

# 11

## Trois exemples pour illustrer la démarche expérimentale en mathématiques avec *Cabri*

*Jean-Jacques DAHAN, Irem de Toulouse*

### 11.1 Introduction.

– **Résumé de l'atelier.**

1. Je propose de mener la recherche d'un problème de type "boîte noire". Cette recherche sera menée collectivement afin de générer un débat scientifique qui apparaîtra comme un modèle pour la démarche expérimentale individuelle.
2. On utilisera, d'une manière originale, les transformations du plan disponibles dans *Cabri* pour créer une page dans laquelle on simule une promenade aléatoire dans un quadrillage du plan. On montrera ainsi la nécessité de connaissances mathématiques préalables pour concevoir de tels cadres d'expérimentation.
3. On montrera aussi comment, avec l'outil "Trace" et une construction conditionnelle spécifique, il est possible de visualiser très aisément des lignes de niveau. On fera prendre conscience qu'une telle procédure peut permettre d'induire une démarche expérimentale de découverte et de validation.

– **Déroulement effectif.**

L'ordre proposé a été modifié afin d'atteindre les objectifs précisés plus loin :

1. LA PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE PYTHAGORE.
2. UN EXEMPLE DE SIMULATION AVEC CABRI PROMENADE ALÉATOIRE SUR UNE GRILLE

### 3. DÉROULEMENT DE LA RÉOLUTION DE LA BOÎTE NOIRE PROPOSÉE

#### - Objectifs assignés à cet atelier.

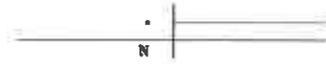
Mon intention était *in fine* de résoudre avec les participants un problème de type boîte noire pendant la dernière demi-heure de l'atelier. Le compte-rendu de cette résolution menée par un public d'experts en géométrie constitue la partie 3 de cet article. Je voulais convaincre mon auditoire que ce genre de problème amenait une dévolution rapide, permettait de dégager les vrais connaissances des participants et rendait possible la proposition à tous publics de problèmes consistants (les vrais problèmes : ceux dont on ne sait si on saura les résoudre, si on a les outils pour les résoudre et même s'il est résoluble). Je voulais montrer comment on pouvait dégager quelques phases d'une démarche expérimental à partir de l'analyse d'une telle recherche (ceci constitue d'ailleurs le thème de ma thèse en cours). Pour que cette résolution puisse être abordée dans des conditions optimales par mon public, j'ai mis en place ce que je pourrais appeler une mini instrumentalisation, c'est à dire une prise en main du logiciel Cabri qui fixe en moins d'une heure les schémas d'utilisations les plus pertinents que je voulais voir apparaître au cours de la résolution de la boîte noire (comment et dans quels contextes utiliser les outils " trace ", " lieu ", " redéfinition "...). Au cours de cette prise en main faite de manière monstrative, j'ai présenté une transposition possible de la découverte de la propriété de Pythagore (partie 1) et la façon de simuler une promenade aléatoire (partie 2) où la démarche expérimentale est présentée de façon isomorphe à la démarche expérimentale en physique du moins dans sa formalisation.

## 11.2 La propriété caractéristique de Pythagore.

### 11.2.1 Présentation du montage.

Le montage est ici donné par un fichier Cabri qui a été conçu par moi et qui fonctionne ainsi : Un point M libre pilote le point A sommet du triangle ABC. Le résultat du calcul de  $BC^2 - AB^2 - AC^2$  est affiché. Quand on tire le point M, on voit se superposer à A un point  $A_p$  bleu si le résultat précédent est positif et un point  $A_n$  rouge si ce résultat est négatif. Ce qui se passe sur la partie supérieure de l'écran n'a pas nécessairement à être décrit pour comprendre l'expérimentation qui va être faite à partir de ce montage. Cela permettra par la suite d'expliquer comment ce montage spécial a été effectivement réalisé (on verra que la conception de ce montage dépend des connaissances de celui qui le réalise : connaissances à la fois au niveau du logiciel et au niveau mathématique). On peut simplement constater qu'un point P bleu apparaît sur une demi-droite bleue simultanément à l'apparition de  $A_p$  et qu'un point rouge N apparaît sur une

semi-droite bleue simultanément à l'apparition de  $A_n$ , comme on peut le constater sur les deux copies d'écrans qui suivent :



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -1,35 \text{ cm}^2$$

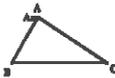


figure 1



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = 1,55 \text{ cm}^2$$



figure 2

### 11.2.2 Protocole expérimental.

Les manipulations que l'on demande d'effectuer avec ce montage sont les suivantes :

Activer la trace du point rouge  $A_n$ . Faire de même avec  $A_p$ , après évidemment avoir tiré sur M pour faire apparaître  $A_p$ . Faire balayer à M le maximum de points de l'écran afin que A en fasse autant avec comme seul objectif de repérer la zone ou les zones de changements de couleurs obtenus par la fonction trace.



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -18,94 \text{ cm}^2$$



1 = 4,00 cm  
2 = 3,10 cm

figure 3



$$BC^2 - AB^2 - AC^2 = -18,53 \text{ cm}^2$$



1 = 4,00 cm  
2 = 3,10 cm

figure 4

On obtient ainsi un ensemble de données graphiques qu'il faudra traiter dans l'étape suivante.

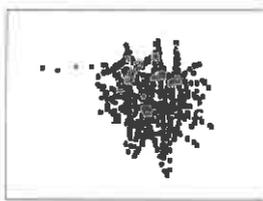


figure 5

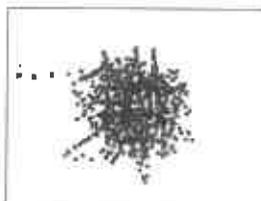


figure 6

### 11.2.3 Traitement inductif des données.

La valeur monstrative de cette expérimentation est flagrante. En effet la seule visualisation du résultat des zones colorées en rouge et bleu constitue l'essentiel du traitement des données collectées. La conjecture qui arrive nécessairement est que :

#### Les points du plan vérifiant

$BC^2 - AB^2 - AC^2 > 0$	est l'intérieur du disque de diamètre BC	$C_1$
$BC^2 - AB^2 - AC^2 < 0$	est l'extérieur du disque de diamètre BC	$C_2$
$BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0$	est le cercle de diamètre BC	$C_3$

Remarque : toutes les fois que cette expérience a été réalisée, notons que la dernière conjecture arrive tout naturellement comme une application d'un théorème en acte très souvent utilisées en Collège et en Lycée : le théorème des valeurs intermédiaires. Notons d'autre part que l'objectif monstratif, comme dans l'expérimental en sciences physiques, n'est pas seulement, "donner à voir" mais "faire adhérer le plus vite possible à la loi mise en évidence".

