que l'aire du triangle $A'B'C'$ soit égale à celle du triangle ABC .

L'exercice, du moins sous cette forme, n'est pas un exercice classique ce qui fait que l'on se trouve un peu désarmé, un peu comme des élèves devant certains exercices que nous leur proposons. C'est cette situation qui va nous guider dans la recherche de cet exercice, nous essaierons de garder un "regard naïf" le plus longtemps possible, avant que d'utiliser des compétences mathématiques dites supérieures au temps jadis.

Une étape d'observation.

Dessignons, avec Cabri, un triangle ABC (cf fig. 1), prenons un point P et à l'aide de la fonction "symétrique" construisons le triangle $A'B'C'$. Pour mieux comparer les aires, avec l'outil calculatrice faisons le rapport r des aires des triangles $A'B'C'$ et ABC . Positionnons le point P pour que ce rapport r soit égal à 1.

Sur la position trouvée, on constate que le point P est unique, par contre si on s'éloigne du triangle, il apparaît que ce rapport diminue puis croît "indéfiniment", et ce dans toutes les directions en partant du triangle ABC .

Nous remarquons dans cette démarche que le plus souvent en géométrie on commence à chercher près de l'objet sur lequel on travaille, puis on s'en éloigne de plus en plus.

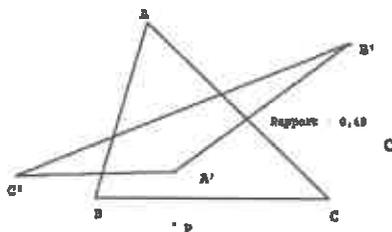


figure 1

Notre premier constat est que le lieu se compose d'un point particulier, dans ou proche du triangle ABC , et de points dans toutes directions assez éloignés du triangle.

Détermination de ce point :

Dans un premier temps, il convient de se rendre compte visuellement si le point P est ou n'est pas un point connu (s'il ne l'est pas, il nous faudra utiliser une autre stratégie). Sur un seul triangle cela paraît une gageure, car la valeur du rapport dépend de la position du point par rapport au triangle choisi. Si on modifie la position d'un sommet du triangle initial, on repositionne le point P pour que le rapport r soit égal à 1, mais ce faisant, on perd le dessin initial. Le mieux est de considérer plusieurs triangles ABC sur une même feuille, et de voir pour chacun d'eux où se trouve ce point.

Pour ne pas refaire cette construction, on fait une macro. Dans le cas présent, je suggère deux macros que j'appellerai "rapport" et "rapport-triangle" dont les objets initiaux sont le triangle ABC et le point P , et les objets finaux sont pour la première le rapport r , et la deuxième le rapport r et le triangle $A'B'C'$.

Sur l'écran (cf fig. 2) considérons plusieurs triangles ABC et appliquons à chacun d'eux la macro "rapport". Comme il est plus facile de reconnaître des points particuliers sur des triangles que nous connaissons que sur des triangles quelconques, modifions ces triangles de telles sortes qu'un soit rectangle, un autre soit équilatéral, un autre soit isocèle avec un angle assez aigu, un autre avec un angle obtus. Pour chacun d'eux positionnons correctement le point P .

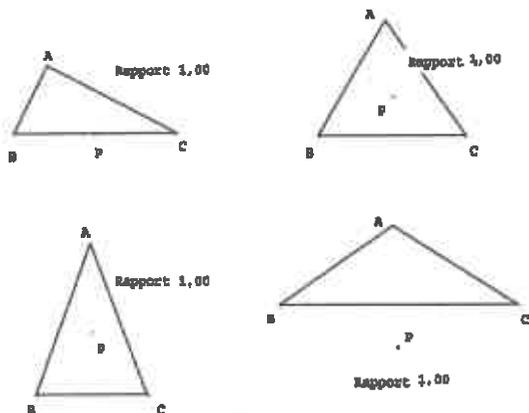


figure 2

Par élimination successive des points connus et possibles, milieu du côté opposé à l'angle le plus grand, centre de gravité, centres des cercles circonscrit et inscrit, orthocentre, etc il ne reste comme possibilité que le centre du cercle circonscrit.

Validation par Cabri :

Tracer le centre ω du cercle circonscrit d'un triangle quelconque, redéfinir le point P comme étant le point ω avec la fonction "redéfinir un point" : le rapport est égal à 1 même si on demande plus de chiffres après la virgule. Pour Cabri le point ω , centre du cercle circonscrit est un point du lieu quelque soit le triangle considéré.

Démonstrations :

1°) En utilisant les cas d'égalités des triangles, il est aisé de montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux : ils ont même aire.

2°) Notons ω' le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$. Les points ω et ω' avec les sommets des triangles ABC , $A'B'C'$ sont les sommets d'un cube vu en perspective cavalière. Ces triangles se situent sur des plans parallèles et se déduisent l'un de l'autre par la symétrie centrale de centre le centre du cube (le milieu de AA'). Ces triangles sont égaux : ils ont même aire.

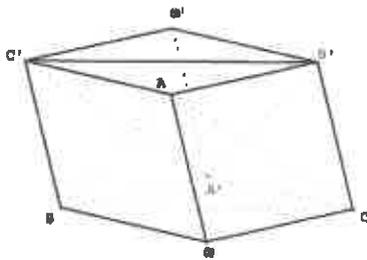


figure 3

3°) Les projections orthogonales a, b, c du point ω sur les côtés du triangle

initial sont les milieux I, J, K des côtés du triangle ABC : l'aire du triangle IJK est le quart de celle du triangle ABC . Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.

Notes :

1. Une démonstration suffit pour prouver le résultat, mais plusieurs démonstrations peuvent apporter un autre regard et donner une meilleure intelligence de la situation. Dans ce cas, il n'en est rien pour les autres points.
2. Pour tout point P du plan, si on considère les projections orthogonales sur les côtés du triangle, le triangle obtenu, appelé triangle podaire, est homothétique du triangle $A'B'C'$ dans le rapport $\frac{1}{2}$.

Pour la recherche de notre problème, on pourra choisir indifféremment l'un ou l'autre triangle.

