10

Le problème de Rudolf Bkouche ou la construction du quadrilatère de Ptolémée.

Frédéric Vivien, Luc Sinègre, Thierry Hamel.

10.1 *Introduction.*

En marge du colloque, comme c'est souvent le cas, on pose des questions qui ne restent pas toujours sans réponse. C'est la résolution d'un tel problème, après une fameuse visite de *Stavelot,* que l'on propose ici.

Ainsi Rudolf Bkouche, martelait-il à Liège qu'un quadrilatère convexe articulé $ABCD$ de côtés fixés est d'aire maximale si et seulement si il est inscriptible dans un cercle et il s'interrogeait :

Comment le construire ?

C'est-à-dire comment construire un quadrilatère convexe inscriptible tel que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$,.

Le lecteur qui aimerait revenir sur le théorème de Ptolémée lui-même et à une démonstration élémentaire de l'assertion de Rudolf pourra se reporter à l'exposé de Thierry Hamel[3]. La démonstration la plus efficace repose sur les propriétés de l'inversion, et elle a servi de modèle à notre construction. On la trouve exposée dans tous les livres de Terminale antérieurs à

1970 ou encore dans Berger[2]. Il faut signaler qu'on peut produire une démonstration aussi élégante grâce aux propriétés des triangles semblables, maintenant de nouveau enseignées dans les Lycées. Evelyne Barbin a écrit l'historique ce cette démonstration[1] depuis les *Elements de Géométrie* du père B. Lamy.

10.2 *Analyse.*

Soit $ABCD$ quatre points cocycliques sur un cercle de centre O avec

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c \text{ et } DA = d.$$

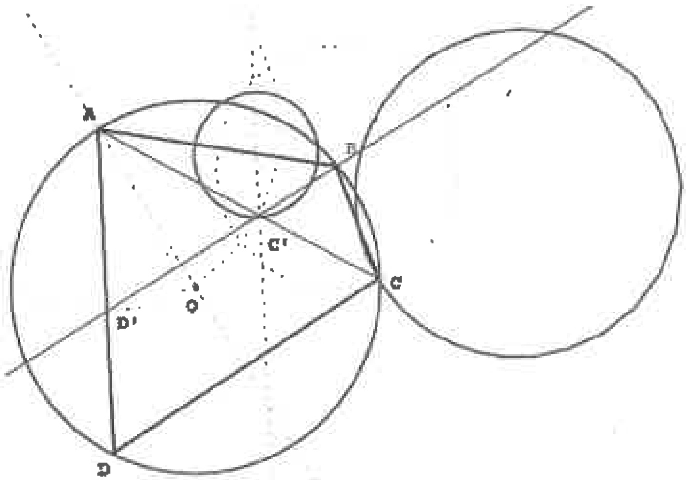

FIG. 10.1 – Construction Ptolémée.

L'inversion de pôle A et de rapport a^2 laisse B invariant et envoie C et D respectivement en C' et D' situés sur la perpendiculaire passant par B à la droite (AO) (*cf* figure 10.1).
On a

$$B'C' = \frac{a^2 b}{AB.AC} \quad C'D' = \frac{a^2 c}{AC.AD} \quad AD' = \frac{a^2}{d}$$

Si bien que

$$\frac{B'C'}{\frac{b}{a}} = \frac{C'D'}{\frac{c}{d}} = \frac{B'D'}{\frac{b}{a} + \frac{c}{d}}$$

[1] On a donc
$$\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{bd}{bd+ca}$$
Le point C' appartient donc à l'image du cercle de centre A et de rayon AD' par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{bd}{bd+ca}$. Le point C appartient donc à l'image de ce cercle par la première inversion ce qui paraît suffisant pour le construire compte-tenu qu'il est sur le cercle de centre B et de rayon b.

[1] C' appartient au segment $[BD']$ si l'on pris le quadrilatère $ABCD$ convexe.

10.3 *Synthèse.*

Pour construire un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle tel que

$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c \text{ et } DA = d,$$

on procède ainsi :
On place un segment $[AB]$ de longueur a. Le cercle de centre A et de rayon $\frac{a^2}{d}$ a pour image, par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{bd}{bd+ac}$ (rapport constructible), un cercle que l'on notera γ. Pour finir, on construit l'image γ' de γ par l'inversion de pôle A qui laisse fixe le point B. γ' coupe le cercle de centre B et de rayon b en deux points dont l'un sera la solution. D se construit alors sans peine.
La figure (figure 10.2) qui suit illustre cette construction sous *Cabri géomètre* lorsqu'on se donne les distances a, b, c et d sur un axe.

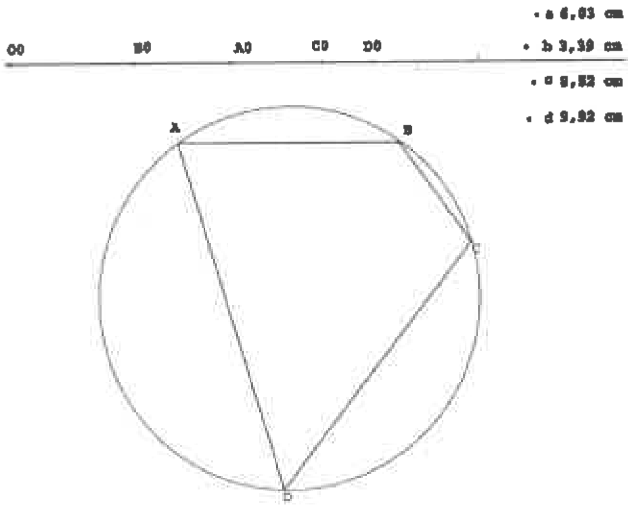

FIG. 10.2 – Synthèse.

Bibliographie

[1] Barbin Evelyne *La figure et l'espace* Dans les actes du huitième colloque Inter-Irem Epistémologie et Histoire des mathématiques Irem Lyon.

[2] Berger Marcel *Géométrie* vol2, Paris, Nathan, 1979.

[3] Hamel Thierry *Autour des quadrilatères inscriptibles et du théorème de Ptolémée. Des applications de la seconde à la terminale.* Dans Pourquoi Aimer Encore Faire des mathématiques I, Irem Rouen, 1994.