1

La sorcière d'Agnesi

Pierre Lecomte, Université de Liège.

1.1 *Introduction.*

Cet article est qu'un petit résumé du premier site internet[1] qu'a bâti Pierre Lecomte pour résumer ses travaux.

On y retrouve les premières applications géométriques de la transformation qui produit la célèbre courbe à partir d'un cercle. A ce propos, et même si le nom de *sorcière* provient d'une erreur de traduction, on a pensé utile de reproduire en annexe, l'article rédigé dans l'Ouvert de l'Irem de Strasbourg, par Bruno Bernardoff. C'est une traduction libre d'une biographie faite par June Barrow-Green et Jeremy Gray, pour le bicentenaire de la mort de la mathématicienne.

figure 1 : Maria Gaetana Agnesi.

[1] On le trouve à l'adresse http ://www.ulg.ac.be/geothalg/sorciere1/index.html.

La Sorcière d'Agnesi (*cf* fig **??**) est une courbe construite au moyen d'un cercle, d'une droite et d'un point.

[2]La figure **??** illustre cette construction : A est un point du cercle, a est la tangente au cercle passant par le point diamétralement opposé ; le point P décrit le cercle ; la droite (AP) rencontre a en Q ; le point P' est l'intersection de la perpendiculaire à a passant par Q et de la parallèle à a passant par P.

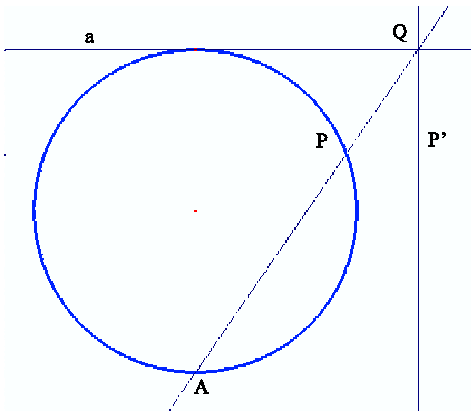

figure 2

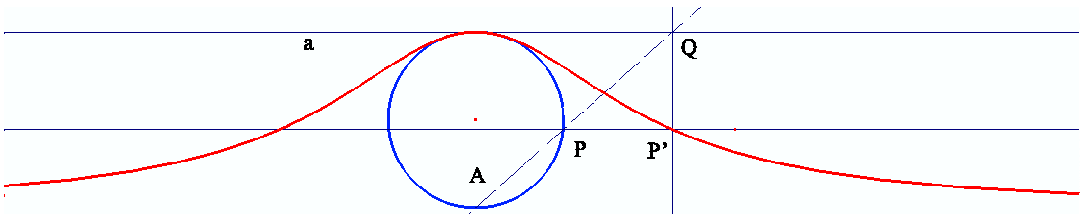

figure 3 : La *Sorcière* d'Agnesi.

On constate assez vite que le rôle du cercle est secondaire. Il indique quels points transformer mais le passage de P à P' n'en dépend pas. Il est seulement dicté par A et a. En substituant un arc de courbe $\mathcal{C}$ au cercle, on obtient une autre courbe, que nous appellerons *transformée d'Agnesi* de $\mathcal{C}$ (par rapport à A et a). Il est du reste aisé de retrouver P à partir de P'. La construction est réversible, ce qui permet de trouver un arc de courbe $\mathcal{C}'$ dont $\mathcal{C}$ soit la tranformée d'Agnesi : la *transformée d'Agnesi inverse* de $\mathcal{C}$.

Ces dénominations ne sont pas canoniques : on appelle aussi ces transformations des *hyperbolismes* directe et inverse. L'une et l'autre sont des cas particuliers de transformations de Newton.

On peut généraliser encore, en remplaçant a par une courbe ou en changeant les directions selon lesquelles on projette P et Q sur P'. On peut aussi s'affranchir totalement de la courbe $\mathcal{C}$ et considérer les deux transformations comme des transformations du plan euclidien, réciproques l'une de l'autre.

