

# 7

## La géométrie au service des corps flottants.

*Frédéric Vivien, Luc Sinègre  
Irem de Rouen.*

### 7.1 *Introduction.*

A partir d'un objet comme le culbuto, objet de masse non homogène et plutôt concentrée dans une zone du solide, nous pouvons retrouver plusieurs positions autour de l'équilibre.

L'équilibre stable : l'objet repose sur sa masse principale. Tout petit mouvement apporté à cet objet le fera revenir dans cette position. L'équilibre instable : avec beaucoup de patience, nous pouvons faire tenir le culbuto avec sa masse principale située sur le haut. Tout petit mouvement qui lui est appliqué le fera revenir dans la première position, l'équilibre stable.

Imaginons cet objet flottant sur l'eau ; nous retrouverons les mêmes positions d'équilibres. Si, de plus, l'objet est constamment soumis à une force qui l'écarte d'une position d'équilibre (le vent dans les voiles d'un navire), cet objet aura alors tendance soit à rester dans sa nouvelle position, soit à revenir dans la position d'équilibre initiale, soit à s'écarter plus encore de sa dernière position.

### 7.2 *Historique.*

Archimède est le premier scientifique à s'être occupé de la théorie des corps flottants. Le mathématicien ne se contente pas de poser la célèbre loi qui régit l'équilibre ; il détermine, pour des corps sphériques, cylindriques ou paraboliques, dans quels cas l'équilibre doit être stable ou instable. Mais comme le remarque Lazare Carnot[2] rapporteur en 1814, pour l'Institut, avec Poinsot et Sané du mémoire de Dupin[4], la principale difficulté provient davantage des mathématiques que de l'hydrostatique

*En admirant la force d'esprit qu'exigeaient ces premiers résultats d'une science alors dans l'enfance, on ne peut s'empêcher d'avouer qu'une méthode qui doit, à chaque corps nouveau dont on s'occupe, recourir à de nouveaux moyens de solution, ne soit d'une étude et d'une application extrêmement pénibles.*

Deux géomètres reprirent les recherches du savant de Syracuse, au dix-huitième siècle, c'est-à-dire presque deux mille ans plus tard. Pierre Bouguer, réussit d'abord, pendant les loisirs que lui laissa le voyage qui lui permit de mesurer un arc de méridien, à rédiger le *Traité du navire*[1] (1746). Le texte reste fidèle à Archimède, Bouguer adopte un point de vue géométrique<sup>1</sup> et barycentrique qui évite le calcul intégral et lui permet donc d'être compris par les ingénieurs maritimes. Euler qui reste *fidèle à sa méthode* au dire de Carnot, a choisi la géométrie analytique.

Dans les deux cas, on considère que le corps flottant admet un plan de symétrie, ce qui n'est pas une bien grande restriction pour décrire des vaisseaux de guerre ou de commerce !

Dupin

*au lieu de se tenir toujours infiniment près de chaque position d'équilibre, . . . , considère à la fois toutes les positions qu'un corps peut prendre.*

Certes Bouguer avait déjà cherché au chapitre cinq de son *Traité*[1] (*recherches plus étendues sur les métacentres*, p.269) à dépasser le cas trop particulier de l'équilibre et remarquant notamment que

*Certains navires conservent bien leur situation horizontale tant qu'ils sont au port : mais aussitôt que quelque puissance un peu forte, comme l'impulsion du vent sur les voiles, les fait pencher d'une quantité un peu grande, ils ne se relèvent que très difficilement ; et ce qui est le comble de malheur, puisqu'il faut périr, ils continuent quelquefois à s'incliner, quoique la cause qui a fait commencer leur inclinaison, cesse d'agir. .*

Il donne alors les dessins de deux courbes métacentriques produisant deux situations opposées, mais c'est à Dupin que revient l'idée de déduire les propriétés géométriques de la surface métacentrique de celle de la surface des centres de carènes, dont elle est la développée.

Le métacentre défini à l'origine comme point limite d'une condition d'équilibre doit donc être pensé comme le point caractéristique d'une surface. Le problème passe donc du terrain de la Mécanique à celui de la Géométrie Pure, et les développements apportés par Monge et ses élèves (courbe indicatrice, directions conjuguées, ...) vont permettre d'exposer plus simplement et d'enrichir ce que Bouguer et Euler avaient déjà posé.

