# 5

## problèmes de lieux – problèmes de construction

*Bernard Destainville – Irem de Toulouse.*

### 5.1 *Introduction.*

L'apparition d'un paragraphe concernant les lieux géométriques dans le nouveau programme de la classe de Première S nous a incité, davantage encore, à en approfondir la démarche; conjointement les problèmes de construction sont liés à ceux de lieux.

Pour chacun de ces deux types d'activités, après découverte d'un ensemble qui contient les solutions, une seconde partie, réciproque de la précédente, est indispensable pour s'assurer de l'égalité de l'ensemble cherché avec l'ensemble des solutions. Cette égalité résulte donc d'une double inclusion.

• *Dans un problème de lieu géométrique de points*, il faut d'abord construire une figure, éventuellement avec plusieurs positions du point variable, pour conjecturer ce lieu; et si la recherche est réalisée à l'aide d'un logiciel dynamique, cette construction n'est efficace pour la conjecture que si la séquence de construction des points est correcte. Surtout, avec un tel logiciel, le point $P$ du lieu doit être déclaré après celui qui a été choisi comme point variable $M$. De plus, du choix du point variable $M$ peut dépendre la clarté de la conjecture, et en particulier le repérage des éventuelles limites du lieu pour préparer la réciproque (voir IV). Le mouvement du point variable $M$ est très utile pour observer celui de $P$.

Une fois justifié le support $E$ du lieu, une *réciproque* est indispensable pour s'assurer que tous les points de cet ensemble $E$ conviennent : à partir d'un point $P$ quelconque de $E$, peut-on faire correspondre dans l'ensemble de départ (au moins) un point $M$ dont $P$ est l'image? Les points $P$ de $E$ qui n'ont pas d'antécédent sont à rejeter (voir III et IV). Il est préférable de construire une nouvelle figure pour mieux cerner les étapes de la réciproque ; la séquence de construction des points est nécessairement différente de celle de la première partie.

À l'issue de cette étude, nous avons donc prouvé, par double inclusion, l'égalité du lieu géométrique cherché avec l'ensemble des points de $E$ qui ont un antécédent.

On retrouve évidemment cette démarche lorsqu'on entreprend de justifier les divers *ensembles-images*, en général admis dans les programmes actuels, pour les transformations. Par exemple, dans une rotation, l'image d'un segment est un segment dont il faut préciser les propriétés.

• *Dans un problème de construction géométrique d'un point*, on est souvent conduit à privilégier, parmi les hypothèses, deux *conditions nécessaires* qui se traduisent par l'apparition du point sur deux lieux géométriques dont on cherche l'intersection[1]. Lorsque ces deux lieux sont sécants, il reste à s'assurer, par une *réciproque*, que les éventuels points communs à ces lieux satisfont à toutes les propriétés imposées.

Par exemple, le centre du cercle circonscrit à un triangle est *nécessairement* à l'intersection de deux des trois médiatrices des côtés de ce triangle ; pour prouver que c'est *suffisant*, il faut s'assurer que le point d'intersection de ces deux médiatrices est effectivement équidistant des trois sommets du triangle. Dans d'autres problèmes de construction, un point $M$ peut être l'image d'un autre point $M'$ par une transformation. D'une part il faut souvent *construire* d'abord ce point $M'$, d'autre part le passage de $M'$ à $M$ nécessite lui-même une construction, en général aussi par intersection de deux lieux (voir II).

Dans les activités qui suivent, on peut en particulier observer les liens entre les deux types de problèmes.

## 5.2 *Une construction avec discussion.*

Soient un point $A$ et une droite $D$ du plan. Construire un cercle de rayon $r$ passant par $A$ et tangent à $D$. Soit $O$ la projection de $A$ sur $D$.

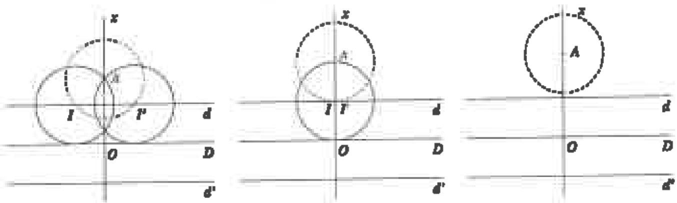
S'il existe une solution, soit $I$ le centre du cercle :

- la distance de $I$ à $D$ est $r$ ; $I$ appartient donc à $(E)$, réunion des droites $d$ et $d'$ parallèles à $D$, *lieu* des points situés à distance $r$ de $D$ ;
- la distance de $I$ à $A$ est $r$ ; $I$ appartient donc au cercle $(A, r)$ (*second lieu*).