12.3 Recherche des autres points. Première conjecture.

Comme il n'apparaît pas facile de déterminer les autres points, l'idée est de regarder le comportement du rapport r lorsqu'on s'éloigne du point ω centre du cercle circonscrit. De faire ceci au hasard du déplacement de notre souris (on voit que r diminue vers zéro puis croît), ne donne pas d'idée sur la position des points cherchés. Il convient de limiter le degré de liberté du point P pour se forger une idée plus précise.

Comportement du rapport r lorsque P parcourt une circonférence de centre ω :

Si on promène le point P autour du point ω , on voit que le rapport r prend des valeurs continues proches les unes des autres. Traçons un cercle de centre ω , et redéfinissons le point P comme un point sur ce cercle. Si on fait parcourir au point P cette circonférence on voit que le rapport r est constant. Modifions le rayon de cette circonférence et recommençons : il en est de même. On en déduit le théorème vraisemblable (conjecture visuelle) suivant :

Conjecture A : *La valeur du rapport r entre les deux aires est constante sur une circonférence concentrique au cercle circonscrit du triangle donné.*

Note : Dans ce cas pour montrer que des points sont cocycliques, on pourra montrer que leurs triangles podaires respectifs par rapport à un même triangle sont de même aire.

Regardons le comportement du rapport r lorsqu'on modifie le rayon de ce cercle : en s'éloignant du centre du cercle circonscrit, il diminue et tend vers zéro (ou presque ?) puis croît de plus en plus. Lorsque le rapport

est presque nul, le cercle est presque le cercle circonscrit au triangle initial ! La connaissance de la droite de Simson (ou de Wallace) nous dit qu'il est nul : les projections orthogonales de tout point situé sur le cercle circonscrit sur les côtés du triangle sont alignées.

Ce résultat, que nous savons démontrer, conforte notre conjecture.

Note : Si on note a, b, c , les projections orthogonales d'un point P sur les côtés du triangle ABC le rapport des aires des triangles $A'B'C'$, ABC et abc , IJK sont égaux. Prenons des aires algébriques, alors le produit vectoriel de deux vecteurs du plan est un scalaire égal à l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs. Notons $r(P)$ le rapport des aires des triangles considérés, alors :

$$r(P) = \frac{\vec{P}a \wedge \vec{P}b + \vec{P}b \wedge \vec{P}c + \vec{P}c \wedge \vec{P}a}{\omega\vec{I} \wedge \omega\vec{J} + \omega\vec{J} \wedge \omega\vec{K} + \omega\vec{K} \wedge \omega\vec{I}}$$

Il ne reste plus qu'à faire le calcul pour trouver les lignes de niveau de la fonction $r(P)$.

12.4 Une autre expérimentation. Deuxième conjecture.

Le rapport étant vraisemblablement constant sur des circonférences concentriques au cercle circonscrit donné, pour essayer de comprendre la situation modifions le cadre donné : inscrivons le triangle ABC dans une circonférence de centre ω , appliquons la macro "rapport" à ce triangle et à un point quelconque, et faisons parcourir au sommet A la circonférence. Le rapport r reste constant. Faisons de même avec les deux autres sommets : on obtient le même résultat, et ceci quelque soit le rayon du cercle pris.

On en déduit le théorème vraisemblable suivant :

Conjecture B : La valeur du rapport r entre les deux aires dépend du rayon du cercle circonscrit du triangle donné, de l'éloignement du point P au centre du cercle circonscrit, et non de la forme ou de l'aire du triangle.

12.5 Etude de la variation du rapport en fonction de l'éloignement du centre du cercle circonscrit.

Pour ce faire, on limite le degré de liberté du point P en positionnant ce point sur une droite passant par le centre du cercle circonscrit (ce point devant être un centre de symétrie pour les valeurs prises par le rapport r).

Nous allons étudier la relation, la fonction, existant entre le rapport r et la distance d du point P au centre du cercle circonscrit ω . Pour ce faire on montre les axes, on reporte la distance d sur l'axe des x , et le rapport r sur l'axe des y . Définissons une nouvelle macro "parallélogramme" qui à trois points R, S, T donne le point U tel que le quadrilatère $RSTU$ soit

un parallélogramme (Pour construire le point U , on prend le milieu des points R, T , puis le symétrique de S par rapport à ce milieu).

Appliquons cette macro aux points définis sur les axes par r, O (origine des axes), et d : on obtient le point M de coordonnées (d, r) . Demandons le lieu géométrique de ce point lorsque le point P parcourt la droite : on obtient le graphique ci-dessous (au besoin on peut demander plus de points pour le lieu). Il reste à étudier cette courbe.

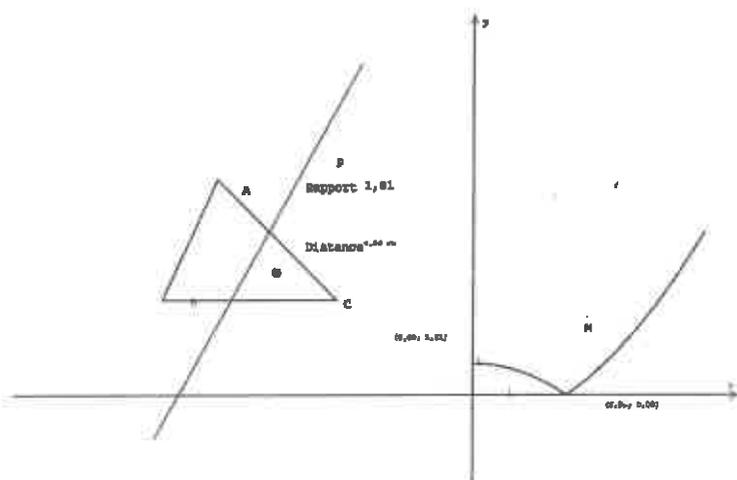


figure 4

L'étude précédente sur un cercle concentrique nous permet de dire qu'il existe une symétrie par rapport à l'axe des y , la distance étant une valeur positive cette partie n'apparaît pas. On peut la faire apparaître en faisant comme suit :

On définit de nouveaux axes en prenant pour origine étant le point ω , pour axe des abscisses la droite parcourue par le point P , et pour axe des ordonnées une droite quelconque passant par ω . On demande les coordonnées du point P dans ces nouveaux axes, soit $(x, 0)$, et on construit comme précédemment sur le système d'axes initial le point N de coordonnées (x, d) . On demande à cabri de tracer le lieu du point N lorsque P parcourt la droite. On obtient le graphique ci-dessous (cf fig. 4), symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