---

<sup>1</sup>Jean Dhombres en a fait une analyse à la fois historique et didactique (cf [3]).

### 7.3 Autour de l'équilibre.

Description de la figure 7.1 :

Le plan de flottaison est le plan de la surface libre du liquide. Ce plan

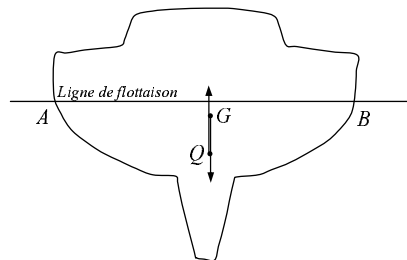


FIG. 7.1 – Coupe du corps flottant perpendiculaire au plan de symétrie.

sépare le corps flottant en deux parties. La partie la plus intéressante est la carène, c'est-à-dire le volume du corps immergé. La trace de ce plan sur la figure est la droite  $(AB)$ . Le poids du corps flottant induit une force verticale  $\vec{P}$  appliquée au centre de gravité  $G$ . Ce poids s'équilibre avec la poussée  $\vec{F}$  qui s'exerce au centre de gravité  $Q$  de la carène. La loi d'Archimède permet d'affirmer que, si le corps flottant est en équilibre,  $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$ . Comme le poids du corps immergé est constant, la poussée doit correspondre à un volume de liquide déplacé constant, on dit que la *flottaison* est *isocarène*. Cette force, dite *de poussée*, s'exerce au centre de poussée, le centre de gravité de la carène. Ce point n'est pas le point d'application de la poussée comme l'indique l'exemple d'un flotteur sphérique (fig 7.2). Comme la poussée d'Archimède est constante, l'aire de la partie immer-

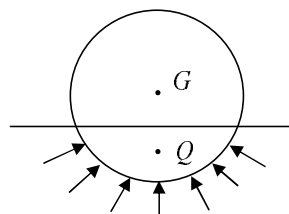


FIG. 7.2 – Centre de poussée d'un flotteur sphérique

gée est constante, pour toute position d'équilibre du navire.

Bouguer, Euler et Dupin représentent le mouvement avec un référentiel attaché au bateau. Comme le montre la figure 7.3 cette convention demande au lecteur un temps de réflexion, car la rotation induite sur la re-

présentation est opposée au tangage réel du bateau. Ceci posé pour un dé-

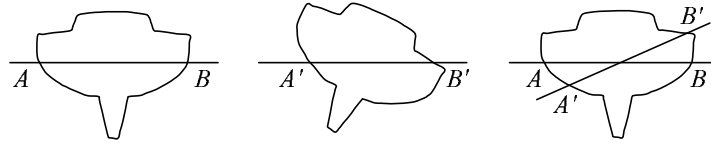


FIG. 7.3 – Représentation du tangage.

placement ce qui correspond pour un déplacement infinitésimal d'angle  $\theta = \widehat{BOB'}$  les onglets  $AOA'$  et  $BOB'$  doivent avoir le même volume. Comme ces deux volumes sont tous deux égaux à  $\theta$  fois la surface,  $O$  est le centre de gravité de la surface de flottaison  $[AB]$ . On déduit les énoncés suivants :

- Pour des déplacements isocarènes petits, la flottaison passe par un point fixe qui est le centre de gravité de la flottaison initiale. On appelle ce point le centre de flottaison.
- Toutes les flottaisons isocarènes enveloppent une surface, la surface de flottaison, qui est en même temps le lieu du centre de gravité des flottaisons.

Si, toujours dans le cadre d'un tout petit déplacement  $\theta$ , on appelle  $a$  et  $b$  les centres de gravités des onglets  $AOA'$  et  $BOB'$  précédents. Notons également  $Q$  le centre de gravité de la partie commune  $OA'EB$  (cf figure 7.4). Le centre de poussée dans le premier cas est  $\alpha$  le barycentre des points  $a$  et  $Q$  affectés des coefficients  $v_A$  et  $V$ , volumes respectifs de l'onglet et de la partie commune. Dans le second,  $\beta$  le barycentre des points  $b$  et  $Q$  affectés des mêmes coefficients.