### 11.2.4 Validation dans le micromonde Cabri.

Pour augmenter la plausibilité de cette conjecture, on est amené à monter une autre expérience qu'on nomme expérience de validation mais qui n'est autre que la vérification d'une condition nécessaire impliquée par la véracité du résultat conjecturé.

#### - Analyse théorique :

Si la conjecture  $C_3$  est vraie, alors tous les points A du cercle de diamètre BC vérifient dans l'environnement Cabri  $BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0 \dots$

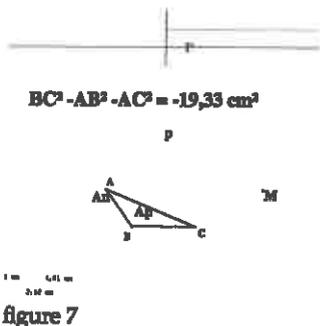
#### - Validation expérimentale

- **Montage** : on reprend le montage précédent qu'on modifie comme suit ; on trace le segment BC puis le cercle de diamètre BC. On redéfinit le point A comme point de ce cercle.

- **Protocole expérimental** : on tire le point A le long de ce cercle et on s'intéresse à l'affichage du résultat de  $BC^2 - AB^2 - AC^2$ .

- **Traitement des données** :

L'expérience réalisée conduit à remarquer qu'après la redéfinition le résultat affiché est 0,00 et qu'ensuite le déplacement de A ne modifie pas l'affichage du résultat. On peut même demander l'affichage de ce résultat avec le maximum de décimales permises par Cabri et on obtient la confirmation de la conjecture avec la précision permise par les calculs de Cabri. Ce que j'appelle une validation dans le micromonde Cabri.

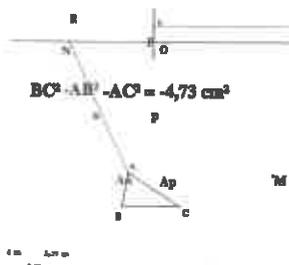


### 11.2.5 Compléments sur le montage expérimental utilisé.

Voici le détail des constructions réalisées pour obtenir les points conditionnels  $A_n$  et  $A_p$ . On construit une demi-droite (ou) puis une droite parallèle à cette demi-droite passant par O. On crée les deux demi-droites d'origine O portées par la dernière droite tracée; celle située à droite sera bleue, celle de gauche sera rouge. Le point R est le point obtenu par report de la mesure  $BC^2 - AB^2 - AC^2$  sur la demi-droite d'origine o (il peut éventuellement être situé à gauche de o si le résultat reporté est négatif) P est le projeté orthogonal de R sur la demi-droite bleue et N (P existe quand le résultat est positif) est le projeté orthogonal de R sur la demi-droite rouge (N existe quand le résultat est négatif).

Le point p est le milieu de [AP];  
 $A_p$  est défini comme le symétrique de P par rapport à p; ce point quand il existe est donc superposé à A.

Le point n est le milieu de [AN];  
 $A_n$  est défini comme le symétrique de N par rapport à n; ce point quand il existe est donc superposé à A..



### 11.2.6 Conclusion.

Faire découvrir le plus vite possible la propriété attendue, c'est à dire se livrer à une monstration au sens de Joshua est possible grâce à la subtilité des constructions des investigations et des manipulations proposées. Or tous ces paramètres dépendent de l'expertise de celui qui monte l'expérience : je veux dire ici à la fois les connaissances mathématiques et les compétences dans l'utilisation de l'instrument *Cabri* (au sens de Rabardel, c'est à dire de l'artefact avec ses schèmes pertinents d'utilisation) de celui qui a conçu le fichier *Cabri*. Les notions de montage de protocole expérimental sont des ingrédients de la démarche expérimentale qui sont formalisés grâce à cette transposition informatique de cette notion bien classique qui paraissait vieillie par les usages.

### 11.3 *Un exemple de simulation avec Cabri promenade aléatoire sur une grille.*

#### 11.3.1 Objectifs de la simulation avec son protocole expérimental.

##### Présentation du phénomène à simuler sous Cabri

A partir d'un point de départ  $D$  donné du plan on désire animer un point afin qu'il saute de manière aléatoire du point ou il se trouve jusqu'à l'un des 8 points voisins de la grille carrée définie à partir de  $D$  (cf fig. 10) et ayant pour base "horizontale" un vecteur  $\vec{AC}$  de longueur réglable. L'enchaînement de ces sauts constituera ce que j'ai appelé promenade aléatoire sur une grille.

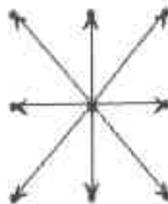


figure 10 Promenade aléatoire

##### Montage de l'expérimentation (construction de la figure Cabri)

La figure obtenue pourra être la suivante (fig.11) à la fin du montage :