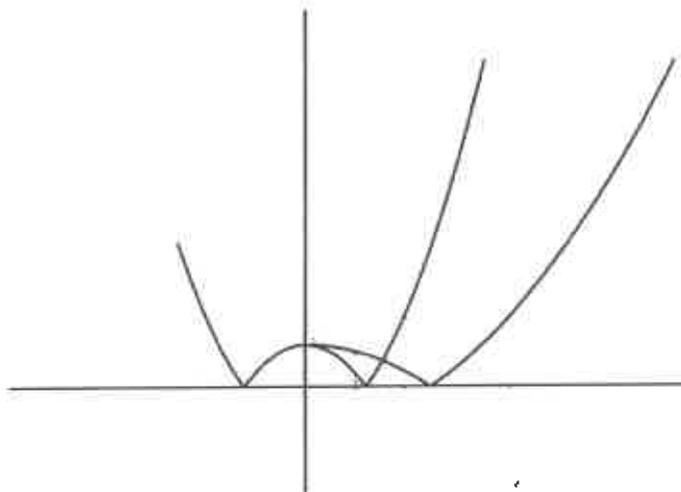


figure 5

Sur la partie positive, les deux graphiques ne correspondent pas car Cabri calcule toujours avec le même système d'axes (celui que le constructeur a choisi), même s'il affiche les coordonnées d'un point dans n'importe quel système d'axes. Pour s'en convaincre modifions la position du point déterminant l'unité des abscisses du deuxième système d'axes : le lieu du point N se déforme et on peut, sur la partie positive des abscisses, le faire coïncider avec le lieu du point M .

12.6 Calcul de la valeur de d pour la quelle le rapport r est égal à 1. Troisième Conjecture.

- i) Du point $(0, 1)$ on peut tracer une parallèle à l'axes des abscisses et estimer la valeur de d . Cela ne nous apportera pas plus que lorsqu'on essayait de positionner le point P pour avoir le rapport égal à 1 ; Cabri (celui en ma possession) ne fait pas l'intersection avec les lieux géométriques.
- ii) On peut remarquer que le graphique obtenu est un graphique connu : une parabole, ou plutôt la valeur absolue d'une parabole ? Pour confirmation prenons la fonction "conique" et choisissons cinq points sur une branche du lieu : la conique couvre le lieu. Re commençons avec la partie non couverte, il en est de même. Si on approche le curseur Cabri nous donne à choisir entre "ce lieu" et "cette parabole". Si on déplace les points d'une même branche définissant ces deux coniques il en est de même, la conique recouvre toujours le lieu. Elles ne dépendent pas des points choisis.

Demandons les équations des deux paraboles ainsi obtenues : la traduction algébrique-géométrique de ces équations nous dit que nous avons une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Le graphique est la valeur absolue. Pour plus de sécurité demandons si un point du lieu, que l'on pourra faire varier, est sur la parabole : Cabri nous dit que oui, mais de temps en temps il nous dit que non ! Que croire ? Avec une des premières versions Cabri, il dit toujours non. Mais l'oracle, ou la pythie dépend de l'épsilon choisi pour l'approximation et de l'algorithme utilisé, et ce en fonction de la courbe.

Comme nous n'avons pas le choix (pas d'autre idée pour continuer notre recherche) et lorsqu'on sait la difficulté d'obtenir une parabole lorsque les cinq points sont libres, (ou seulement le cinquième), on conjecture :

Conjecture C : *La fonction définissant le rapport r en fonction de la distance d est une parabole en valeur absolue.*

12.7 Détermination du lieu. Quatrième conjecture.

On peut reprendre l'idée énoncée dans i), faire l'intersection avec la conique avec la droite, et demander les coordonnées du point ainsi défini. Cela nous donnera une construction stable avec Cabri du cercle cherché, mais ne nous fera pas comprendre davantage le problème.

On sait que la fonction cherchée s'annule aux points d'abscisses $\pm R$, où R est le rayon du cercle circonscrit, et prend la valeur 1 en 0. Si cette fonction est la valeur absolue d'une parabole, l'équation des deux paraboles est donc :

$$Y_1 = -\frac{1}{R^2}(X_1^2 - R^2) \text{ et } Y_2 = \frac{1}{R^2}(X_2^2 - R^2)$$

On peut ainsi calculer la valeur d pour laquelle le rapport est égal à 1. On peut même établir la relation entre les valeurs des distances d_1 et d_2 pour que les rapports soient égaux : $Y_1 = Y_2$ si et seulement si $X_1^2 + X_2^2 = 2R^2$, c'est-à-dire si et seulement si $d_1^2 + d_2^2 = 2R^2$.

Ce résultat est validé avec Cabri, même lorsqu'on demande le rapport avec l'approximation maximale. On déduit le théorème vraisemblable suivant :

Conjecture D : *Le lieu géométrique cherché est un cercle concentrique au cercle circonscrit, de rayon $R\sqrt{2}$, où R est le rayon du cercle circonscrit.*

Etalement de notre conjecture

Pour conforter notre conjecture C, on peut la tester sur des relations métriques connues en des points où les calculs sont aisés.

12.8 Aire définie par le centre du cercle inscrit.

Notons O le centre du cercle inscrit à un triangle ABC , et D, E, F ses projections orthogonales sur les côtés du triangle, R et R' les rayons des cercles circonscrit et inscrit respectivement, et S et s les aires des triangles ABC et DEF .

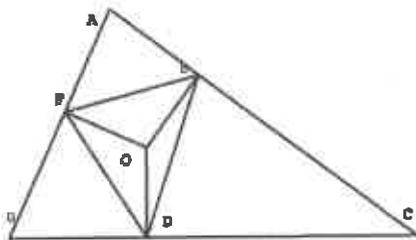


figure 6

On a $2S = R^2 (\sin A + \sin B + \sin C) = R^2 \left(\frac{a}{R}\right) = \frac{aR}{1}$, d'où $\frac{a}{b} = \frac{R'}{2R}$. Comme l'équation de notre parabole est égale à $Y = -\frac{1}{2R}(X^2 - R^2)$, on déduit des égalités précédentes $\frac{R'}{2R} = \frac{R^2 - X^2}{4R^2}$ et par suite $X^2 = R(R - 2R')$ qui est une formule connue donnant la distance entre les centres inscrit et circonscrit.

