9

Le paralléloplane

Thierry Hamel.

9.1 *Enoncé originel du problème.*

(tel qu'il nous a été proposé par Henry Plane, un beau jour d'été $2002\ldots$)

On considère un parallélogramme $ABCD$; dans son plan, tout point M peut être projeté sur ses côtés parallèlement aux autres : pour être précis autant qu'exact, on trace les parallèles à (AD) et à (AB) passant par M qui viennent couper respectivement (AB), (BC), (CD) et (DA) en H, K', H' et K (*cf* figure 9.1). On démontre que, quelle que soit la position du point

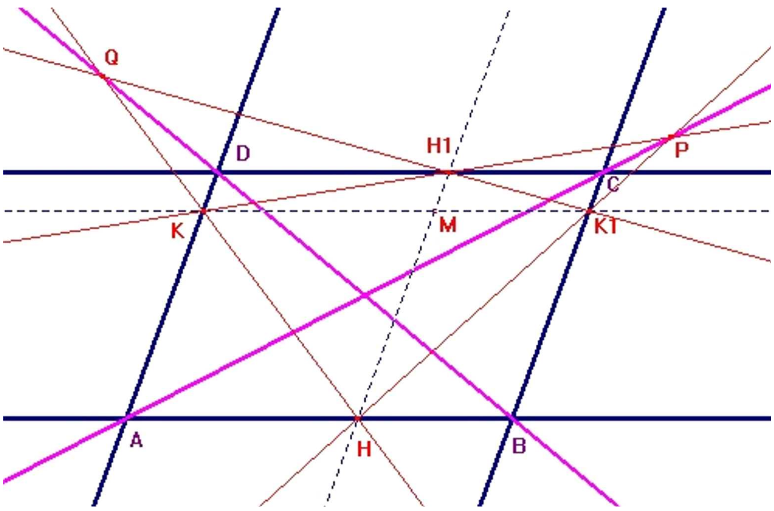

FIG. 9.1 –

M, les droites $(H'K)$ et (HK') se coupent sur la diagonale (AC) et " symétriquement " les droites (HK) et $(H'K')$ se coupent sur la diagonale (BD).

On introduit ainsi une double transformation du plan :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \mapsto & [(AC) \times (BD)] \\ & M & \mapsto & (P, Q) \end{array}$$

qu'on pourra décomposer naturellement :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^2 & \mapsto & (AC) \\ & M & \mapsto & P \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi_2 : & \mathbb{R}^2 & \mapsto & (BD) \\ & M & \mapsto & Q \end{array}$$

9.2 *Généralisation :*

Un "*basculement*" du plan du parallélogramme dans $\mathbb{R}^3$ nous amène directement dans le plan projectif $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$:

Soient quatre points A, B, C, D tels que les droites (AB) et (CD) se coupent[1] en S et (AD) et (BC) se coupent en T ; par tout point M du plan du quadrilatère $ABCD$ on trace les droites (SM) et (TM) qui coupent respectivement, la première (AD) en K et (BC) en K', la seconde (AB) en H et (CD) en H'. (*cf* figure 9.2) Les droites $(H'K)$ et (HK') se coupent toujours sur