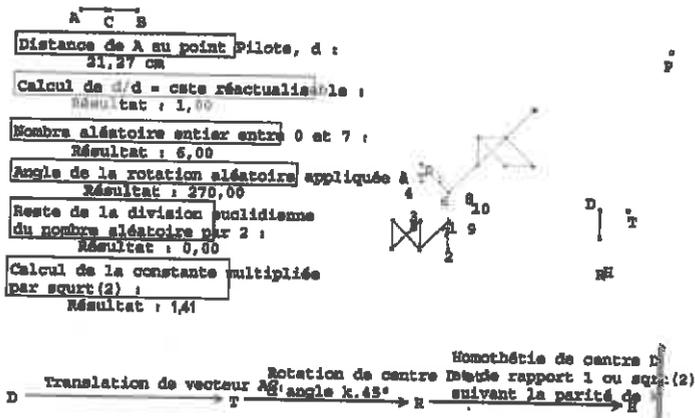


figure 11

### Les matériaux pour préparer le saut aléatoire

- Une demi-droite [AB) est créée à partir de deux points de la grille associée au repère par défaut de Cabri, situés sur la même horizontale.
- Un cercle quelconque ici représenté en pointillés est positionné à droite de l'écran. Un point appelé point pilote est créé sur ce cercle en tant que " point sur objet ". Notons que la distance de ce point à A notée d ne devra jamais être nulle. Cette distance est la première valeur numérique affichée (ici 21,27cm).
- Le rapport  $d/d$  est évalué avec la calculatrice et affiché : ici il apparaît sous la forme 1,00. Notons que ce nombre 1 est fonction de la position du point pilote en particulier (mais aussi de A). Chaque changement de position du point pilote réactualisera le calcul de ce rapport qui néanmoins donnera toujours 1. Ce résultat constamment égal à 1 sera la seconde valeur affichée.
- Ensuite, grâce encore à la calculatrice nous générons un nombre entier aléatoire compris entre 0 et 7 par la formule :  $\text{rand}(0, 8.d/d)$  éditée comme suit :

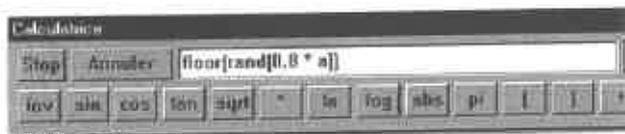


figure 12

où le  $a$  est la valeur calculée précédemment pour  $d/d$ . Le nombre obtenu est la troisième valeur affichée (ici 6). On notera ce nombre  $k$  pour la suite.

- On calcule toujours à la calculatrice le produit  $k.45$  pour obtenir un des huit angles définis par notre maillage. Ce nombre sera la quatrième valeur affichée (ici 270).
- On fait ensuite calculer (toujours avec la calculatrice) le reste de la division euclidienne de  $k$  par 2 qui donnera 1 ou 0 par la formule,  $k - 2 \cdot \text{Partie entière de } a/2$ , éditée comme suit :

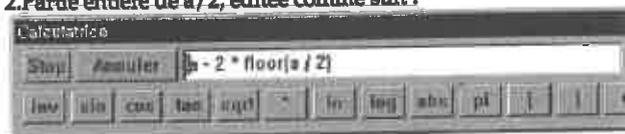


figure 13

- où  $a$  représente  $k$ . Ce nombre sera le cinquième nombre affichée (ici 0). Notons que ce reste est égal à 0 quand l'angle  $k.45$  repère une position horizontale ou verticale et il est égal à 1 quand il repère une position inclinée à  $45^\circ$ .
- Calcul de l'image du nombre précédent par la fonction affine  $y = (\sqrt{2} - 1)x + 1$ . Cette image vaut  $\sqrt{2}$  quand  $x$  vaut 1 et 1 quand  $x$  vaut 0. Ce calcul est édité dans la calculatrice comme suit :

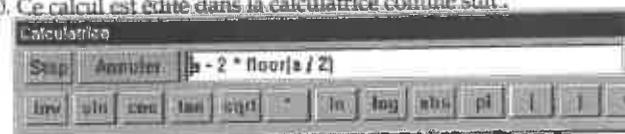


figure 14

Le résultat de ce calcul sera la sixième valeur affichée (ici 1,41) qui est l'affichage de  $\sqrt{2}$ .

#### Les transformations à composer pour effectuer le saut aléatoire

- On reporte le premier nombre affiché en C sur la demi-droite [AB) et on crée ensuite le vecteur  $\vec{AC}$ .
- On crée un point libre D dans le plan (ce point sera le point de départ de notre promenade aléatoire) qu'on transforme en T par la translation de vecteur  $\vec{AC}$ .
- On transforme ce point T par la rotation de centre D et d'angle aléatoire  $k.45$  qui est le quatrième nombre affiché pour obtenir le point R.

Ce point R est sur le maillage seulement quand  $k$  est pair, c'est à dire quand le reste évalué par le cinquième résultat affiché est 0. Quand  $k$  est impair, R est à la distance 1 de D sur une diagonale du maillage au lieu d'être situé à la distance  $\sqrt{2}$ ; c'est pourquoi :

- On transforme R par l'homothétie de centre D et de rapport le sbdème nombre affichée pour obtenir enfin le point H qui est le point obtenu à partir de D en effectuant le saut aléatoire annoncé. Remarquons que H est confondu avec R quand  $k$  est pair.

### Validation de l'algorithme de saut aléatoire

Si on tire le point pilote, les positions des images de D sont recalculées donc les points images changent aléatoirement. Notons que T se repositionne toujours au même endroit.

### Enregistrement de l'algorithme de saut aléatoire

La complexité de cette technique pour venir à bout de la tâche que nous étions imposée nous donne l'idée d'enregistrer ces constructions sous la forme d'un nouvel outil Cabri appelé macro-construction ; cet outil permettra à partir d'un point de départ D de générer le point aléatoire obtenu après un saut du genre précédent commandé par un point pilote.

La macro " Promenade aléatoire 1.mac " admet pour objets initiaux :

- Un segment qui détermine la direction horizontale du maillage sur lequel la promenade aura lieu et le sens positif sur cette horizontale (ici [AB])
- Un point qui sera notre point pilote (ici P), puis Un point qui sera le point de départ de la promenade (ici D).

Elle admettra comme objet final :

- Le point obtenu par le saut aléatoire effectué à partir de notre point de départ (ici : " Point d'arrivée ")
- le segment joignant le point de départ et le point d'arrivée du saut.