C'est à l'illustration de ces quelques considérations que les notes qui suivent sont consacrées. Cela nous conduira à quelques énoncés élémentaires mais amusants. Dans la mesure où ils proviennent de transformations inversibles, ils possèdent le plus souvent une forme de réciproque qui traduit l'effet de l'inverse de la transformation utilisée pour les obtenir, ou de l'alignement des points . Nous laisserons le plus souvent au soin du lecteur la formulation de celle-ci.

Dans le reste de ce texte, $\mathcal{E}$ désigne un plan affine euclidien.

1.2 *Les transformations $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{-1}$.*

On fixe un point A de $\mathcal{E}$, ainsi qu'une droite a de $\mathcal{E}$ ne contenant pas A.

1.2.1 *Définitions.*

L'application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ transforme le point $P \neq A$ en l'intersection P' de la parallèle à a menée par P et de la perpendiculaire à a menée par l'intersection Q de (AP) avec[2] a.

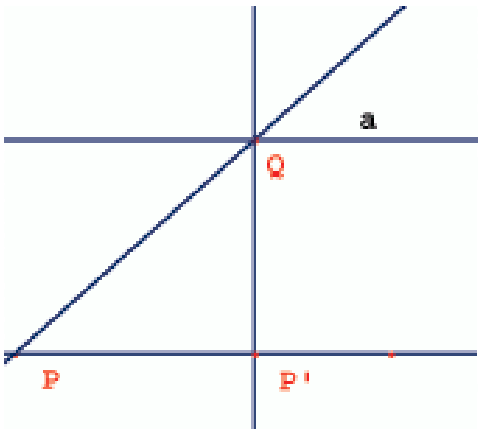

figure 4 : Construction de $\mathcal{A}(P)$.

L'application réciproque $\mathcal{A}^{-1}$ applique donc un point P sur l'intersection P' de la parallèle à a menée par P et de la droite joignant A à la projection orthogonale Q de P sur a.

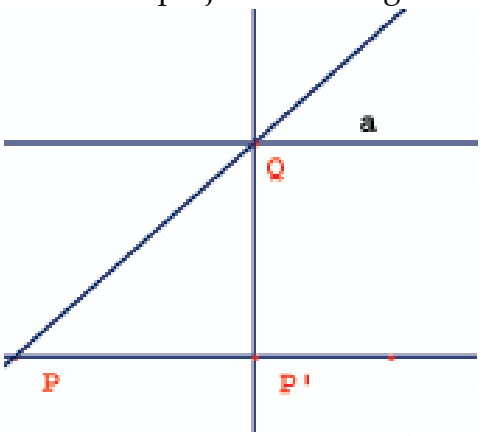

figure 5 : Construction de $\mathcal{A}^{-1}(P)$.

Les applications $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{-1}$ sont définies dans le complémentaire de la parallèle à a menée par A, où elles sont réciproques l'une de l'autre[3].

Les points fixes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{-1}$ sont les points de a et ceux de la perpendiculaire à a menée par A, autres que A.

1.2.2 *Expressions analytiques.*

Il est assez naturel de rapporter $\mathcal{E}$ à un repère orthonormé (A, e_1, e_2) dont l'origine soit A, avec e_1 parallèle à a et e_2 orienté de A vers sa projection orthogonale sur[4] a. Celle-ci a donc des coordonnées de la forme $(0, h)$ où $h = \mathrm{d}(A, a) > 0$.

Dans un tel repère, les expressions analytiques de $\mathcal{A}$ et de sa réciproque sont données par :

$$\begin{cases} \mathcal{A} : & (x, y) & \mapsto & (\frac{hx}{y}, y) \\ \mathcal{A}^{-1} : & (x, y) & \mapsto & (\frac{xy}{h}, y) \end{cases}$$

[2]Si P est un point de la parallèle à a menée par A, autre que A, (AP) est aussi parallèle à a et Q n'existe pas ; lorsque $P = A$, Q est indéfini car il y a une infinité de droites passant par A et P.

[3]En fait $\mathcal{A}^{-1}$ est définie dans $\mathcal{E}$ tout entier. Elle donne A comme image commune aux points de cette parallèle.