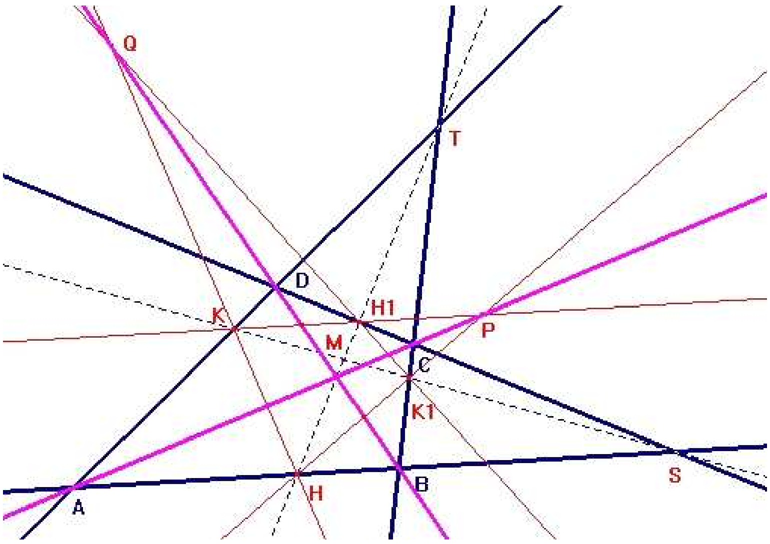

FIG. 9.2 –

(AC) et les droites (HK) et $(H'K')$ se coupent[2] toujours sur (BD).
On retrouve bien sûr les transformations du paragraphe précédent complétées à l'infini.

[1] On a choisi une droite à l'infini, il s'agit de la droite (ST).

[2] Le passage du résultat en projectif est trivial puisqu'il n'est présentement question que de droites ! Il suffira donc pour la démonstration du résultat de se restreindre au plan affine avec ses parallèles…

On peut écrire cet énoncé projectif plus projectivement ! Considérons (*cf* figure 9.3) deux faisceaux de droites, le premier engendré par d_1, d_2 sécantes en S, et le second par δ_1, δ_2 sécantes en T. Soit d une droite appartenant au premier faisceau et δ une droite appartenant au second, d et δ se coupent en M, d coupent δ_1 en K et δ_2 en K', δ coupe d_1 en H et d_2 en H'. Le résultat final est que les droites $(H'K)$, (HK') et (AC) appartiennent au même faisceau concourant au point P, d'une part et d'autre part, les droites (HK), $(H'K')$ et (BD) appartiennent au même faisceau concourant au point Q.
Poussons cette logique projective jusqu'au dual de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. Le faisceau de