S'il existe, $I$ appartient donc à l'intersection de $(E)$ et du cercle $(A, r)$.

*Réciproque* : il y a quatre étapes : construire les deux lieux – discuter leur intersection – construire les cercles de centre $I$ et de rayon $r$ – vérifier qu'ils conviennent.

[1]G. Polya, *La découverte des mathématiques* (Dunod, 1965) ; G. Glaeser, *Analyse-synthèse* Brochure APMEP 76, 1990.



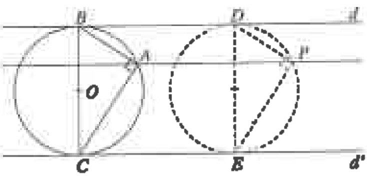

si $0 < OA < 2r$, il y a deux solutions — si $OA = 2r$, il y a une solution — si $OA > 2r$, il y a zéro solution

Cas particulier : Si $OA = 0$, les deux cercles existent aussi, centrés en

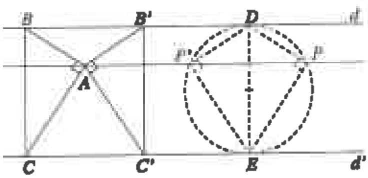
$(Ox) \cap d$ et en $(Ox) \cap d'$ et ils passent par $O$.

## 5.3 *Une construction par deux méthodes.*

$d$ et $d'$ sont deux droites parallèles et $A$ un point du plan entre $d$ et $d'$. Construire un triangle $ABC$, rectangle en $A$, avec $B$ sur $d$ et $C$ sur $d'$, de telle sorte que la droite $(BC)$ soit perpendiculaire à $d$.




*Analyse* : Si $ABC$ existe, soit $D$ un point de $d$ et $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, $E = t(C)$ et $P = t(A)$ ; $D$ étant fixé, $P$ appartient à deux lieux : le cercle de diamètre $[DE]$ et la droite parallèle à $d$ qui passe par $A$.




*Réciproque* : On part de $d$, $d'$, $A$ et $[DE]$ perpendiculaire à $d$. La parallèle à $d$ en $A$ coupe le cercle de diamètre $[DE]$ en deux points $P$ et $P'$. Alors :

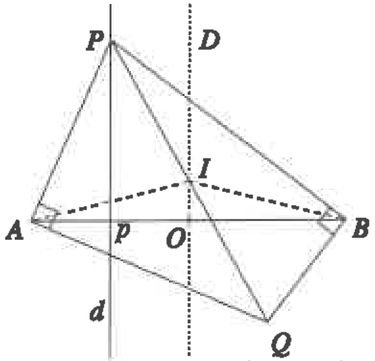
- Avec $t'$, translation de vecteur $\overrightarrow{PA}$, on a $t'(D) = B$ et $t'(E) = C$, et le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. Il convient.
- Même travail avec $t''$, translation de vecteur $\overrightarrow{P'A}$. D'où $AB'C'$. Nous avons choisi cette méthode dynamique parce qu'elle fait disparaître la contrainte sur $A$, en déplaçant la figure, dans le même esprit que la construction d'un carré inscrit dans un triangle.

*Note* : une autre méthode consiste à construire d'abord le milieu $O$ de $[BC]$ ; si l'on appelle $D$ la droite des milieux de la bande de plan et $2a$ la largeur de cette bande, $O$ est dans l'intersection de $D$ et du cercle de centre $A$ et de rayon $a$. On retrouve les deux solutions.

## 5.4 *Deux lieux géométriques.*

$O$ est le milieu d'un segment $[AB]$, $P$ un point de la médiatrice $d$ du segment $[AO]$. Tracer la perpendiculaire à $(PB)$ en $B$. Lorsque ces deux droites sont sécantes, on appelle $Q$ le point d'intersection et $I$ le milieu du segment $[PQ]$. Trouver les lieux géométriques du point $I$ et du point $Q$ lorsque $P$ parcourt $d$.