[4]Seule l'orientation de e_1 n'est pas précisée. Il y a donc deux repères ayant les propriétés demandées. Un pour chaque orientation possible de $\mathcal{E}$.

Elles confirment ce que nous savions des domaines et des images des transformations étudiées.
Avec ces formules, il est aisé de décrire analytiquement les "transformations d'Agnesi" directe et inverse de courbes. Par exemple, si $\mathcal{C}$ est décrit par des équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

alors sa transformée directe $\mathcal{C}' = \mathcal{A}(C)$ admet les équations paramétriques

$$\begin{cases} x' = \frac{h\,x(t)}{y(t)} \\ y' = y(t) \end{cases}.$$

Si $\mathcal{C}$ est défini par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, alors $\mathcal{C}'$ admet l'équation

$$F'(x, y) = (F \circ \mathcal{A}^{-1})(x, y) = F(\frac{xy}{h}, y) = 0.$$

Dans chaque cas, il faut bien entendu étudier les éventuelles singularités de la transformée. Pour la transformée inverse $\mathcal{C}'' = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{C})$, il vient respectivement

$$\begin{cases} x'' = \frac{x(t)\,y(t)}{h} \\ y'' = y(t) \end{cases}$$

et

$$F''(x, y) = (F \circ \mathcal{A})(x, y) = F(\frac{h\,x}{y}, y) = 0.$$

Les transformées de certaines courbes se présentent parfois comme des graphes de fonctions, ce qui en facilite l'étude et donne quelques exercices intéressants. C'est le cas de la Sorcière d'Agnesi. C'est aussi le cas par exemple de la transformée directe d'une parabole par rapport à son sommet et à une perpendiculaire à son axe.

1.3 *Transformées de droites.*

1.3.1 *Transformation directe.*

Aspects analytiques.

Considérons une droite d d'équation $px + qy + r = 0$.
La courbe $\mathcal{A}(d)$ admet l'équation

$$\frac{p}{h}xy + qy + r = 0. \tag{1.1}$$

Lorsque d n'est pas parallèle à a, c'est-à-dire lorsque $p \neq 0$, $\mathcal{A}(d)$ est donc une hyperbole équilatère. Elle passe par les points F et F', intersections de d et de l'ensemble des points fixes de $\mathcal{A}$. Ses asymptotes sont d'une part la parallèle a' à a passant par A et, d'autre part, la perpendiculaire à a menée par le point d'intersection C' de a et de la parallèle à d menée par A. Ceci s'explique aisément au moyen de la géométrie projective.

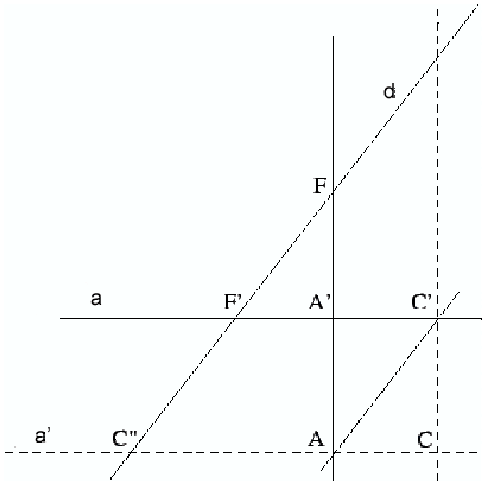

figure 6 : Le centre C et les asymptotes (en pointillé) de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Les directions des asymptotes d'une hyperbole sont, dans ce cadre, les points à l'infini de celle-ci. En étendant la construction de $\mathcal{A}$ à cette sorte de points, l'image de la direction de d est l'intersection de la perpendiculaire à a en C' et de la parallèle à a menée par P, qui est la "droite[5] à l'infini", c'est-à-dire l'ensemble des directions de $\mathcal{E}$.

C'est donc la direction de (CC'), une des asymptotes de l'hyperbole. La seconde asymptote est, de façon analogue, l'image du point C'' commun à d et la parallèle a' à a menée par A . Le centre de l'hyperbole coïncide avec A exactement lorsque d est perpendiculaire à a.