La droite  $(\alpha\beta)$  reste donc toujours parallèle à la droite  $(ab)$ . En faisant

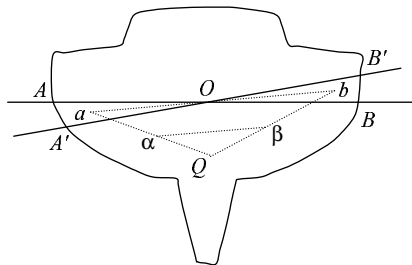


FIG. 7.4 –

tendre  $\theta$  vers 0, la droite  $(\alpha\beta)$  tend vers une tangente à la surface de poussée, alors que  $(ab)$  tend, elle vers la flottaison.

- Le plan tangent en chaque point de la surface des poussées est parallèle à la flottaison correspondante.

- La poussée restant perpendiculaire au plan de flottaison est donc la normale à la surface des poussées passant par le centre de poussée.

#### 7.4 Le métacentre et la courbe de GZ.

Examinons la situation autour d'une situation d'équilibre. Pour simplifier nous ne considérons qu'un déplacement autour d'un axe longitudinal (roulis). S'exercent au centre de gravité du navire  $G$  et au centre de poussée  $Q$  deux forces égales en intensité et opposées qui forment donc un couple. La normale  $(QG)$  pivote autour du centre de courbure de la courbe de poussée que nous appellerons le métacentre  $M$  à l'équilibre. L'équilibre est donc stable si et seulement si le point  $M$  se trouve à l'extérieur du segment  $[QG]$  donc si et seulement si le rayon de courbure  $r$  en  $Q$  de la courbe de poussée est supérieur à la distance  $QG = d$ . Comme pour un bâton que l'on tenterait de poser verticalement sur l'eau, si le centre de gravité est "trop haut", le moindre déséquilibre provoque la chute du bâton.

Le couple agissant sur le navire est égal au produit du poids du navire

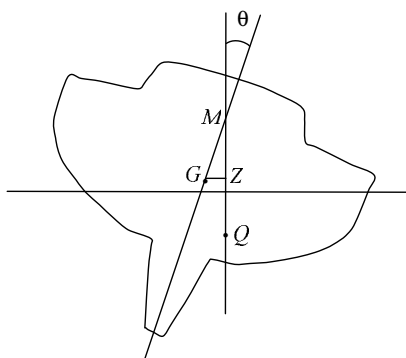


FIG. 7.5 – Bras de redressement.

par la distance entre les deux axes d'application des deux forces (le poids et la poussée). On appelle bras de redressement, et l'on note généralement  $\overline{GZ}$ , la distance séparant le centre de gravité et la verticale contenant le centre de carène. On a, en considérant des orientations bien choisies,  $\overline{GZ} = \overline{GM} \cdot \sin(\theta)$  :

- Si  $\overline{GZ} > 0$ , c'est-à-dire si le moment tend à redresser le navire alors  $\overline{GM} > 0$  et le point  $M$  est donc au-dessus de  $G$ .
- Si  $\overline{GZ} < 0$  c'est-à-dire si le moment tend à retourner le navire alors  $\overline{GZ} < 0$  et le point  $M$  est donc au-dessous de  $G$ .

Ceci confirme que le centre de gravité  $G$  doit être au-dessous du métacentre  $M$  pour qu'il y ait stabilité<sup>2</sup>. "Méta" ici, comme l'a voulu Bouguer,

<sup>2</sup>La proposition 20 du chapitre 3 du premier tome (cf 7.9) de la Scientia Navalis [5]

signifie la plus haute hauteur possible du centre de gravité du navire.