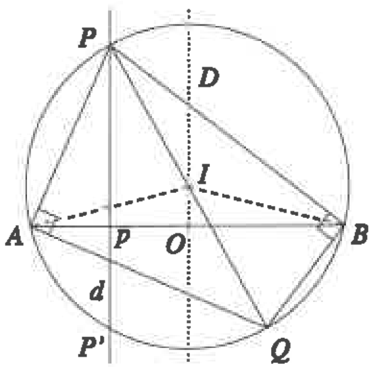
1) Lieu géométrique de $I$ : soit $p$ le milieu de $[AO]$.




*La figure : en séquence,* construction de $P$, puis $Q$, puis $I$. Noter que si $P$ est en $p$, les perpendiculaires à $(PA)$ en $A$ et à $(PB)$ en $B$ sont parallèles ; $Q$ n'existe pas.

*Conjecture :* avec le logiciel CABRI, $I$ semble décrire la médiatrice de $[AB]$.

*Le support du lieu (analyse) :* Si $P \neq p$, en considérant les deux triangles rectangles $PAQ$ et $PBQ$, $IA = IQ = IP = IB$ ; donc $I$ appartient à la médiatrice $D$ de $[AB]$.




*Réciproque (synthèse) :* Soit $I$ un point quelconque de $D$.

– *construction :* le cercle de centre $I$ qui passe par $A$, passe aussi par $B$ et coupe $d$ en deux points $P$ et $P'$. Avec $P$, la droite $(PI)$ recoupe le cercle en $Q$. *En séquence,* nous avons donc construit $I$, puis $P$, puis $Q$.

– *vérification :* pour tout point $I$ de $D$, les triangles $PAQ$ et $PBQ$, inscrits dans des demi-cercles, sont rectangles. Donc $I$ convient. Le raisonnement est le même pour $P'$.

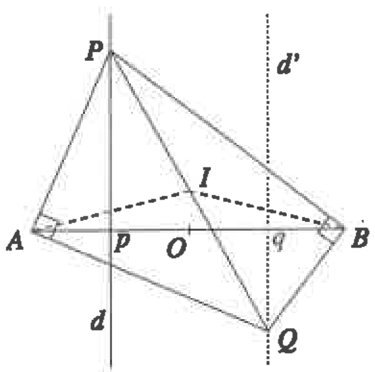
Ainsi, le lieu géométrique de $I$ est la droite $D$ en entier.

2) Lieu géométrique de $Q$ : soit $q$ le milieu de $[OB]$.

*La figure : en séquence,* construction de $P$, puis $Q$, puis $I$, comme ci-dessus, avec la même figure.

*Conjecture :* le logiciel CABRI propose comme lieu géométrique de $Q$ la médiatrice du segment $[OB]$ privée du point $q$.

*Le support du lieu (analyse) :* la projection orthogonale de $I$ sur la droite $(AB)$ est $O$, et celle de $P$ est $p$ ; $I$ est le milieu du segment $[PQ]$. Ainsi, par projection, $O$ est le milieu du segment $[pq]$. Donc $Q$ appartient à la médiatrice $d'$ de $[OB]$.




*Réciproque (synthèse) :* il vaut mieux faire une nouvelle figure. Soit $Q$ un point quelconque de $d'$.

– *construction :* traçons les perpendiculaires en $A$ à $(QA)$ et en $B$ à $(QB)$.
Si $Q = q$, ces droites sont parallèles et $P$ n'existe pas.
Si $Q \neq q$, ces droites sont sécantes en un point $P$. Soit $I$ le milieu du segment $[PQ]$. *En séquence,* nous avons construit $Q$, puis $P$, puis $I$.

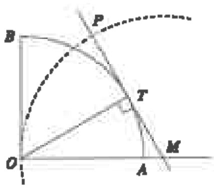
– *vérification :* pour tout point $Q$ de $d'$, distinct de $q$, en inversant les rôles de $P$ et $Q$ dans l'étude qui précède, on démontre que $P$ appartient à la droite $d$. Donc $Q$ convient.

Ainsi, le lieu géométrique de $Q$ est la droite $d'$ privée du point $q$.