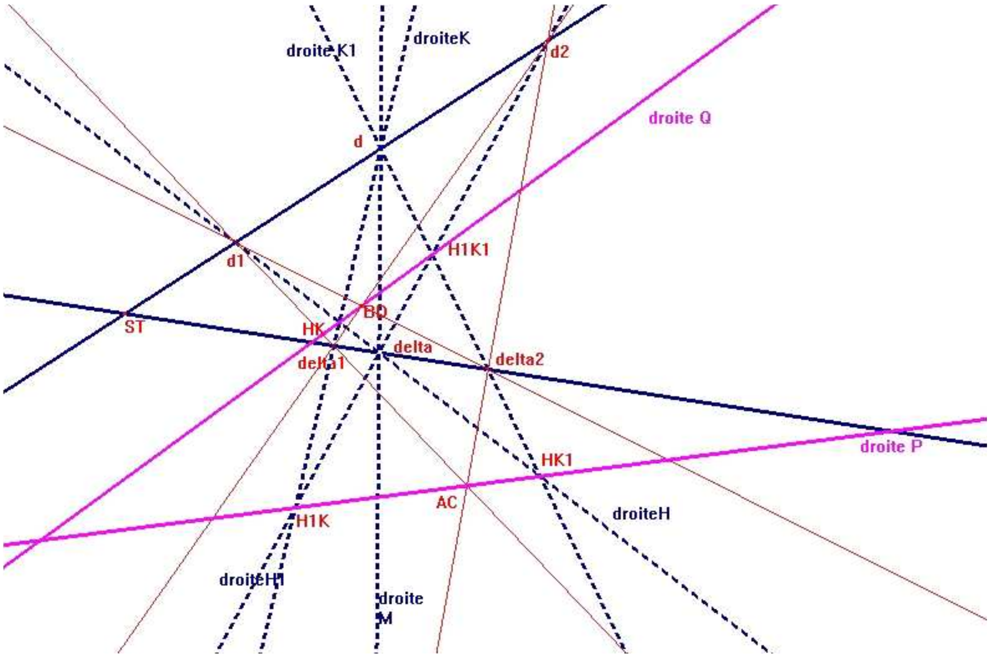

FIG. 9.3 –

droites $(d_1 d_2)$ [respectivement $(\delta_1 \delta_2)$] devient une droite du dual contenant le " point " d [respectivement le " point " δ], ces deux faisceaux se coupent en le point (ST)(*cf* figure 9.3)[qui est la droite commune aux deux faisceaux]. Les droites duales $(d_1\delta_1)$, $(d_1\delta_2)$, $(d_2\delta_1)$, $(d_2\delta_2)$, $(d\delta)$, $(d\delta_1)$, $(d\delta_2)$, $(d_1\delta)$, $(d_2\delta)$ correspondent aux points A, B, D, C, M, H, H', K, K' ; Les intersections duales $H' \cap K$, $H \cap K'$ et $A \cap C$ sont alignées ainsi que les intersections $H \cap K$, $H' \cap K'$ et $B \cap D$: c'est le théorème de *Pappus* qui le dit ! C'est la version duale et sa démonstration du résultat annoncé.

9.3 *Démonstration plus basique de la propriété du paralléloplane*

En fait pour prouver la proposition dans son état initial, il suffit d'utiliser convenablement un autre théorème en us, j'ai nommé cette fois-ci celui de Ménélaus.

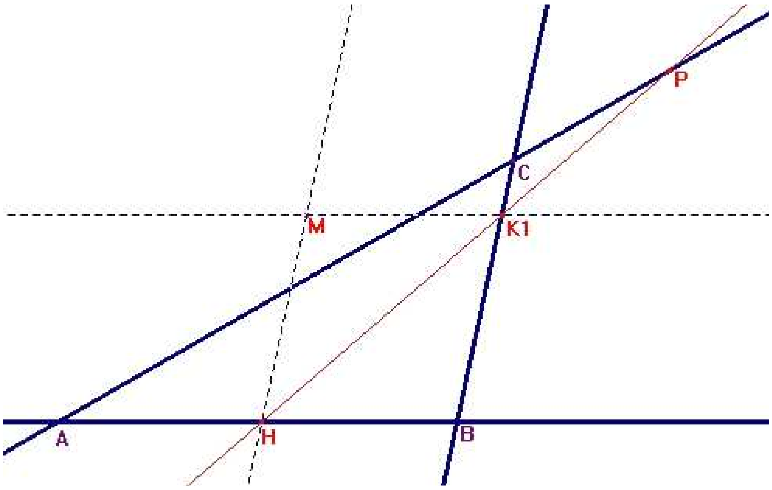

FIG. 9.4 –

Reprenons les hypothèses de la page 117 et nommons P [respectivement P'] l'intersection de $(H'K)$ avec (AC) [respectivement (HK') avec (AC)].
Le théorème de *Ménélaus* appliqué dans le triangle ADC (respectivement ABC] donne :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{H'D}}{\overline{H'C}}$$

$$\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{K'A}}{\overline{K'C}} \times \frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}$$

Une ombre de Thalès sous les hypothèses originelles :

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{K'B}}{\overline{K'C}} \text{ d'une part } \frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{H'D}}{\overline{H'C}} \text{ d'autre part,}$$

mène à l'égalité :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'C}}$$

d'où la coïncidence recherchée : $P = P'$.

Bien sûr, une composition d'homothéties bien choisies donne rigoureusement la même démarche.
si on appelle h_H, h_K, $h_{H'}$, $h_{K'}$ les homothéties dont les centres sont donnés en indice et qui transforment respectivement A en B, A en D, D en C, B en C, on se rend à l'évidence que les composées $h'_H \circ h_K$ et $h_{K'} \circ h_H$ sont deux homothéties qui transforment toutes deux A en C et ont même rapport (*Thalès*) : elles ont donc même centre autant dire $P = P'$!

9.4 *Approche analytique dans le plan affine*

On peut se fixer le repère $\Re$ = (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) de sorte que O soit le centre du parallélogramme, $\vec{i}$ le vecteur ($\vec{OB}$), $\vec{j}$ le vecteur ($\vec{OC}$) [*cf* figure 9.6].