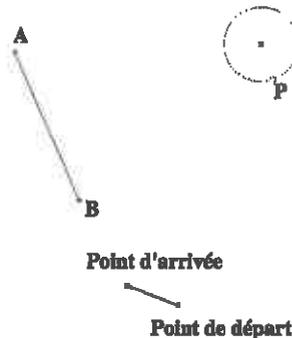


figure 15

Si on active la trace du segment joignant le point de départ au point d'arrivée et qu'on lance une animation du point pilote on voit apparaître tous les sauts possibles dans les directions du maillage indiquées par le segment [AB], comme suit :

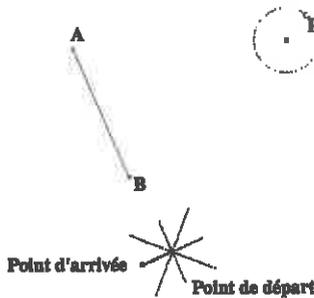


figure 16

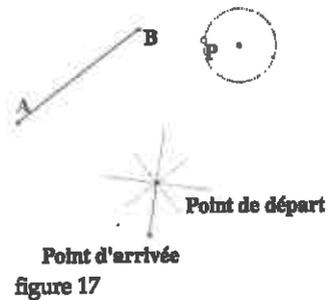


figure 17

### Enregistrement de l'algorithme de promenade aléatoire

Si on applique notre macro successivement à chaque point sur lequel nous arrivons nous obtenons un enchaînement de sauts aléatoires du même type. Lorsqu'on répète 10 fois cette opération, on peut visualiser une promenade aléatoire à 10 saut qu'on peut enregistrer sous forme d'une nouvelle macro-construction qu'on a nommé " Promenade aléatoire 10.mac " et qui sera utilisée plus loin. Celle -ci admet les mêmes objets initiaux que la précédente mais cette fois les objets finaux sont tous les segments intermédiaires et les points intermédiaires de cette promenade.

Si on déplace le point pilote, chacune de ses nouvelles positions génère une promenade différente. On en montre deux exemples ci-dessous :

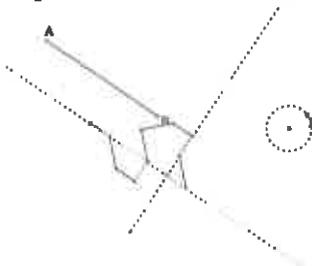


figure 18

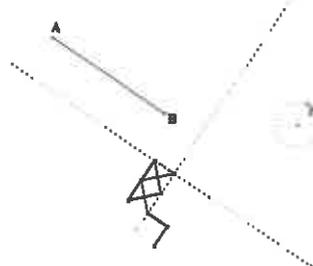


figure 19

### Validation de l'algorithme de promenade aléatoire

Si on active les traces de tous les segments intermédiaires et qu'on lance une animation du point pilote, on peut voir apparaître toutes les promenades aléatoires à 10 sauts ainsi générées :

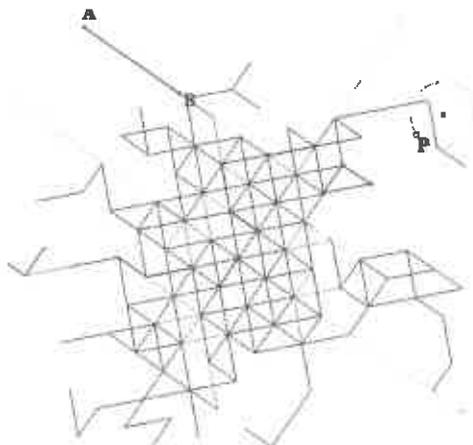


figure 20

### 11.3.2 Réalisations promenades aléatoires en vue d'un traitement statistique

On peut utiliser la seconde macro pour réaliser des échantillons de promenades aléatoires afin de s'intéresser par exemple à la distance entre le point de départ et d'arrivée. Il suffira de mesurer cette distance et de la stocker dans le tableau de Cabri. Si on lance une animation, on peut stocker toutes les distances générées aléatoirement. Ces tableaux peuvent être copiés dans le logiciel Excel par exemple pour traitement statistique.

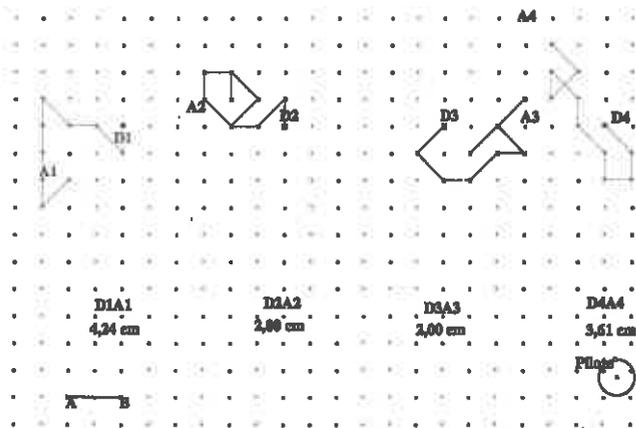


figure 21

Dans la page Cabri qui précède (figure 21), on a appliqué la macro aux points  $D_1, D_2, D_3$  et  $D_4$  pour obtenir des chemins aléatoires qui aboutissent respectivement en  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ . On a ensuite mesuré les distances  $D_i A_i$ . Si on saisit ces données dans le tableur de Cabri et qu'on lance une animation en lançant le point pilote. Le tableur va remplir 4 colonnes des distances obtenues aléatoirement à chaque chemin aléatoire généré. On peut imaginer une distribution d'échantillonnage faite à partir d'un grand nombre de point  $D_i$  avec des échantillons de distances de taille  $n$  ( $n$  compris entre 1 et 999).

### 11.3.3 Conclusion

On aura pu constater qu'on pouvait aborder avec l'outil Cabri fortement épaulé par des connaissances sur les transformations un domaine aussi inattendu que celui de la simulation en statistique. On peut imaginer faire utiliser un tel fichier par des élèves qui disposeraient donc des macros convenables pour se concentrer sur les problèmes de fluctuation d'échantillonnage. On peut envisager de faire construire un tel fichier aux élèves à condition de les guider pas à pas la première fois pour qu'il puisse répéter cette opération connue en physique sous le nom de montage. Notons que l'utilisation du fichier est régie par les règles plus connues sous le nom de protocole.

## 11.4 Déroulement de la résolution de la boîte noire.

### 11.4.1 Entrée en matière.

Le fichier Cabri préparé par moi est ouvert et l'écran de l'ordinateur rétro projeté apparaît aux participants comme il est reproduit ci à droite ; deux points  $m$  et  $M$  de couleurs et d'épaisseurs différentes sont seuls présents sur la page Cabri (BNLIEGE).