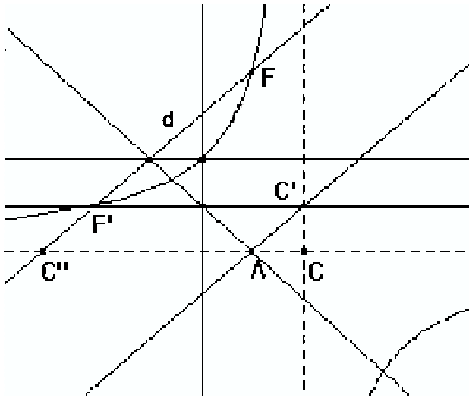

figure 7 : Aperçu de l'Hyperbole.

L'hyperbole d'équation (1.1) est dégénérée exactement lorsque d passe par A.

Lorsque d est parallèle à a (et ne passe pas par A), alors $\mathcal{A}(d) = d$.

Enoncés géométriques.

En examinant la discussion précédente, on obtient quelques énoncés de géométrie élémentaire.

Enoncé 1 :
On donne deux droites perpendiculaires a et b et un point P qui n'appartient à aucune d'elles. Une droite d passant par P coupe a et b en A et B respectivement. Montrer que le lieu de l'intersection de la parallèle à a menée par B avec la parallèle à b menée par A est une hyperbole dont les asymptotes sont les parallèles à a et b menées par P.

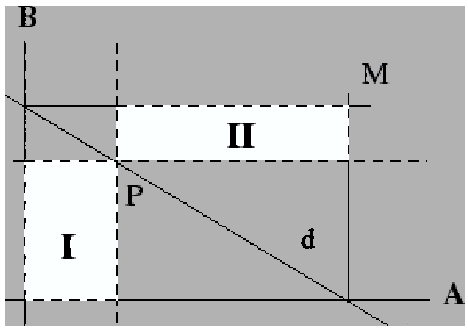

figure 8 : Les rectangles I et II ont même aire.

Ce lieu est en effet la *transformée d'Agnesi* $\mathcal{A}$ de b par rapport à P et a. On peut aussi faire la vérification directe de la propriété (voir la figure **??**) : il est évident que les rectangles I et II ont même aire. Comme le rectangle I est fixe, l'aire de II est constante. Par conséquent, M se déplace sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les droites tracées en pointillé.

Plus généralement

[5]Car d n'est pas parallèle à d.

Enoncé 2 :
On donne deux droites sécantes a et b et un point P qui n'appartient à aucune d'elles. Une droite d passant par P coupe a et b en A et B respectivement. Montrer que le lieu de l'intersection de la parallèle à a menée par B avec la perpendiculaire à a menée par A est une hyperbole. Déterminer les asymptotes de celle-ci.

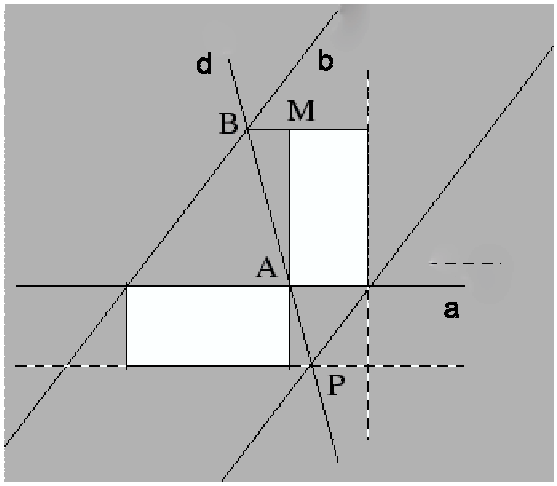

figure 9 : Les rectangles clairs ont même aire.

De nouveau on peut noter que ce lieu est la *transformée d'Agnesi* directe de b par rapport à P et a. On peut aussi en donner une démonstration purement synthétique par comparaison d'aires de rectangles. La figure aide à comprendre comment.