Ceci renforce notre conjecture. De plus cette formule montre que le diamètre du cercle inscrit est inférieur au rayon du cercle circonscrit, et qu'il y a égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

12.9 Point de Lemoine.

Sous l'hypothèse de notre conjecture, on peut calculer aisément la distance d entre le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine, résultat méconnu ou peu connu (?).

Le point de Lemoine pour un triangle de côtés a, b, c est défini comme étant le point dont les distances x, y, z aux trois côtés sont entre elles dans le même rapport que les côtés correspondants¹.

Au numéro 2361 de ce même ouvrage F.G.M. montre que le point de Lemoine est le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est minima.

De la relation $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, on déduit $\frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$, où S est l'aire du triangle donné. Si s désigne l'aire du triangle podaire du point de Lemoine, on obtient $\frac{s}{S} = \frac{12S^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$ (numéro n°2364 de F.G.M.). En utilisant l'équation de la parabole il vient $d^2 = R^2 - 3\left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2$ où R est le

¹F.G.M., Exercices de Géométrie, n°103, 1920, p. 46.

rayon du cercle circonscrit du triangle donné.

Note : Si notre conjecture est validée, on obtient une formule pour la distance du point de Lemoine au centre du cercle circonscrit pour un triangle donné, et pour tout point du plan la connaissance du rapport de l'aire de son triangle podaire à l'aire de ce triangle permet de calculer la distance de ce point au centre du cercle circonscrit en fonction du rayon de ce dernier cercle.

Ainsi pour les trois autres points du plan du triangle dont les distances aux trois côtés sont entre elles dans le même rapport que les côtés correspondants, on a une formule analogue pour exprimer la distance de ces points au centre du cercle circonscrit.

12.10 Recherche analytique.

A ce stade, nous avons suffisamment d'éléments pour entreprendre une étude analytique en sachant ce que nous devons trouver : nos conjectures semblent solides. Une autre approche est de regarder dans la littérature si notre problème, ou un problème semblable n'a pas été traité.

Après une certaine recherche historique, je l'ai retrouvé sous la forme des projections orthogonales sur les côtés du triangle donné (cf. note 2 du paragraphe "Une étape d'observation") ; l'égalité du rapport $\frac{1}{4}$, n'ayant pas été abordée. La primeur de ce problème semble revenir à Lhuillier² :

- *Si de l'un quelconque des points d'une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les directions des trois côtés, l'aire du triangle dont les sommets seront les pieds de ces perpendiculaires sera constante. Si, en particulier, ce cercle se confond avec le premier, cette aire deviendra nulle ; c'est-à-dire qu'alors les pieds des trois perpendiculaires seront en ligne droite (*)*.
- *En outre, si deux cercles concentriques au cercle circonscrit sont tels que la somme des carrés de leurs rayons soit double du carré du sien, les triangles qui auront pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées des points des circonférences des derniers cercles sur les directions des côtés du triangle inscrit au premier seront équivalents.*

(*) *Ce cas particulier a déjà été démontré dans le présent recueil (tom.IV, p. 251)*

Ce problème a été résolu dans ce même volume par M. Querret (p. 280 - 285) et par Sturm (p. 286 - 292). La démonstration de Querret est analytique et peut se traduire aisément comme un calcul vectoriel (déterminant). Il prend un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine

²Lhuillier, Théorème de Géométrie, Annales de Gergonne, tome XIV, 1823 - 1824, p. 28.

est un sommet du triangle donné. Dans ce système les deux autres sommets sont de coordonnées a, b , et a', b' respectivement ; les équations des droites des trois côtés sont :

$$b'X - a'Y = 0, \quad bX - aY = 0, \quad (b - b')(X - a) - (a - a')(Y - b) = 0$$

Pour un point P donné (en fait pour un point intérieur) il calcule la distance de ce point aux trois côtés, puis l'aire des trois triangles déterminant le triangle dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires ; il en déduit l'aire de ce dernier k^2 et l'équation en fonction des coordonnées x et y du point P :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm \frac{2c^2 c' c'' k^2}{(ab' - ba')^2}$$

où α et β sont les coordonnées du centre du cercle circonscrit et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, et $c'' = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}$.

Si R est le rayon du cercle circonscrit et T est l'aire du triangle donné il trouve l'équation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \cdot \frac{T \pm 4k^2}{T}$, et ensuite les rayons r et r' des deux cercles résolvants le problème : $r^2 = R^2 \cdot \frac{T - 4k^2}{T}$, $r'^2 = R^2 \cdot \frac{T + 4k^2}{T}$. Ce dernier résultat démontre celui que nous avons conjecturé avec Cabri, à savoir l'équation des deux paraboles. De plus Querret remarque que la corde t du cercle dont le rayon est R , tangente à celui dont le rayon est r est égale à la corde t' du cercle dont le rayon est r' , tangente à celui dont le rayon est R . Si $\alpha, \alpha', \alpha''$, sont les angles du triangle donné, il trouve :

$$k^2 = t^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{\sin \alpha'}{2} \cdot \frac{\sin \alpha''}{2} = t'^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{\sin \alpha'}{2} \cdot \frac{\sin \alpha''}{2}$$

La démonstration donné par Sturm est basée sur les relations métriques du triangle, essentiellement celles qui font appel aux relations trigonométriques pour le calcul de l'aire et du rayon du cercle circonscrit ; comme Querret, il prend un point intérieur et laisse au lecteur le soin de voir les autres cas de figure.