### 11.4.2 Proposition du problème.

Je fais constater aux participants que je peux me saisir du point rouge  $m$  pour le tirer où je le désire. Je fais aussi constater que le déplacement de  $m$  commande le déplacement de  $M$ .

Je fais constater que je ne peux me saisir du point  $M$ . J'affirme que le point  $m$  a été transformé en  $M$  par une transformation que je connais et qui est cachée dans une macro construction (outil que j'ai créé transformant tout point de la page Cabri en son image par ma transformation cachée).

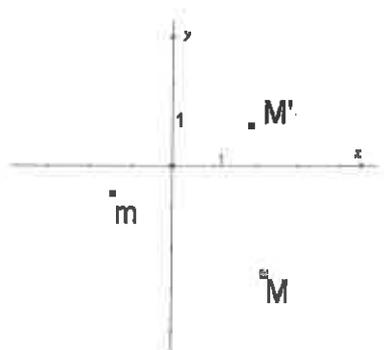


Le but du problème est la mise en évidence de cette transformation par tous les moyens qui seront proposés par les participants. Je me contenterai d'être le "sherpa" (dans le sens proposé par Luc Trouche). En réalité, je serai un peu plus que le sherpa puisque je précise que je demanderai à Cabri de réaliser toute manipulation possible à condition qu'elle soit suggérée par l'auditoire.

### 11.4.3 Première attaque.

Le démarrage se fait sur les chapeaux de roues ; la première proposition fuse : on me demande d'appliquer la transformation cachée au point image  $M$  pour voir s'il ne se transforme pas en  $m$ .

L'expertise du public lui fait donc d'entrée de jeu prendre une initiative spécifique que je n'avais jamais rencontrée auparavant : la transformation  $f$  vérifie-t-elle  $f \circ f = \text{identité}$ ? Je suis obligé de faire apparaître le système d'axes car ma macro construction admet ces axes comme objets initiaux et j'applique la macro à  $M$  pour obtenir  $M'$ .



Le public peut constater que le point  $M'$  image de  $M$  n'est pas confondu avec  $m$ . Je tire le point  $m$  dans tous les sens de manière aléatoire sur la page sans pouvoir réussir à le superposer à  $M'$ . Je propose donc de cacher à nouveau les axes avant de continuer. On me demande aussi d'effacer le point  $M'$ , ce que je fais.

#### 11.4.4 Seconde attaque.

On me demande de déplacer horizontalement le point  $m$  après avoir préalablement activées les traces de  $m$  et  $M$ .



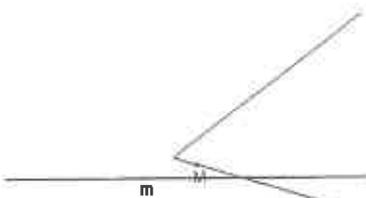
On obtient le résultat ci-contre qui surprend le public.



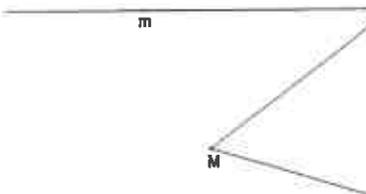
Il m'est demandé ensuite de faire apparaître l'image d'une droite, ce qui est réalisé de la manière suivante : On construit d'abord une droite qui apparaît ici horizontale.



On redéfinit le point  $m$  comme point de la droite créée et je demande le lieu de  $M$  quand  $m$  varie sur cette droite et on voit donc apparaître l'écran de droite où cette image semble être constituée de la réunion de deux demi-droites de même origine.

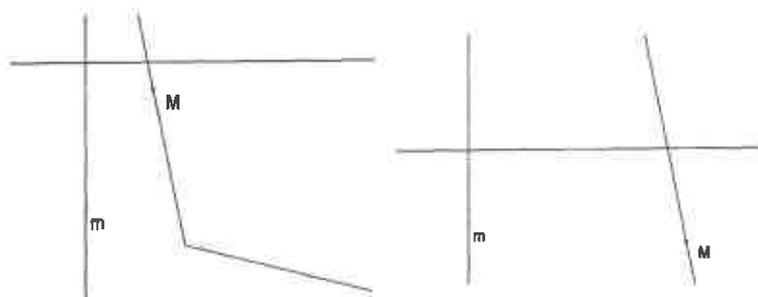


Il m'est demandé de déplacer la droite d'appartenance de  $m$ , ce que je fais en tirant sur le point initialement créé pour cette droite. Celle-ci se déplace parallèlement à elle-même et l'image ne change pas de forme.



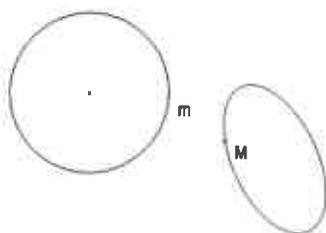
Le public désire ensuite voir apparaître l'image d'une droite perpendiculaire à la précédente. Je trace donc une droite perpendiculaire à la précédente et redéfinit le point  $m$  sur cette droite. L'image est réactualisée.

instantanément. Les deux écrans suivants montrent comment cette image peut changer suivant la position de cette perpendiculaire.



Je sens mon public déstabilisé par l'originalité des images possibles mais son expérience en géométrie et son début d'expertise des outils spécifiques à ce logiciel leur fait proposer une autre initiative.

On me demande de déterminer l'image d'un cercle. Je construis donc un cercle et redéfinit le point m sur ce cercle pour faire apparaître son image qui a la forme ovale que l'on voit ci à droite. On me fait tourner m sur son cercle d'appartenance et le public constate que son image M tourne dans le même sens sur sa courbe image qui est qualifiée par certains d'ellipse.

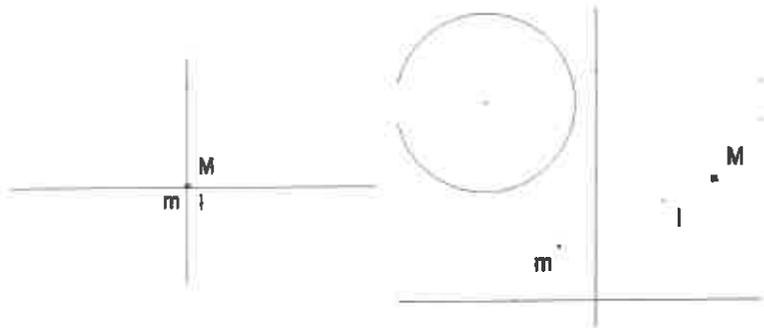


La piste de recherches d'images d'objets classiques, droites et cercles dans des configurations particulières est soudainement abandonnée.