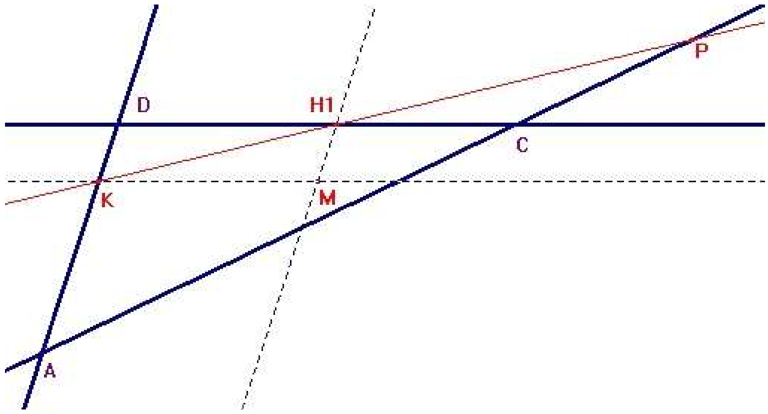

FIG. 9.5 –

On pose M de coordonnées $(x_0; y_0)$. On obtient par le calcul le plus élé-

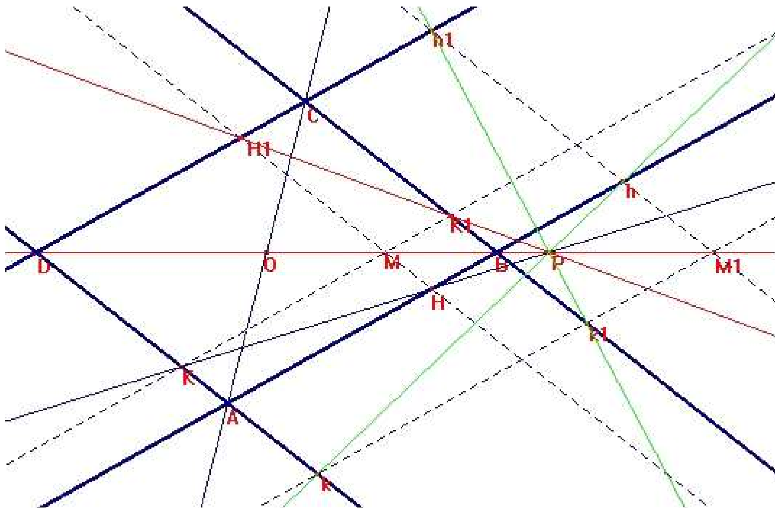

FIG. 9.6 –

mentaire les coordonnées :

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_0+y_0+1}{2} \\ y_H = \frac{x_0+y_0-1}{2} \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x_{H'} = \frac{x_0+y_0-1}{2} \\ y_{H'} = \frac{x_0+y_0+1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_0-y_0-1}{2} \\ y_K = \frac{-x_0+y_0-1}{2} \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x_{K'} = \frac{x_0-y_0+1}{2} \\ y_{K'} = \frac{-x_0+y_0+1}{2} \end{cases}$$

puis les équations de droites :

$$(HK')\ (x_0-1)x - y_0 y = \frac{x_0^2 - y_0^2 - 1}{2} \; ; \; (H'K)\ (x_0+1)x - y_0 y = \frac{x_0^2 - y_0^2 - 1}{2}$$

$$(HK)\ x_0 x - (y_0+1)y = \frac{x_0^2 - y_0^2 + 1}{2} \; ; \; (H'K')\ x_0 x - (y_0-1)y = \frac{x_0^2 - y_0^2 + 1}{2}$$

et enfin les points :

$$P\left\{\begin{array}{c} x_P = 0 \\ y_P = \frac{1}{2}\left[y_0 + \frac{1}{y_0} - \frac{x_0^2}{y_0}\right] \end{array}\right. \quad ; \; Q\left\{\begin{array}{c} x_Q = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{1}{x_0} - \frac{y_0^2}{x_0}\right] \\ y_Q = 0 \end{array}\right.$$