Si α, β, γ , sont les angles du triangle donné, r le rayon du cercle circonscrit, x, y les coordonnées du point P rapportées aux deux côtés de l'angle γ pris pour axes des coordonnées, et k^2 l'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des perpendiculaires sur les côtés abaissées de P , il trouve l'équation suivante :

$$r^2 - \frac{k^2}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \left(x - \frac{r \cos \alpha}{\sin \gamma}\right)^2 + \left(y - \frac{r \cos \beta}{\sin \gamma}\right)^2 + 2 \left(x - \frac{r \cos \alpha}{\sin \gamma}\right) \left(y - \frac{r \cos \beta}{\sin \gamma}\right) \cos \gamma$$

Ceci montre que pour toute valeur de k on a l'équation d'un cercle, et si $k = 0$ c'est celle du cercle circonscrit ; de plus, l'aire étant nulle, Sturm

en déduit que les points projetés sont alignés, et pour tout k , que les lieux cherchés sont des circonférences concentriques au cercle circonscrit. Par de là, Sturm retrouve tous les résultats de Querret, et poursuivant plus avant sa recherche, il projette le point P suivant des obliques faisant des angles constants. Il trouve que le lieu géométrique tel que l'aire des triangles dont les sommets sont les projetés obliques est une circonférence concentrique à celle du cercle circonscrit.

Il généralise ce problème en prenant un polygone et affirme, en donnant une ligne directrice pour le démontrer, que le lieu est une ligne du second ordre.

Quelques 40 ans plus tard, ce problème réapparaît ; il semble que sa source ce soit perdue. Il a été repris par de nombreux mathématiciens d'alors, mais leurs démonstrations diffèrent peu des unes des autres dans leur esprit ; il paraît cependant intéressant de les comparer pour étudier les différentes pratiques de la géométrie analytique de cette époque en relation avec la vision géométrique et les traductions géométrie analytique (ou calcul algébrique) et géométrie synthétique. Parmi les nombreux auteurs ayant étudié ce problème, citons entre autres Briot et Bouquet³, M. Combette⁴, A. Duporcq⁵, M. F. Stordeur⁶, pour ce que leur solution apporte en compréhension où en technicité.

L'étude faite par M. Combette me paraissant plus riche, je vais en rapporter les éléments essentiels. Il pose le problème est dans l'espace pour un polygone (plan) sous la forme des projections orthogonales sur chaque côté, mais nous relaterons la partie relative au plan. Le lieu trouvé pour une valeur constante de l'aire du polygone ainsi construit est une circonférence toujours de même centre. Reprenons son texte :

Je prends l'équation de la droite sous la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

dans un repère orthonormé, (p) représentant la distance de l'origine à la droite, et (α) l'angle que fait cette perpendiculaire avec les (x) positifs ; cet angle devant être toujours compté dans le sens de la flèche.

Sous cette forme, la distance (δ) d'un point quelconque (x, y) à la droite s'exprime simplement au moyen de la formule

$$\delta = \pm (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p),$$

avec la convention de prendre le signe $(+)$ si le point et l'origine sont de côtés différents de la droite, et le signe $(-)$ dans le cas contraire.

³Briot et Bouquet, *Leçons de Géométrie analytique*, 13^e édition.

⁴M. Combette, *Etude d'un lieu géométrique*, *Revue des sociétés savantes*, tome V, 1870, page 203 - 233.

⁵A. Duporcq, *Aire polygonale*, *Intermédiaire des mathématiciens*, 1898, p. 166 - 167, n° 1 232.

⁶M. F. Stordeur, *Question 1 174*, p. 470 - 471.

Dans tout ce qui va suivre, je représente symboliquement par (α) la quantité $(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$.

Ceci posé, je considère un polygone plan quelconque, et je désigne les équations de ses côtés par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \dots, \quad \omega = 0,$$

et par A l'angle formé par les côtés $\alpha = 0, \quad \beta = 0,$

par B l'angle formé par les côtés $\beta = 0, \quad \gamma = 0,$

.....

par O l'angle formé par les côtés $\omega = 0, \quad \alpha = 0,$

Dans ces hypothèses, la fonction

$$\alpha\beta \sin A + \beta\gamma \sin B + \dots + \omega\alpha \sin O,$$

dans laquelle (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque, par exemple, intérieur au polygone, représente précisément le double de l'aire (σ) du polygone a, b, c, d, \dots, o . Par suite, l'équation du lieu des points pour lesquels σ a la même valeur est

$$(1) \quad \alpha\beta \sin A + \beta\gamma \sin B + \dots + \omega\alpha \sin O = 2\sigma$$

.. Je vais démontrer que généralement l'équation (1) représente une circonférence

Pour ce faire, il montre que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux, faisant la différence entre eux, et que le coefficient de xy est nul. Ce qui lui permet de constater que ces circonférences ont toutes le même centre.

Notes :

1°) Ce calcul est essentiellement celui que nous avons signalé lors de notre conjecture A.

2°) M. F. Stordeur constate que cette équation, ne diffère que d'une constante 2σ de l'équation du cercle circonscrit. Il en déduit immédiatement que c'est une circonférence concentrique au cercle circonscrit.

Plus avant dans son article M. Combette trouve le même résultat en projetant le point relativement à une même direction sur les côtés du polygone donné ; l'équation de la parabole exprimant le rapport étant $\pm \frac{R_0^2 - R^2}{4R^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}$.

L'étude particulière qu'il fait pour le triangle démontre ce que nous avons conjecturé avec Cabri : nos résultats sont ainsi prouvés.

En continuant l'article de M. Combette, on a une généralisation de cette étude, en considérant les projections orthogonales d'un triangle et de son cercle circonscrit sur un autre plan : le cercle se projette en une ellipse, le triangle en un triangle et les droites perpendiculaires aux côtés a, b, c du triangle en des parallèles aux directions conjuguées de ces côtés... Donc, si un triangle est inscrit dans une ellipse, et si par un point quelconque

de cette courbe on mène des parallèles aux directions conjuguées des côtés, les trois pieds seront en ligne droite, et l'ellipse sera le lieu des points jouissant de cette propriété.

Il y a plus, en considérant une circonférence concentrique à la première, sa projection sera une ellipse concentrique et homothétique à la première, et l'aire du triangle qui aura pour sommets les pieds des conjugués des côtés menés par un point quelconque de cette ellipse sera constante.

Pour finir l'étude de ce problème sur le triangle, M. Combette donne des relations métriques obtenues avec l'équation de cette parabole : à savoir la distance du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et ex-inscrits, la valeur du rayon du cercle circonscrit en fonction des rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, au centre du cercle inscrit aux centres des cercles ex-inscrits. Il en déduit une propriété moins connue du cercle des neuf points : le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles ex-inscrits.