#### 11.4.5 La piste des points invariants.

Le public me demande de libérer le point m pour essayer de le mouvoir jusqu'à une position où il pourra être superposé à son image. Le guidage est rapide et efficace. Le public s'accorde rapidement pour privilégier un point qu'on me demande de marquer. Pour cela j'adopte l'attitude de sherpa amélioré en donnant une construction qui me permet de tracer un point repérant cette position particulière de m. Il suffit de tracer une première droite passant par un premier point puis une seconde droite passant par un second point (ces deux droites ont été créées pratiquement perpendiculaires sur l'écran qui suit). Il suffit ensuite de les positionner en sorte

qu'elles se coupent sur la position voulue, de créer leur point d'intersection I puis de redéfinir ce point comme un point libre donc ne dépendant plus des droites qui ont servi à le créer.

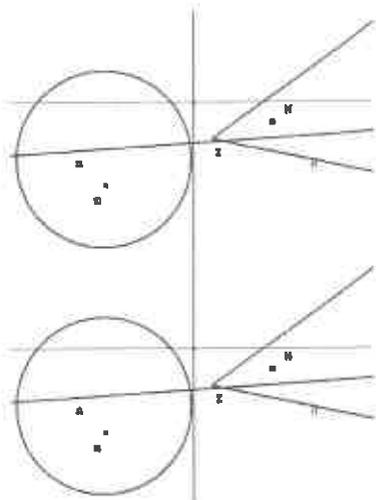


Sur le dernier écran, on a tiré sur le point  $m$  pour l'écartier de cette position particulière, laissant apparaître le point  $I$  qui semble être un point invariant de la transformation.

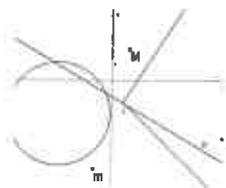
#### 11.4.6 Retour a des recherches d'images de droites.

Il m'est demandé immédiatement après de déterminer l'image d'une droite passant par ce point  $I$ . On en trace donc une sur laquelle on crée un point générique  $n$  à qui on applique la macro pour obtenir son image  $N$ . Le lieu de  $N$  nous donne l'image désirée.

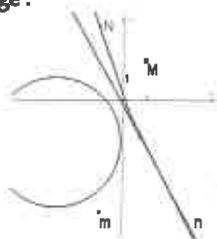
On me demande ensuite de faire pivoter cette droite autour de  $I$ ; on arrive à faire se rapprocher notre paire de "demi-droites" de la droite d'appartenance de  $n$ .



On me fait continuer cette exploration comme suit :

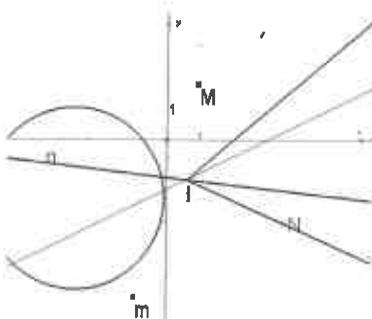


On essaie ensuite de me faire trouver une position où la droite donnée se superpose à son image :



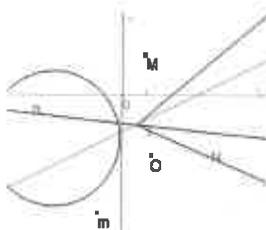
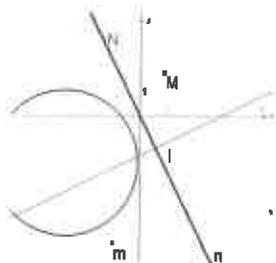
On me fait ensuite revenir à la position précédente où l'image de notre droite semblait être une demi-droite. On me demande de tracer la droite (passant par I) sur laquelle notre droite et son image semblent être incluses.

On a fait pivoter cette droite jusqu'à la position recherchée puis on a écarté la droite d'appartenance de n laissant bien visible la droite désirée. On a fait pivoter cette droite jusqu'à la position recherchée puis on a écarté la droite d'appartenance de n laissant bien visible la droite désirée.



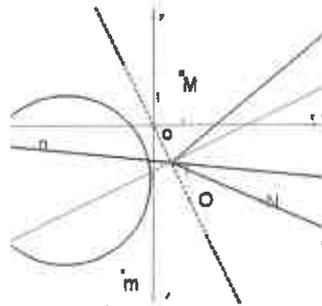
On me fait à nouveau pivoter la droite rouge jusqu'à la position où son image se superpose à elle :

Pour valider cette conjecture, on me demande d'écarter la droite rouge pour construire l'image de l'origine o par la transformation cachée en appliquant la macro qui la cache. On obtient le point O :



On fait remarquer qu'on obtient une droite ayant direction orthogonale à la direction verte semblant passer par l'origine o du repère et que la restriction de la transformation cherchée semble être une symétrie par rapport à la droite verte. La conjecture semble validée visuellement. On me propose quand même de construire le milieu du segment [oO]. On trouve le point J qui semble se superposer à I.

Je note qu'on ne me demande pas de mesurer l'angle fait par la droite verte et [oO], mais de tracer la droite (oO) qui apparaît ici en pointillés.

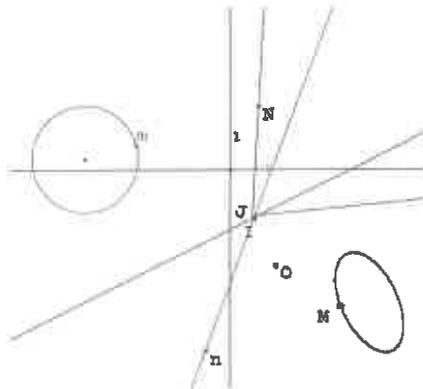


L'attention du public se concentre maintenant sur le cercle qui avait été laissé de côté. La suite va montrer que les participants vont essayer d'établir un lien entre ces images et les droites précédemment mises en évidence....