Pour rompre avec la routine (jusqu'alors on a privilégié le point P) et pour rester confortablement le long de l'axe des abscisses, observons que la transformation notée page 118, φ_2 restreinte à la diagonale (BD) c'est-à-dire l'axe des abscisses s'écrit :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & (BD) & \mapsto & (BD) \\ & M_0(x_0) & \mapsto & Q\,\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \end{array}$$

ce qui amènent deux réflexions :

1. Q est le milieu du segment qui joint M à son inverse [que nous noterons dorénavant M'], par l'inversion de centre O et de puissance 1 ;
2. Q est l'image de deux points situés sur l'axe (BD) à savoir ces deux inverses M et M'. Ceci répond très partiellement à la question de la réciproque des transformations φ_i, $i = 1,\, 2$. [*cf* figure 9.7]

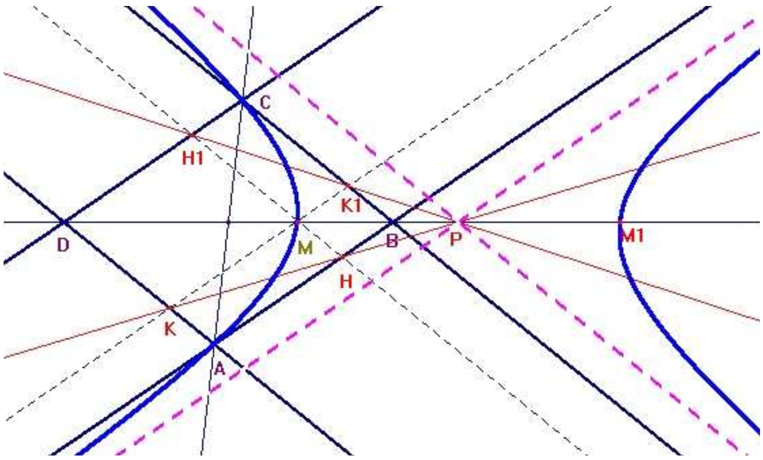

FIG. 9.7 –

Plus généralement on observe que les antécédents par φ_2 dans le plan tout entier sont les points $M(x_0; y_0)$ vérifiant :

$$x_0^2 - y_0^2 - 2x_Q x_0 + 1 = 0$$

on reconnaît une hyperbole (équilatère dans le repère choisi). [*cf* figure 9.7].

Concluons ce paragraphe sur les remarques suivantes :

1. A chaque point Q de la diagonale (BD) [respectivement P sur (AC)] correspond par φ_2^{-1} [respectivement par φ_1^{-1}] une hyperbole :
il s'agit de l'hyperbole[3] de centre Q [respectivement P] dont les asymptotes sont parallèles aux côtés du parallélogramme initial et qui passe par A et C [respectivement B et D].
2. Si on se fixe un point P sur (AC) et un point Q sur (BD), on trouve deux antécédents par φ qui sont les deux autres points d'intersections des deux hyperboles, je dis les deux autres puisqu'elles ont en communs leurs points à l'infini et que deux coniques se coupent en au plus quatre points réels.