D'une part, en vertu de ce qu'on a dit à propos de l' Enoncé 1, les rectangles de teinte claire ont même aire. Il est évident également que les triangles de même numéro ont même aire (ils sont égaux deux à deux), de même que les triangles notés (arbitrairement) $BB'B''$ et $PP'P''$. Par conséquent les rectangles de teinte soutenue ont aussi même aire, ce qui termine la démonstration.

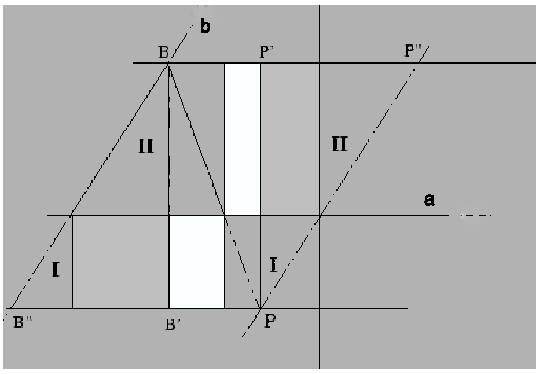

figure 10 : Les rectangles de même teinte ont même aire, ainsi que ceux de même numéro.

Avec la *transformée d'Agnesi* inverse, il vient

Enoncé 3 :
La *transformée d'Agnesi* inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à un point situé sur une de ces asymptotes et à une droite parallèle à celle-ci est une droite.

Nous laisserons au lecteur le soin de l'exploiter pour obtenir des exercices supplémentaires.

1.3.2 *Transformation inverse .*

Les développements sont analogues à ceux relatifs à la transformée directe. Nous laisserons à l'imagination du lecteur toute liberté de compléter à sa guise les quelques indications qui suivent.

Considérons à nouveau une droite d d'équation $px + qy + r = 0$. La courbe $\mathcal{A}^{-1}(d)$ est définie par

l'équation

$$ph\frac{x}{y} + qy + r = 0. \tag{1.2}$$

Lorsque d n'est ni parallèle ni perpendiculaire à a , il s'agit d'une parabole. Elle passe par A et par l'intersection B de d et de la perpendiculaire à a menée par A.

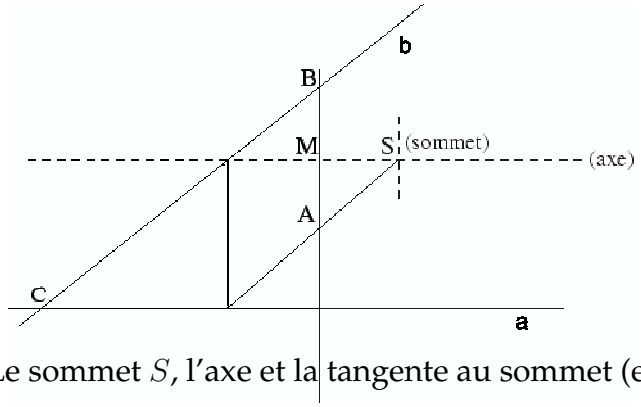

figure 11 : Le sommet S, l'axe et la tangente au sommet (en pointillé) de $\mathcal{A}^{-1}(d)$.