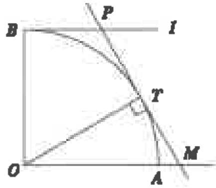
## 5.5 *Un lieu géométrique par double inclusion.*

$(O)$ est un quart de cercle de centre $O$ et d'extrémités $A$ et $B$. Pour tout point $T$ de $(O)$ distinct de $B$, la tangente en $T$ à $(O)$ coupe la demi-droite $[OA)$ en $M$. $P$ est le point de la demi-droite $[MT)$ tel que $MP = MO$. Trouver le lieu géométrique de $P$ lorsque $T$ décrit $(O)$.

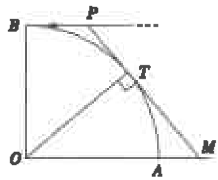
*La figure :* après la mise en place de $(O)$, la séquence de construction est $T$, $M$, $P$.




construction

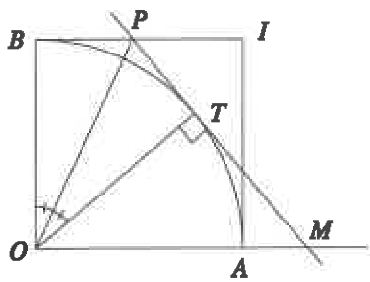



conjecture




ce qu'on obtient en déclarant $M$ puis $T$ (²)

*Conjecture (avec CABRI)* : en déplaçant $T$ sur $(O)$, on peut observer les comportements limites de $P$ aux extrémités d'un segment qui pourrait être le côté $]BI]$ du carré $AOBI$. Notons que la figure réalisée en commençant par construire $M$ apporte une information originale pour $B$ : il semble exclu du lieu.




*Le support du lieu (analyse)* : soit $I$ le quatrième sommet du carré $AOBI$. Le point $P$ appartient à la demi-droite $[BI)$. En effet,

- avec des considérations angulaires, les triangles $OBP$ et $OTP$ sont isométriques (2ème cas).
- de plus, dans la construction de $P$, le cercle $(M; MO)$ est dans le demi-plan de frontière $(BO)$ qui contient $M$.

*Note :* une autre solution consiste à envisager une similitude : avec $H$ milieu de $[OP]$, les deux triangles $OBP$ et $MHO$ sont semblables.

2. $M$ décrit une demi-droite, alors que $T$ décrit un quart de cercle, qui est borné.

*Réciproque (synthèse) :*
– *construction* : soit $P$ un point de la demi-droite $[BI)$ et $T$ le point symétrique de $B$ par rapport à $(OP)$. Alors $\widehat{TOB} = 2\widehat{POB}$ ;

- si $P = B$, alors $T = B$ et $M$ n'existe pas ;
- si $P \neq B$ et $P$ extérieur à $]BI]$, comme $\widehat{POB} > 45°$, $\widehat{TOB} > 90°$ ; donc $P$ ne convient pas.

Ainsi, il faut que $P$ appartienne au segment $]BI]$ : ***le lieu de P est donc inclus dans*** $]BI]$.
$P \in ]BI]$ ; par symétrie par rapport à $(OP)$, la droite $(PT)$ est tangente en $T$ au quart de cercle $(O)$. Elle coupe $(OA)$ en $M$. *En séquence*, nous avons donc construit $P$, puis $T$, puis $M$.

– *Preuve :* les angles en $O$ et $P$ du triangle $MOP$ sont égaux (symétrie par rapport à $(OP)$ et angles alternes-internes) ; donc $MO = MP$.

*Conclusion* : $]BI]$ est inclus dans le lieu de $P$. Le lieu géométrique de $P$ est donc le segment $]BI]$.

## 5.6 *Conclusion.*

Dans ces deux types de problèmes de recherche d'égalité d'ensembles, un support géométrique permet de mieux analyser le raisonnement par double inclusion.

Dans un souci de rigueur, la réciproque est indispensable. Il ne s'agit pas d'une simple vérification pour se sécuriser, pas plus qu'on ne peut se contenter d'une observation avec un logiciel dynamique.

La démarche est générale. On retrouve par exemple ce besoin de rigueur dans la recherche de l'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inéquation, lorsque les différentes propositions de la résolution ne sont pas équivalentes ou que l'ensemble de définition n'a pu être précisé au départ.