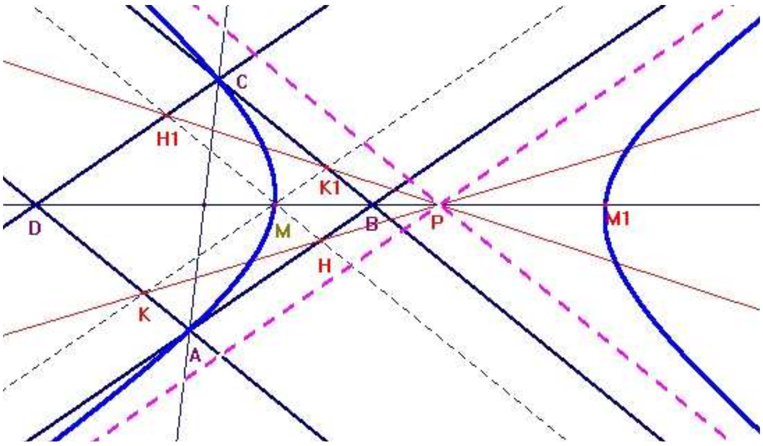

FIG. 9.8 –

9.5 *Point de vue barycentrique dans le plan affine*

Reprenons encore les notations de la page 117, on peut dire que le point M partage le parallélogramme $ABCD$ en quatre parts [*cf* figure 9.9] $\pi_C = MHAK$, $\pi_D = MHBK'$, $\pi_A = MK'CH'$, et $\pi_B = MH'DK$; on vérifie aisément que M est le barycentre du système

$$\{(A;\, \text{aire}(\pi_A));\ (B;\, \text{aire}(\pi_B));\ (C;\, \text{aire}(\pi_C));\ (D;\, \text{aire}(\pi_D))\},$$

le mot " aire " étant pris dans son sens algébrique conventionnel, c'est-à-dire compté négativement quand son bord est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre (par exemple π_A est dans le sens des aiguilles d'une montre sur la figure 9.9, donc son aire est un nombre négatif...)
Par exemple, si on pose, en tenant bien entendu compte de l'orientation des axes du nouveau repère $\Re_2 = (A;\, B,\, D)$:

$$h = \overline{MH} < 0 \ ;\ h' = \overline{MH'} > 0 \ ;\ k = \overline{MK} < 0 \ ;\ k' = \overline{MK'} < 0 \ ;$$

[3]Notons bien l'unicité de la conique pour les contraintes annoncées : centre, direction des asymptotes (*ie* points à l'infini, deux points.

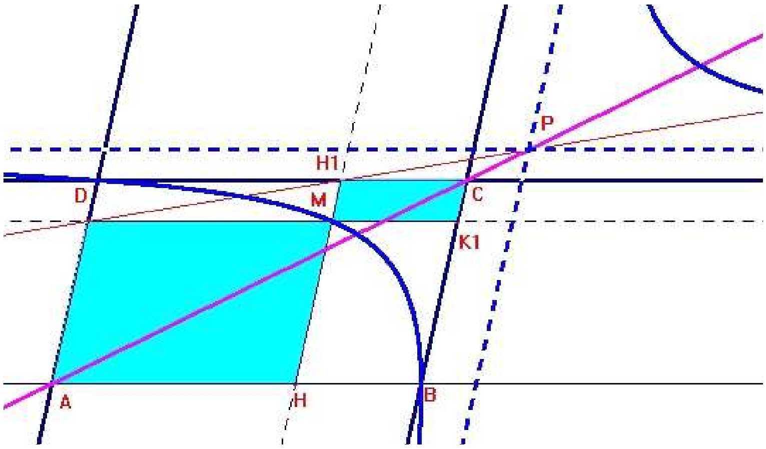

FIG. 9.9 –

on peut écrire les "*équilibres*" :

	$(\mathbf{e_1})$	
M	**K**	**K'**
m	k'	$-k$

	$(\mathbf{e_2})$	
K	**A**	**D**
a	h'	$-h$

	$(\mathbf{e_3})$	
K'	**B**	**C**
a	h'	$-h$

la combinaison $a.(\mathbf{e1}) - k'.(\mathbf{e2}) + k.(\mathbf{e3})$ donne :

M	**A**	**B**	**C**	**D**
a	$-h'k'$	$h'k$	$-hk$	hk'

on peut se ramener à la forme :

M	**P'**	**Q'**
ma	$-hk - h'k'$	$h'k + hk'$

où P'[respectivement Q'] est le barycentre de $(A;\ h'k')$ et $(C;\ hk)$ [respectivement de $(B;\ h'k)$ et $(D;\ hk')$] donc de $(A;$ aire$(\pi_A))$ et $(C;$ aire$(\pi_C))$ [respectivement de $(B;$ aire$(\pi_B))$ et $(D;$ aire$(\pi_D))$], simple question de proportions et de hauteur de parallélogramme.
Par ailleurs, on peut écrire :