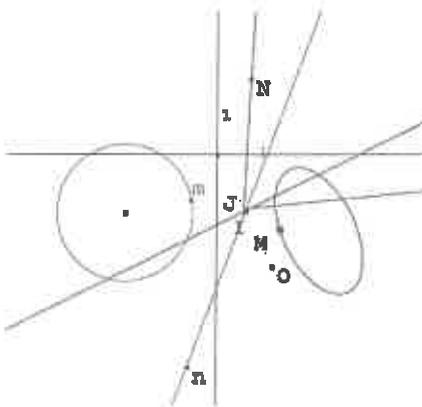
#### 11.4.7 Retour à des recherches d'images de cercles.

La proposition d'investigation qui est faite est la suivante : trouver l'image d'un cercle centré en I. Pour cela, nous avons été amenés à faire dans l'ordre les manipulations qui suivent.

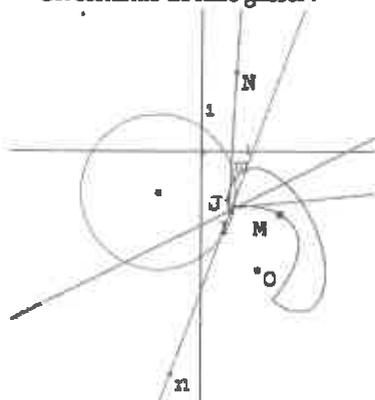
On commence donc par redéfinir le point m comme un point du cercle oublié et on voit donc apparaître son image en bleu qui a une forme ovale :



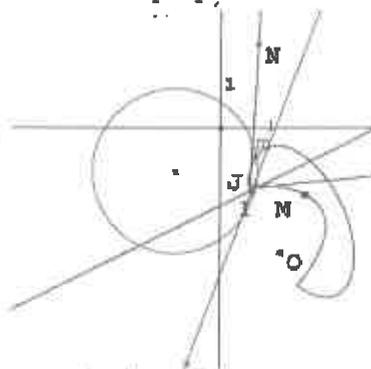
Ensuite on se saisit du centre pour faire glisser le cercle rouge; on voit simultanément son image évoluer :



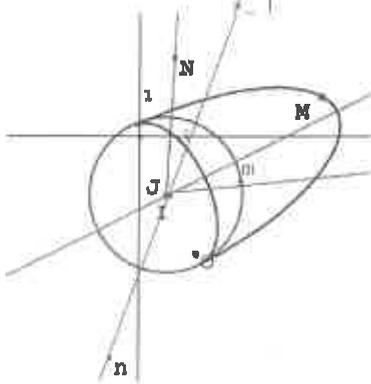
On continue de faire glisser :



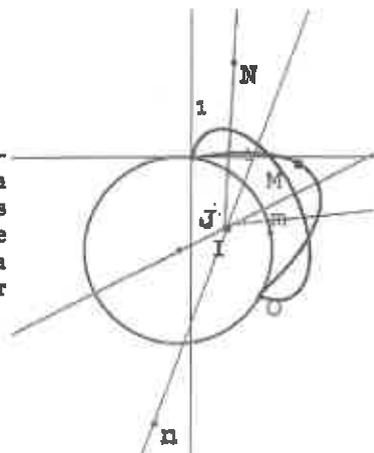
Encore une peu plus :



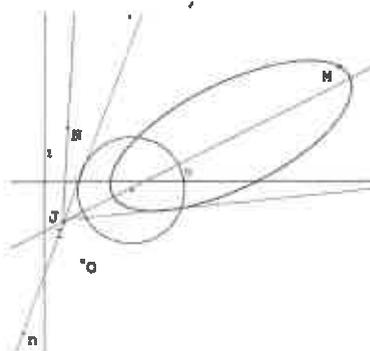
La surprise est déjà grande ; elle augmente encore plus quand on arrive à la position recherchée :



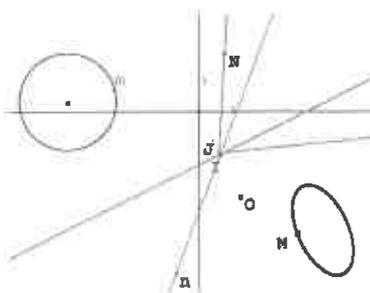
Surprise mais pas découragement car vraisemblablement la symétrie de la figure incite les participants à proposer de faire glisser ce cercle le long de la droite verte. On obtient pour commencer :



Cet écran a été obtenu quand on a fait glisser le centre vers la droite. Certains participants prononce le mot d'affinité dans des affirmations du type " il y a une affinité ", " ça contient une affinité " et d'autres que je n'ai pu percevoir.



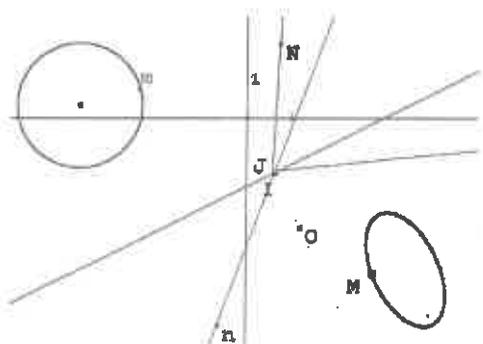
Immédiatement après cette manipulation, il m'est demandé de repositionner le cercle à sa position initiale. L'écran obtenu est le suivant :



Cette fois c'est le mot symétrie qui surgit : on m'évoque une symétrie axiale d'axe la droite verte.

#### 11.4.8 Une dernière construction-investigation pour essayer d'aboutir.

Cette évocation est suivie quasi instantanément de la demande de construction du symétrique du cercle de départ par rapport à cette droite verte. Le cercle obtenu est dessiné ci-dessous en pointillés.



Le temps qui était imparti à cet atelier étant dépassé, nous décidons de mettre fin à la recherche.

#### 11.4.9 Quelques remarques pour conclure.

##### Quelques remarques brutes.

La boîte noire n'a pas été solutionnée, mais : Des initiatives ont été prises, variées mais en liaison forte avec les connaissances mathématiques du public et aussi ses connaissances du logiciel (notons que la première partie de l'atelier, très monstrative a permis une instrumentalisation accélérée de ce public particulier).