La courbe de stabilité statique donne, pour plusieurs angles de gîte  $\theta$ , la position du centre de gravité du navire, le point  $G$ , et celle du centre de poussée, le point  $Q$ . Sur la figure (figure 7.6, trouvée dans [6]) on remarque

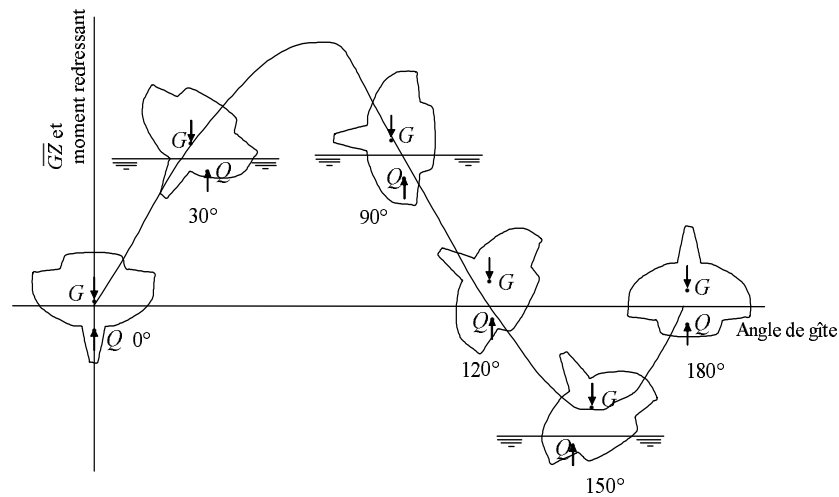


FIG. 7.6 – Courbe de GZ.

que plus le bateau s'incline, plus  $Q$  s'écarte de la verticale de  $G$ .

La tangente à la courbe au point d'origine est une représentation de la stabilité initiale du bateau : plus la pente est importante, plus le bateau est stable en position droite.

Sur notre exemple, la distance  $\overline{GZ}$  est maximale pour un angle de gîte aux environs de  $70^\circ$  qui est l'angle de stabilité maximale. Si la force qui incline le bateau est plus grande que le moment redressant à ce point, le bateau se rapproche du point de chavirement. Bien souvent toutefois, cette force est celle du vent dans les voiles et elle diminue au fur et à mesure que le bateau se couche.

Plus on incline le bateau au-delà de  $70^\circ$ , plus la distance  $\overline{GZ}$  diminue jusqu'à un angle où  $Q$  est de nouveau exactement aligné avec  $G$  à  $120^\circ$ . Dans ce cas le bateau est en équilibre instable ; le moindre mouvement peut soit amorcer un redressement, soit causer un chavirement complet. En effet, après  $120^\circ$ ,  $Q$  est passé de l'autre côté de  $G$ , soit  $\overline{GZ} < 0$  et le moment entre les deux forces contribue maintenant au chavirement. A  $180^\circ$ , le bateau est stable à l'envers.

Sans entrer dans les détails théoriques, quels sont les points à considérer ?

- Le point de chavirement doit être le plus loin possible.

---

*Invenire stabilitatem, qua superficies quaecumque plana aquae verticaliter insidens in situ aequilibrum perserverat*

indique que la stabilité de l'équilibre est réalisée si et seulement si la distance  $GO$  entre le centre de gravité et le centre de poussée est supérieure à

$$\frac{AB^3}{12AMFNB}$$

- Le bras redressant à l'angle de stabilité maximale doit être le plus grand possible.
- La surface sous la courbe doit être la plus grande possible, en stabilité positive et la plus petite possible en stabilité négative. En effet la surface sous la courbe est l'intégrale du moment redressant, c'est-à-dire le travail nécessaire pour incliner le navire jusqu'au point de chavirement. Autant ce travail doit être grand pour le bateau droit, autant il est utile qu'il soit le plus petit possible pour le bateau chaviré. Il faudra en effet une vague assez forte pour fournir ce travail et ainsi redresser le bateau.

### 7.5 La courbe métacentrique.

Si le navire présente un plan de symétrie longitudinale, la surface des poussées a la même symétrie. Le métacentre  $M$ , qui, comme nous l'avons déjà vu, est le point caractéristique de la développée de cette surface décrit dans une coupe transversale une courbe qu'on appelle *courbe métacentrique*. En un point d'équilibre  $Q$ , la courbe de poussée correspondant à la coupe transversale, présente une tangente horizontale. Lui correspond sur *la courbe métacentrique* un point de rebroussement de première espèce.