	$(\mathbf{s_1})$	
H	**A**	**B**
$k - k'$	k'	$-k$

	$(\mathbf{s_2})$	
H'	**C**	**D**
$k' - k$	k	$-k'$

	$(\mathbf{s_3})$	
K	**A**	**D**
$h' - h$	$-h'$	h

	$(\mathbf{s_2})$	
K'	**B**	**C**
$h - h'$	$h'k$	$-h$

on en déduit les combinaisons :

$$h'\mathbf{s_1} + k\mathbf{s_4}$$

H	**K′**	**A**	**C**
$h'(k-k')$	$k(h-h')$	$h'k'$	$-hk$

$$h\mathbf{s_2} + k'\mathbf{s_3}$$

H′	**K**	**A**	**C**
$h(k'-k)$	$k'(h'-h)$	$-h'k'$	hk

on prouve ainsi que les droites (HK') et $(H'K)$ sont sécantes en le point qui est le barycentre de $(A;\ -h'k')$ et $(C;\ hk)$ et qui est aussi le point P !

de façon similaire, les équilibres :

$$h'\mathbf{s_1} + k'\mathbf{s_3}$$

H	**K**	**B**	**D**
$h'(k-k')$	$k(h'-h)$	$-h'k$	hk'

$$h\mathbf{s_2} + k\mathbf{s_4}$$

H′	**K′**	**B**	**D**
$h(k'-k)$	$k(h-h')$	$h'k$	$-hk'$

prouvent que les droites (HK) et $(H'K')$ se coupent au point barycentre de $(B;\ kh')$ et $(D;\ -h'k)$, qui n'est ni plus ni moins que le fameux point Q !
On peut donc affirmer, en comparant les coordonnées barycentriques de P, Q et P', Q' que P et P' [respectivement Q et Q'] sont conjugués par rapport à A et C [respectivement B et D].
On peut aussi, en utilisant les produits "hk" définissant les coordonnées barycentriques ci-dessus , déterminer parfaitement la position des points P et Q sur les diagonales et par rapport au parallélogramme, en fonction de celle de M, dont la position est donnée selon les quatre mesures " cardinales " h, k, h' et k'.
Si on tient compte des remarques concluant le paragraphe précédent, on en vient à affirmer que fixer un point P sur la diagonale (AC) revient

- d'une part à fixer le rapport $\frac{hk}{h'k'}$, c'est-à-dire en fait le rapport des aires algébriques des quadrilatères $MHAK$ et $MK'CH'$
- et d'autre part à paramétrer une hyperbole de centre P passant par A et C etc.

Par conséquent, dans un "*parallélogramme*", les points M qui découpent celui-ci dans un rapport $\dfrac{\text{aire}(MHAK)}{\text{aire}(MK'CH')} = \mathrm{C}^{te}$ constituent l'hyperbole de centre P passant par A et C etc.
Ce qui pourra faire l'objet d'un exercice relativement abordable par des lycéens en section scientifique, qu'on formulerait par exemple ainsi :

Dans un repère (O ; x, y) on place A en O, puis B en $(1;\ 0)$, C en $(1;\ 1)$ et D en $(0;\ 1)$; ensuite on choisit arbitrairement M de coordonnées $(x;\ y)$ dans le dit repère. Quel est l'ensemble des points M tels les aires des parallélogrammes $MHAK$ et $MK'CH'$ soient dans un rapport constant, où H, K, H', K'etc. ?
On trouvera aisément une équation d'hyperbole sous la forme :

$$(1-w).xy - x - y + 1 = 0$$

qu'on ramènera à la forme précédente par un changement de repère élémentaire :

$$X^2 - Y^2 + 2X_P X + 1 = 0,$$

changement qui permettra d'établir une relation simple entre X_P et le rapport w.