Les investigations menées se sont assez rapidement enchaînées de manière structurée après une phase d'accumulations de données.

Les conjectures pensées n'ont jamais été explicitées de manière claire.

Les validations ont souvent été du type visuel et rarement du type visuel-abstrait dans le micromonde Cabri (par exemple on n'a pas essayé pour valider une hypothèse de symétrie axiale de vérifier les propriétés mathématiques caractérisant le fait que deux points étaient bien disposés de manière symétrique, c'est à dire une propriété de distance et d'orthogonalité).

##### Les objectifs de cet atelier.

Les objectifs immédiats était de montrer :

- qu'une instrumentalisation à l'outil Cabri était possible à partir d'une recherche de boîte noire menée en commun, y compris avec un public d'experts en géométrie.
- qu'une dévolution rapide pouvait être obtenue pour un tel type de problèmes.
- qu'une démarche expérimentale effective se met en place où le débat scientifique prend une forme originale et riche : c'est un dialogue où chaque question est une proposition d'investigation et chaque réponse ou critique en est une autre qui vient lui répondre comme un écho déviant ou amplificateur. Cette démarche déjà observée de multiples fois avec des publics de tous âges et de tous niveaux est donc confirmée dans un public expert en géométrie.

#### Les objectifs plus profonds :

En liaison avec la thèse que je prépare sur la démarche expérimentale en Mathématiques, cette atelier a constitué pour moi une expérience de validation des hypothèses que j'ai formulées sur la caractérisation formelle d'une telle démarche. Ces hypothèses ont pu être émises grâce à des analyses de résolutions de boîtes noires qui m'ont servi à la fois de microscope et de télescope (pour ne pas parler de microscope avec le double sens qu'on pourrait lui affecter) pour découvrir ces hypothèses sur les différentes phases d'une démarche expérimentale ainsi que sur les liens entre ces phases.

Une partie de ma thèse contiendra donc l'analyse de ce compte rendu à la lumière des hypothèses faites. Ma grille de lecture et d'analyse permettra in fine de mieux réfléchir une ingénierie didactique intégrant l'expérimental dans l'enseignement des Mathématiques et dans la conception de problèmes plus consistants que les problèmes fermés qui sont le lot des évaluations dans notre système éducatif.

#### En guise de conclusion :

La tâche de résolution de problème nécessite la connaissance de techniques qui sont le plus souvent données pour ne pas laisser l'élève perdu au milieu de l'océan des théorèmes. Les problèmes de boîtes noires donnent l'occasion à l'élève de ne pas exiger les techniques qui habituellement lui sont indispensables mais au contraire de se livrer à des investigations en liaison avec des techniques connues, c'est à dire d'être réellement actif au sens mathématiques du terme. Notre devoir est de réfléchir à la manière dont la transposition didactique des notions abordées par ce blais se met en place. Il ne faudrait pas que des schèmes d'usages se mettent en place de manière sauvage dans ce type de démarche, la démarche expérimentale où l'induction a la place importante que lui reconnaissait Polya il y a plus de cinquante ans. Les protocoles expérimentaux des sciences expérimentales se retrouvent dans la démarche expérimentale en Mathématiques dans les méthodes d'investigations, les procédures pilotées par le

*Trois exemples pour illustrer la démarche expérimentale avec Cabri* 155

**Professeur :** on retrouve donc l'instrumentalisation qui peut concerner les outils abstraits comme les outils technologiques.



## Bibliographie

- [1] Friedelmeyer J.P. *Les aires : outil heuristique outil démonstratif*, 1998, Repères IREM N°31 TOPIQUES éditions 39-62.
- [2] Glaeser G. *Analyse et Synthèse*, 1986, Publication de l'A.P.M.E.P. N°76.
- [3] Joshua M.A., Joshua S. *Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique*, 1987, (première partie). Recherche en didactique des Mathématiques, 8, (3), 231-266.
- [4] Joshua M.A., Joshua S. *Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique*, 1988, (deuxième partie). Recherche en didactique des Mathématiques, 9, (1), 5-30.
- [5] Kuntz G. *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*, 1993, Repères IREM N°11 TOPIQUES éditions 5-31.
- [6] Millar R. *Investigations des élèves en science : une approche fondée sur la connaissance* (page 9) Didaskalia N°9.
- [7] Polya G. *Les Mathématiques et le raisonnement plausible*, 1957, Gauthier-Villars.
- [8] Perrot F. et Tadjeddine M. *Apprentissage de l'expérimentation en physique* : Didaskalia N°6.
- [9] Sous la direction de J.P. BOUVIER avec J.J. DAHAN *Première S Math*, 1999, Éditions Belin.
- [10] Sous la direction de J.P. BOUVIER avec J.J. DAHAN *Seconde Math*, 2000, Éditions Belin. Éditions Belin.
- [11] Dahan J.J. *Enseigner et pratiquer les Mathématiques avec Cabri* Brochure IREM de Toulouse.
- [12] Dahan J.J. *Introduction à la Géométrie avec la TI-92* Ellipses Publishing.
- [13] *Mathematics in showing all the hidden stages of a true research. Examples with Cabri.* ATCM 2002 Melaka.  
[http://www.irem.upe-tlse.fr/Groupe/MathInfo/Kuis/Cople1\\_CONF\\_ATCM\\_2002.htm](http://www.irem.upe-tlse.fr/Groupe/MathInfo/Kuis/Cople1_CONF_ATCM_2002.htm)
- [14] *Apprentissage à la recherche des problèmes inversés. Approche de problèmes "difficiles" Mini-cours.*

**Cabriworld 2001 Montréal**

<http://www.iam.upa-tsa.fr/Groupe/MathInfo/CMontreal/minicours/CM0confmontreal.htm>

- [15] *Using the new tools of Cabri II plus to teach functions*  
T3 2003 Nashville

[http://www.iam.upa-tsa.fr/Groupe/MathInfo/Nashville/nashville\\_sonf.pdf](http://www.iam.upa-tsa.fr/Groupe/MathInfo/Nashville/nashville_sonf.pdf)