On peut illustrer cette situation en construisant à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la courbe métacentrique d'un solide dont la courbe de poussée est une parabole.

Si le centre de gravité  $G$  du solide est en dessous de la courbe métacentrique, une seule normale passe par  $G$  et il existe une seule position d'équilibre pour le solide. Si  $G$  est au-dessus, il est sur trois normales et l'équilibre est instable. Si le centre de gravité  $G$  du solide est en dessous de

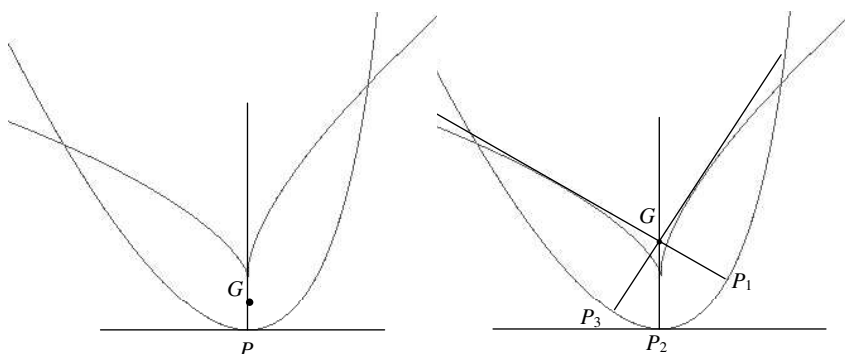


FIG. 7.7 – Normales à une courbe de poussée parabolique.

la courbe métacentrique (ou développée), une seule normale passe par  $G$  et il existe une seule position d'équilibre pour le solide. Si  $G$  est au-dessus,

il est sur trois normales et l'équilibre est instable.

**7.6** *Le théorème de Bouguer.*

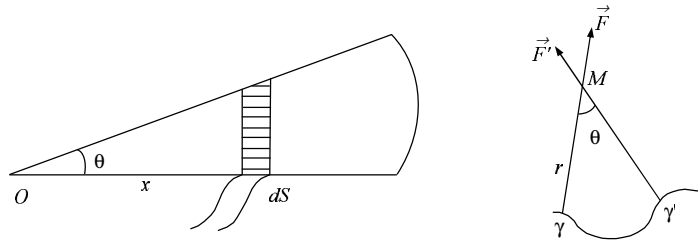


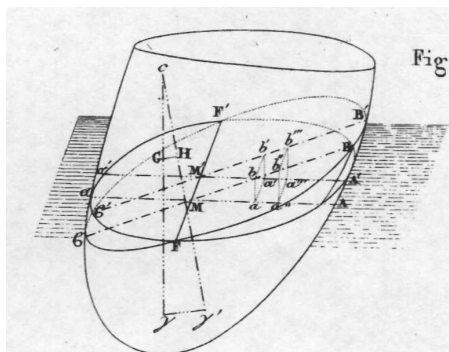
FIG. 7.8 –

Quand la flottaison passe de  $(AB)$  à  $(A'B')$  (cf fig 7.4) la poussée passe de  $\vec{F}$  à  $\vec{F}'$ . Si nous appelons  $\vec{f}$  la poussée de l'onglet  $AOA'$ , la poussée de la partie  $OA'B$  est donc  $\vec{F} - \vec{f}$ . Il suffit d'ajouter à cette dernière la poussée  $\vec{f}'$  de l'onglet  $B'O B$  pour obtenir  $\vec{F}' = \vec{F} - \vec{f} + \vec{f}'$  ou encore  $\vec{F}' - \vec{F} = \vec{f}' - \vec{f}$ . Comme les onglets ont le même volume,  $\vec{f}' - \vec{f}$  constitue un couple dont le moment par rapport à l'axe de roulis passant par  $O$  peut se calculer en intégrant le moment d'une tranche élémentaire de base  $dS$ , de hauteur  $\theta$  située à  $x$  de  $O$  (cf 7.8), qui vaut  $\theta x^2 dS \rho$ . Le symbole  $\rho$  désigne la masse volumique du liquide. On a donc le moment du couple en  $O$  qui vaut  $\Gamma = \int_S \rho \theta x^2 dS = \rho \theta \mathcal{I}$  où l'on reconnaît dans  $\mathcal{I}$  le moment d'inertie de la surface de flottaison  $\mathcal{I} = \int_S x^2 dS$ . On calcule le moment de  $\vec{F}' - \vec{F}$  en  $\gamma$  centre de poussée de la première situation qui vaut  $F'$  multiplié par le déplacement  $\gamma\gamma'$  sur la courbe de poussée. Or  $F' = \rho V$  ( $V$  le volume de la carène), soit encore  $\Gamma = \rho V r \theta$ . On retrouve donc la loi<sup>3</sup> de Bouguer