12.11 Conclusion.

La recherche que nous venons de décrire est une recherche où l'algèbre et la géométrie ne sont pas deux domaines distincts mais font parties d'un même corpus : c'est une façon de voir et de faire qui était réservé au début du siècle à des mathématiciens confirmés, mais qui actuellement avec l'aide d'un tel logiciel peut se concevoir dans l'enseignement secondaire autrement que sur des exemples d'école. En effet les passages géométrie-algèbre, algèbre-géométrie demandent pour les concevoir dans sa tête (selon l'expression qui était en usage), pour le moins, maturation, pratique, compétences techniques ; il n'était pas concevable, et il ne l'est toujours pas, de demander à un élève de tracer à la règle et au compas suffisamment de points d'un lieu (autre qu'une droite ou un cercle) pour avoir une idée de celui-ci, ou de laisser le problème complètement ouvert comme il nous a été proposé, sans un bagage conséquent de géométrie synthétique et/ou analytique, bagage que l'on n'acquiert qu'à partir d'un certain âge.

Ici le logiciel nous permet de visualiser une propriété que l'on a cru percevoir sur un exemple donné, exemple que l'on peut déformer pour voir la solidité de notre hypothèse. Ainsi on peut valider ou invalider des conjectures par expérimentations comme le ferait un physicien (On le fait plus volontiers que la validation ne demande pas une débauche d'énergie, et que la réponse est souvent instantanée), en faisant des observations numériques ou non sur des dessins virtuels, des aller-retour algèbre, géométrie, et avoir une intelligence de la situation sans avoir un recours à la preuve mathématique, preuve qu'il nous faudra fournir pour avoir la certitude absolue.

Ainsi lorsqu'on s'engagera vers la recherche de cette preuve on aura

une compréhension intuitive, on saura ce que l'on en droit de trouver avec un certain degré de confiance, et sur qu'elles idées on peut s'engager. S'il y a lieu de faire des calculs, ces calculs ne seront pas faits en aveugles, ils seront réfléchis et menés vers un but que nous pensons connaître.

Si on regarde avec recul notre recherche et ses différentes étapes, on a fait une première observation, un peu en aveugle (c'est Cabri qui faisait les calculs, mais pour cela nos constructions n'étaient pas à l'oeil, elles étaient à la règle et au compas de Cabri). Cela nous a permis de conjecturer certains résultats que nous avons su prouver (Le centre du cercle circonscrit est un point du lieu). Ensuite nous avons élargi le problème : au lieu de chercher un rapport égal à 1, nous avons cherché à étudier la fonction entre ce rapport et la position du point dans le plan en limitant un degré de liberté pour mieux contrôler la situation. Cela nous a permis d'émettre des conjectures, et d'utiliser la fonction lieu de Cabri pour passer en géométrie analytique. Les résultats algébriques que nous avons déduit de ces changements de cadre, nous ont permis de déterminer de conjecturer le lieu cherché.

En résumé, nous avons émis des hypothèses, on a fait comme si on savait, ce qui nous a permis de trouver des résultats, résultats que nous avons confronté sur des exemples. Leur validation nous a conforté dans nos hypothèses, et permis d'aller plus avant dans notre démarche. Nous avons réalisé une "démonstration à trous" ; comme le noeud de notre étude était l'équation de la parabole, nous avons testé la solidité de cette dernière conjecture en l'utilisant pour retrouver des résultats connus.

Il ne restait plus qu'à donner la preuve formelle, ce que notre recherche historique a fait.

12.12 Pour aller plus loin.

L'étude faite par M. Combette pour un polygone quelconque montre que le lieu est toujours un cercle ; la fin de son article, est consacrée au cas du quadrilatère. Nous allons tester les résultats algébriques qu'il donne avec Cabri, afin de valider les résultats qu'il déduit de ses calculs et les visualiser.

Dans le cas d'un quadrilatère et pour déterminer le centre des circonférences, courbes définissant les lieux géométriques cherchés, M. Combette étudie l'équation de la courbe obtenue en prenant la constante $\sigma = 0$, c'est-à-dire lorsque l'aire du quadrilatère définie par les projections orthogonales est nulle.

Pour un quadrilatère convexe $ABCD$, on note θ et ω les intersections des droites BC , AD et AB , CD respectivement. Les points θ et ω vérifient trivialement les équations : ils sont des points du lieu. Il ne reste plus qu'à trouver un autre point de ce même lieu. Le point de Miquel est le candidat idéal : c'est l'unique point du plan tel que les quatre projections sur les

côtés du quadrilatère sont quatre points alignés. Pour le construire on trace les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles θAB , θCD , ωAD , ωBC , définis par le quadrilatère complet $ABCD\theta\omega$: ils sont concourants en un point G , troisième point du lieu.

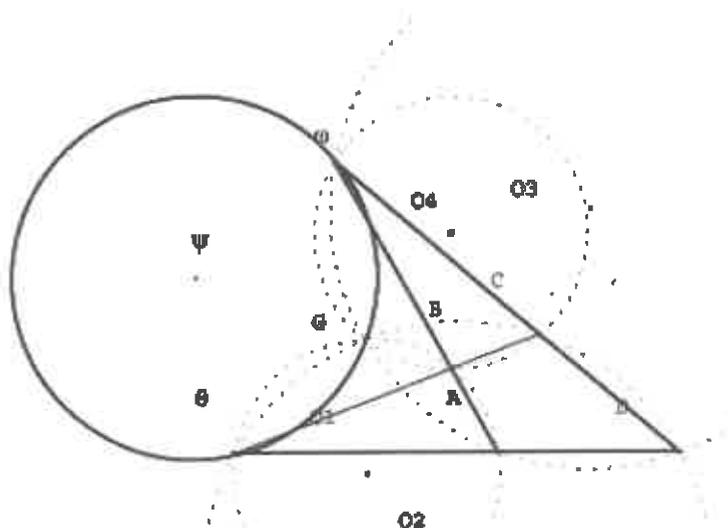


figure 7

Si on note O_1, O_2, O_3, O_4 , les centres respectifs de ces cercles, le centre ψ des circonférences cherchées se trouve à l'intersection des droites O_1O_2 et O_3O_4 (elles sont médiatrices des segments θG et ωG). Pour terminer l'étude générale (M. Combette a vu qu'il y avait des cas de figures, et n'en a étudié qu'un seul : le quadrilatère obtenu par projections orthogonales n'est pas croisé. Il affirme que si c'est le cas il obtient des résultats similaires), il donne l'équation des rayons des cercles cherchés :

$$R_1^2 = R^2 + \frac{\sigma}{2 \sin(A + D) \cos(D + C) \cos(D + B)}$$

Si le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, le lieu se réduit à une droite, et pour le cas où l'aire est nulle c'est la troisième diagonale du quadrilatère complet, ce qui était prévisible : les points G, θ, ω sont alignés.