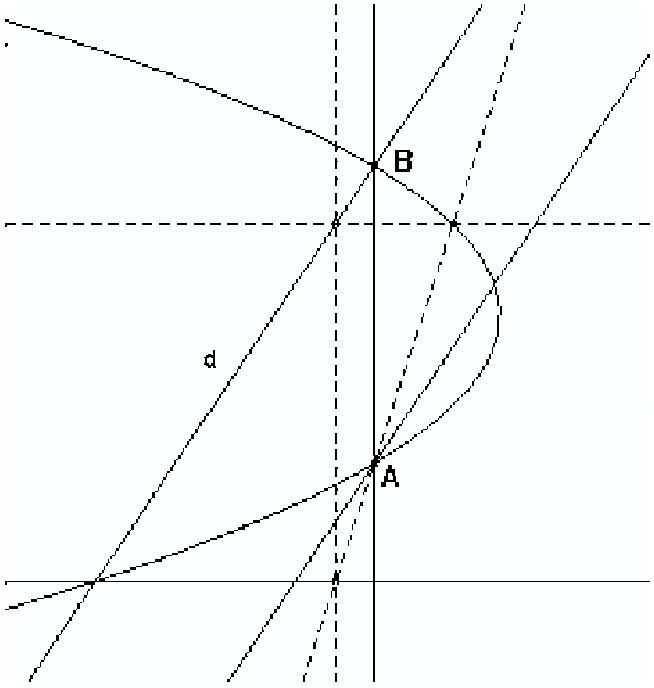

figure 12 : Aperçu de la parabole.

Elle passe aussi par l'intersection de d et de A . Son axe est parallèle à a. Il passe donc par le milieu M du segment $[AB]$. Son sommet est facile à construire. L'axe coupe d en un point. La droite qui passe par la projection orthogonale de celui-ci sur a et par passe par A le sommet de la parabole.

Lorsque d est perpendiculaire à a, l'équation (1.2) est celle de la droite passant par A et l'intersection de d avec a. Lorsque d est parallèle à a, elle représente elle-même.

Les faits ci-dessus font l'objet d'énoncés que nous ne formulerons pas explicitement[6]. Nous nous contenterons de formuler une forme de réciproque à laquelle ils donnent lieu.

[6]En particulier, nous ne donnerons pas de justifications synthétiques à ces propriétés

Enoncé 4 :
Des points A et B sont situés sur une parabole. La droite joignant le sommet de celle-ci à la projection orthogonale de l'intersection de (AB) avec l'axe sur la parallèle à l'axe passant A par coupe la perpendiculaire à l'axe menée par selon un point de la parabole.
8 *Pierre Lecomte*

Voici un autre exemple, facile à paramétrer et conduisant à une courbe du quatrième degré en forme de huit. Il s'agit de la transformée inverse d'un cercle par rapport à son centre et à une tangente

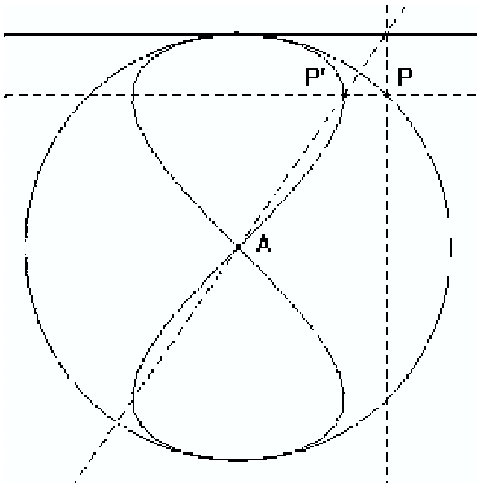

figure 13 : La transformée inverse du cercle par rapport au centre et à une tangente est une sorte de "huit".

1.4 *Annexe Historique.*

Bien[7] des mathématiciens connaissent le nom d'Agnesi à cause de la cubique dite "versiera" ou « cubique d'Agnesi » ou encore « sorcière d'Agnesi ». Cette cubique a pour équation cartésienne $x^2y = a^2(a-y)$. Cependant, la plupart d'entre eux, peu au fait de son histoire, peuvent se demander en vain la raison de la dénomination, pour le moins inhabituelle, de cette courbe. Nous verrons que si la vérité est bien plus triviale que ce que l'on peut s'imaginer, il nous faut noter que ce nom a au moins l'avantage de perpétuer le souvenir de Maria Gaetana Agnesi, sinon la première du moins une des toutes premières mathématiciennes européennes de la période moderne.