$$\mathcal{I} = rV.$$

---

3





On a donc intérêt pour augmenter le rayon  $r$  et donc faciliter la condition de stabilité  $r > a$  à augmenter l'inertie de la surface de flottaison (flotteurs, balanciers, etc.)

La figure 7.9 montre comment Euler a procédé pour trouver la condition

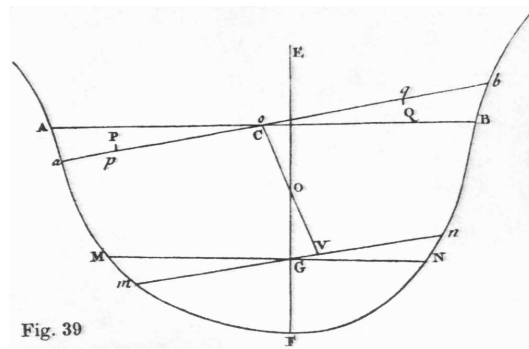


FIG. 7.9 –

d'équilibre. Les moments des deux onglets  $boB$  et  $aoA$  sont tous les deux proportionnels aux quantités  $po - GV$  et  $qo + GV$ , le moment résultat sera lui proportionnel à  $po + qo = \frac{2AB}{3}$  ce qui permet d'obtenir une condition où n'interviennent que des points de la position initiale. Notons enfin que trouver la distance entre le centre de gravité et le centre de poussée supérieure au cube du segment de flottaison divisé par 12 fois le volume de la carène ( $GO > \frac{AB^3}{12v}$ ) est conforme avec ce qui précède puisque dans le cas d'un raisonnement plan la quantité  $\frac{AB^3}{12}$  représente bien l'inertie de la flottaison.

Cette démonstration reste très proche de celle de Dupin dans [4] qui écrit

*Nous allons démontrer dans un instant que les moments simples des deux onglets  $FAF'B$  divisé par la tangente de  $AMBm$  et par le volume de la carène, sont égaux en somme au rayon de l'arc  $\gamma\gamma'$  que parcourt le centre de carène, lorsque le plan de flottaison cesse d'être  $FAA'F'$ , et devient  $FBB'F'$ . Donc le rayon de  $\gamma\gamma'$  est simplement égal au moment d'inertie de l'aire totale  $\alpha FAF'$  (moment pris par rapport à l'axe  $FF'$ ) divisé par le volume de la carène.*



# Bibliographie

- [1] Bouguer Pierre, *Traité du navire, et de ses mouvements*, Paris, Jombert, 1746.
- [2] Carnot Lazare, Poinsot, Sané, *Rapport sur un mémoire de Charles Dupin, "De la stabilité des corps flottants"*, Paris, 1814.
- [3] Dhombres Jean, *Histoire et didactique, à partir de la Scientia Navalis et du calcul intégral, quelques réflexions sur la mise en perspective historique de l'apprentissage des mathématiques*, Irem, Nantes, 1998.
- [4] Dupin Charles, *Applications de Géométrie et de Mécanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc ... pour faire suite aux Développements de Géométrie*, Paris, Bachelier, 1822.
- [5] Euler Leonard, *Scientia Navalis, Oeuvres complètes série 2, oeuvres de mécanique et d'astronomie*, vol 18, 19, Truesdell, Baltimore, 1967.
- [6] Article publié originellement dans " BRYC " revue du Bruxelles Royal Yacht Club.