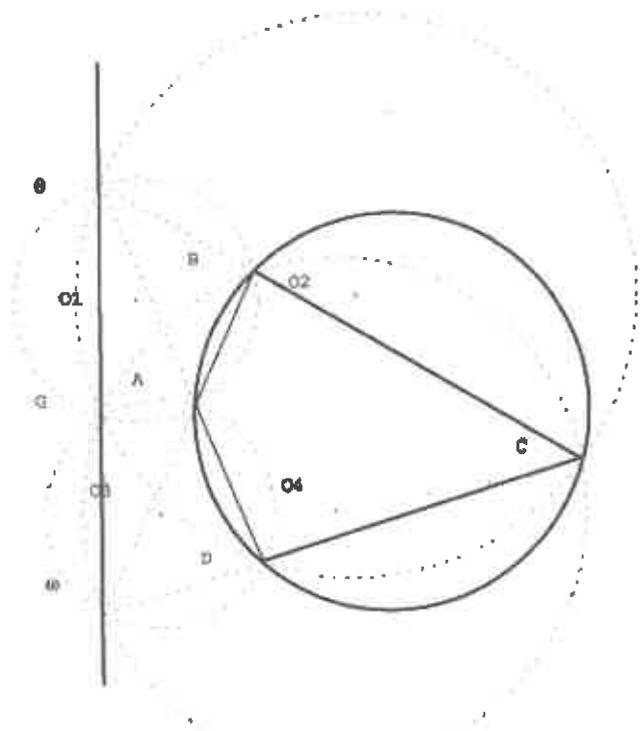


figure 8

Si le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze, le lieu est encore une droite c'est la tangente commune aux deux cercles définissant le point de Miquel G .

Si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme le rapport des aires est constant entre les deux bandes définies par les côtés du parallélogramme ; pour M. Combette le lieu n'existe pas.

Visualisation des résultats :

Traçons le cercle de centre ψ passant par les points G, ω, θ et pour un point P sur cette circonférence appliquons la macro "rapport" : le rapport n'est pas nul, il varie avec la position de P . Il est nul seulement en θ, G, ω . Prenons un autre cercle de centre ψ coupant les côtés du quadrilatère complet, et pour un point P de cette circonférence appliquons la macro : le rapport varie, sauf dans les lunules définissant le point de Miquel. Si on applique la macro "rapport-triangle", on voit que ces lunules correspondent au cas où le quadrilatère n'est pas croisé.

Une étude plus approfondie montre que l'on peut étendre ces portions de cercle dans certains cas.

Détermination du lieu pour lequel le rapport est égal à 1 :

Si on fait une étude de la circonférence désirée à l'oeil (le centre est en ψ), on obtient *a priori* aucune information sur le rayon. On va étudier le lieu cherché sur des exemples particuliers où il nous sera plus aisé de répondre dans le cas où le quadrilatère n'est pas croisé.

Le quadrilatère ABCD est un trapèze :

Les côtés BC et AD sont parallèles : le point ω est rejeté à l'infini, et la droite, lieu du point P cherché, est parallèle à la tangente commune aux cercles passant par G . Traçons une droite parallèle à cette droite et pour un point P , situé sur cette droite appliquons la macro "rapport". Cherchons la position de cette droite pour que le rapport soit égal à 1, pour une région adéquate du plan ; après une observation rapide, elle paraît passer par le milieu de O_1O_2 .

Traçons la médiatrice de O_1O_2 , et redéfinissons le point P comme un point de cette médiatrice : le rapport est égal à 1, sur deux segments de cette droite, non nécessairement définis par des lunules.

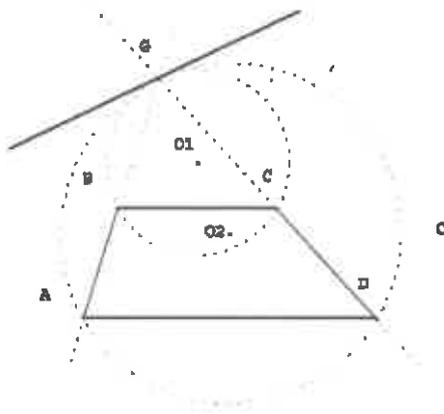


figure 9

Le quadrilatère ABCD est un quadrilatère quelconque :

Pour essayer de déterminer un point de la circonférence cherchée, on peut déterminer le point E tel que les points (O_1, O_2, ψ, E) forment une division harmonique (lorsque le quadrilatère tend à être un trapèze, le point E tend vers le milieu de O_1O_2). Si on trace le cercle de centre ψ passant par E et si on redéfinit le point P un comme un point de ce cercle, rapport n'est pas égal à 1.

Le quadrilatère ABCD est un quadrilatère inscriptible :

Inscrivons dans un cercle un quadrilatère $ABCD$, construisons son point de Miquel G et traçons la droite $\theta G\omega$. Répétons la même expérience que pour le trapèze : cette droite paraît passer par les milieux des segments

O_1O_2 et O_3O_4 . De plus le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ semble être un trapèze isocèle.

Une validation avec Cabri nous dit que le lieu cherché est la médiatrice des segments O_1O_2 et O_3O_4 , et confirme notre opinion sur le quadrilatère des centres.

Deuxième essai : le quadrilatère ABCD est un quadrilatère quelconque :

Plusieurs essais basés sur le rapport harmonique n'ayant rien donné, une observation réfléchie de la configuration lorsque le quadrilatère est inscriptible doit être envisagée.