Maria Gaetana Agnesi naquit à Milan en 1718, l'aînée des 21 enfants de Pietro Agnesi dont la famille avait fait fortune dans le commerce de la soie[8] . Elle fut poussée dans les études par son père qui lui procura les meilleurs maîtres de la région en philosophie, en langues, en sciences naturelles, en mathématiques et en musique. Dès l'âge de 11 ans, elle dominait de nombreuses langues dont le français, le latin, le grec, l'allemand, l'espagnol et l'hébreux. En 1738 fut publié un volume de 191 thèses philosophiques qu'elle se prépara à défendre, défiant ainsi tous les concurrents. Les comptes rendus de son habileté dans cette joute oratoire montrent qu'elle possédait déjà de sérieuses connaissances dans les disciplines scientifiques puisqu'elle y fait référence à la théorie des marées, à la propagation de la lumière, aux propriétés géométriques des courbes et de son soutien à la philosophie newtonienne.

Cependant Agnesi se lassa rapidement d'une vie publique où on ne s'intéressait qu'à son prodigieux talent et, contre la volonté de son père, elle décida d'entrer au couvent. Ce n'est qu'après de longues discus-

[7]Traduction de Bruno Bernardoff (Pour le journal l'Ouvert de l'Irem de Strasbourg, n° 96) de la biographie ‚June Barrow-Green, Jeremy Gray Maria Gaetana Agnesi, *Newsletter*, n° 31, Mars 1999, Revue de la Société Mathématique Européenne.

[8]C'est à tort que de nombreux dictionnaires biographiques perpétue le mythe d'un père professeur de mathématiques à Bologne. Le statut social exact de la famille Agnesi est parfaitement documenté dans l'ouvrage d'Anzoletti "Maria Gaetana Agnesi" publié à Milan en 1900.

sions, qu'elle accepta de rester au sein de la famille à la condition qu'elle abandonne les formes de sa vie passée. Elle se cloîtra chez elle et s'adonna à l'étude de la religion et des mathématiques. Ses progrès en mathématiques furent grandement facilités par l'arrivée à Milan de Ramiro Rampinelli (1697–1759), moine bénédictin et surtout mathématicien qui était auparavant professeur à Rome et à Bologne. Rampinelli devint un visiteur régulier de la maîtresse de maison et tînt bientôt le rôle de professeur d'Agnesi.

Le premier travail mathématique d'Agnesi, un commentaire du traité posthume de L'Hospital sur les sections coniques[9] , ne fut pas publié. Cependant, son deuxième ouvrage mathématique, "Instituzioni Analitiche ad Uso della Gioventù Italiana", en deux volumes, publié à compte d'auteur à Milan en 1748, la rendit célèbre (*cf* fig **??**). Il était rédigé en italien (et non pas en latin) d'une part parce qu'elle préférait écrire en cette langue et d'autre part parce qu'elle voulait le rendre accessible à la jeunesse italienne, en particulier à ses frères. Son but, comme elle le déclare dans la préface, était de présenter le sujet de façon qu'il soit « pourvu de sa clarté et de sa simplicité propre... [et] suive l'ordre naturel qui procure, peut-être, le meilleur enseignement et la plus grande lumière » La préface contient également un hommage émouvant à Rampinelli ainsi qu'une reconnaissance envers une œuvre plus ancienne de Reyneau[10].

En dehors de Rampinelli, une autre personne eut une influence importante sur l'ouvrage. Il s'agit du mathématicien Jacopo Riccati (1676–1754). Rampinelli connaissait bien Riccati et c'est sur son conseil qu'Agnesi lui écrivit, lui demandant son avis et des commentaires sur son travail. Commença alors une longue et fructueuse correspondance entre elle et Riccati, correspondance qui dura de 1745 à 1749 et dans laquelle Riccati suggère de nombreuses corrections et annotations. La correspondance contient également la « méthode des polynômes » œuvre non publiée de Riccati et qui datait de plusieurs années. Agnesi inclut cette œuvre dans son ouvrage en précisant soigneusement son origine.