Le quadrilatère des centres $O_1O_2O_3O_4$ étant, selon Cabri, un trapèze isocèle il est inscriptible. Une idée est de voir à quelles conditions ce quadrilatère des centres est inscriptible. Reprenons le fichier d'un quadrilatère générique, traçons les médiatrices des segments O_1O_2 , O_3O_4 : elles se coupent au point F . Traçons le cercle de centre F passant par O_1 (et O_2) : pour Cabri ce cercle passe par les points O_3 , O_4 et G .

Une cocyclicité :

Ce résultat est intéressant en lui-même : une tentative de validation de ce résultat s'impose avant de reprendre notre recherche. Théorème Le point de Miquel d'un quadrilatère complet, et les quatre centres des quatre cercles circonscrits aux triangles définissant ce point, sont situés sur une même circonférence. Ce résultat est classique : c'est le cercle de Miquel du quadrilatère que nous avons retrouvé.

Reprise du deuxième essai :

Positionnons un point P de centre ψ , appliquons la macro "rapport" et modifions le rayon de ce cercle pour que ce rapport soit égal à 1. L'observation ne s'avère pas facile : il y a beaucoup trop de courbes. En utilisant l'outil "cacher/montrez" on efface les cercles ayant servis à construire le point de Miquel et des droites utilisées lors de la recherche basée sur le rapport harmonique. Une idée est de voir comment on peut utiliser le cercle de Miquel dont nous noterons O son centre.

Avant que de penser à voir des utilisations pas aisées, essayons le cercle de diamètre ψO . Ce cercle avec le cercle donnant un rapport 1 (valeur approchée), et le cercle de Miquel paraissent concourants.

Redéfinissons le cercle donnant ce rapport approché 1 comme le cercle de centre ψ passant par M , point d'intersection du cercle de Miquel et du cercle de diamètre ψO . Le rapport donné par Cabri est égal à 1 avec le nombre de décimale voulue, et ce même en modifiant le quadrilatère. Cabri affirme : Conjecture E Pour un quadrilatère, le lieu des points du plan pour lesquels les aires sont égales est contenu dans le cercle de centre ψ et passant par le point d'intersection du cercle de Miquel et du cercle de diamètre ψO .

Conclusion

Le début de la recherche sur le quadrilatère a été de visualiser les résultats de géométrie analytique donnés par M. Combette, qui avait vu certaines limites à ses résultats, limites sur lesquelles il était passé rapidement. Nous avons pu les comprendre (quadrilatère croisé ou pas) et poursuivre notre recherche sur le problème analogue au triangle. On a exploré des configurations particulières pour voir si dans ces cas on pouvait conclure (trapèze, quadrilatère inscrit), et on a cherché une solution qui dans ces cas serait ce que nous avons trouvé.

Les divers chemins essayés par expérimentation et observation, nous ont permis de retrouver un résultat intéressant en lui-même : le cercle de Miquel et la cocyclicité de cinq points. Ce dernier résultat, nous a permis de résoudre, avec Cabri, le problème proposé ; il ne reste plus qu'à en donner la preuve formelle. Mais nous en resterons-là.

Ainsi Cabri nous a facilité les aller-retour algèbre géométrie, ce que faisaient les géomètres confirmés, avec validation calculatoire ou visuelle, et de mieux comprendre notre configuration. L'apport supplémentaire des constructions *via* Cabri permettent de mieux concevoir la figure et de la faire varier. Notre attitude d'investigation faite d'expérimentation, d'observation, de démonstrations géométriques et/ou d'analytique, a été plus dynamique que celle que nous aurions eue dans le cadre du papier-crayon. Nous avons fait comme si on savait, nous sommes allés plus avant pour confirmer ou infirmer en observant ou en confrontant à des résultats connus ; ceci nous donne une intelligence de la situation et nous permet d'être plus à même de résoudre l'exercice proposé. Notre sens de l'observation a été développé et mis à contribution. Cette conjugaison de vision et de pensée nous a fait accéder à la perception pour mieux appréhender la situation.

Pour le plaisir

Nous allons donner ici quelques résultats faisant suite à notre étude, résultats que nous avons démontrés ou non. Dans ce dernier cas, ils sont à considérer comme "Cabri-vrai" !

- 1) Considérons O_i pour $i = 1, \dots, 4$ quatre points sur une circonférence. Pour tout point G de cette circonférence il existe un quadrilatère tel le point G est son point de Miquel et la circonférence son cercle de Miquel.
Pour le déterminer, il suffit de tracer les cercles de centre O_i passant par G .
- 2) Le quadrilatère est inscritible si et seulement si les points O_i forment un trapèze isocèle.
- 3) Le lieu des points déterminant le quadrilatère lorsque le point G varie sur la circonférence sont des circonférences égales entre elles et égales à la circonférence donnée. Chacune d'elles passent par deux des points O_i .

- 4) Les centres de ces circonférences se déduisent deux à deux par une symétrie centrale.
- 5) L'angle formé par les droites AB , et CD est égal à l'angle inscrit interceptant l'arc des centres des cercles circonscrits aux triangles $AB\theta$ et $CD\theta$. On a un résultat similaire pour l'angle des droites BC et AD .
- 6) On retrouve ces angles, ou leurs supplémentaires, en considérant les triangles formés par les centres des circonférences, lieux des points des sommets du quadrilatère complet, lorsque le point G parcourt la circonférence donnée.
- 7) Ces angles, ou leurs supplémentaires, sont les angles sous lesquels on voit les segments O_1O_2 et O_3O_4 , lieux des points θ et ω , sommets des quadrilatères complets ayant le cercle donné comme cercle de Miquel.
- 8) les angles formés par les droites AO_2 , $A\omega$ et AO_4 , $A\omega$ sont constants (La droite AT passe par un point fixe).
- 9) L'angle des droites $G\theta$ et $G\omega$ est constant lorsque le point G parcourt le cercle donné ; il est supplémentaire de l'angle des droites O_1O_2 et O_3O_4 définissant le point ψ .
- 10) Le lieu des points pour lesquels le quadrilatère projections orthogonales du point sur les quatre côtés est d'aire égale au quart de l'aire du quadrilatère donné, est un cercle si on considère la famille des quadrilatères ayant le même cercle de Miquel avec les quatre centres O_i .

Nous laissons au lecteur le soin de confirmer ou d'infirmer ces assertions.