À première vue, il semble que l' "Instituzione Analitiche" fut un grand succès. Marie-Thérèse, Grande Duchesse d'Autriche et féministe notoire à laquelle Agnesi avait dédicacé son travail, montra sa satisfaction en envoyant à l'auteur une boîte incrustée de diamants. Le Pape Benoît IV qui avait lui-même étudié les mathématiques lui écrivit personnellement pour la féliciter et peu de temps après il lui accorda le poste rémunéré de lectrice honoraire en analyse à l'université de Bologne. En 1750, elle fut nommée sur la chaire de mathématiques. En 1749, l'Académie française recommanda que le deuxième volume fut traduit en français, traduction qui vit le jour en 1775. En 1760, John Colson4 prépara une traduction anglaise5 mais qui ne fut publié qu'en 1801 pour diverses raisons dont la mort du traducteur. Colson avait été tellement intéressé par le travail d'Agnesi qu'il apprit l'italien pour effectuer la traduction, traduction qui ne se limitait pas seulement au vocabulaire mais également aux notations, puisqu'il transposa les notations de Leibniz en celles de Newton.

Cependant, un examen plus attentif des sources montre que l'accueil de son livre ne fut pas aussi large qu'on peut le penser. Le travail d'Agnesi ne reçut pratiquement pas d'attention de la part des grands mathématiciens du XVIIIe siècle et plus tard les historiens des mathématiques l'ignorèrent largement. Comme Truesdell l'a démontré avec force, c'était essentiellement parce que le livre d'Agnesi, bien qu'il fut sans aucun doute un modèle de clarté, ne contenait rien de nouveau ou d'original, ni davantage d'applications à la mécanique. Bien qu'il ait été décrit avec précision comme « un exposé par l'exemple plutôt que par la théorie », il ne contient pas un seul exemple d'un calcul différentiel ou intégral appliqué à un phénomène naturel, contrairement à bien d'autres livres de l'Europe continentale de la même période. Le livre commence par l'algèbre élémentaire, continue par la théorie des équations et l'usage des coordonnées en géométrie, puis dans le volume II, attaque le calcul différentiel et intégral (ainsi que les séries infinies telles qu'on les connaissait à l'époque), et termine par la résolution des équations différentielles élémentaires.

[9]Guillaume de L'Hospital, « Traité analytique des sections coniques », Paris 1720. Ce livre eut une grande importance lors de sa publication.

[10]Charles René Reyneau : « Analyse démontrée ou la méthode de résoudre les problèmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences » Paris 1707. 4 John Colson était titulaire d'une chaire à Cambridge de 1739 à 1760. La plupart de ses publications sont des traductions. 5 J. Colson, "Analytical Institutions", Volume I, Londres 1801.

L'étude de la courbe connue aujourd'hui sous le nom de « sorcière d'Agnesi » apparaît vers la fin du premier volume[11] (page 381). Cette courbe, dont la première mention se trouve dans les travaux de Fermat, fut construite en 1703 par Guido Grandi (1671–1742) qui, en 1718, l'appela « Versiera » du latin « Versiora » qui est la corde qui entoure une voile[12]. Dans l'étude de cette courbe, Agnesi suit fidèlement Grandi et écrit "La curva... dicesi la Versiera". Le nom de « sorcière » n'apparut que plus tard et résulte d'une erreur de traduction. Le coupable en est Colson qui confondit "la Versiera" avec " l'aversiera" qui a justement le sens de « sorcière » (voir sa traduction page 222).

INSTITUZIONI
ANALITICHE
LIBRO PRIMO
Dell' Analisi delle Quantità finite.

figure 14

Malgré sa nomination sur une chaire de l'université de Bologne, Agnesi ne se rendit jamais dans cette ville pour y toucher ses revenus. Pourtant son nom resta sur les registres de l'université pendant quarante-cinq ans. Peu de temps après la publication de "Instituzioni Analitiche", et sans doute à la suite d'une sévère injonction paternelle elle se dédia corps et âme à la religion. Elle prit en charge l'instruction de ses frères et sœurs et s'engagea dans l'aide aux pauvres et aux malades. Après la mort de son père en 1752, elle redoubla de ferveur religieuse et s'investit totalement dans son travail charitable. Elle créa et finança un hospice pour les vieilles femmes. En 1771 elle devint directrice d'un grand asile pour pauvre, "Pio albergo Trivulzio" dépendant de l'église et elle y mourut, sans ressource, en 1799.