

2

Le cube en famille

Guy Noël, Université de Liège.

2.1 Introduction.

L'utilisation de logiciels de dessin, et en particulier la réalisation de dessins animés ou animables, permet et amène aussi une plus grande structuration des concepts mathématiques rencontrés.

Nous utilisons ici les mots « structure » et « structuration » dans un sens assez informel et plus large que celui qu'on rencontre par exemple dans le traité de Bourbaki. Structurer un ensemble de connaissances, c'est établir des connexions entre elles, ainsi qu'avec d'autres connaissances déjà établies antérieurement. C'est aussi procéder à des classifications, distinguer des caractéristiques de certains sous-ensembles, etc.

Nous inspirant des idées développées par Richard Palais¹, nous voulons ici attirer l'attention sur l'utilité, pour étudier et structurer une famille d'objets, de commencer par paramétriser cette famille. Si le choix de la paramétrisation est adapté aux propriétés que l'on veut étudier², on pointe alors les objets ayant des propriétés particulières en considérant les valeurs extrêmes des paramètres.

Dans un article antérieur³, nous avons illustré l'idée qui vient d'être esquissée en considérant la famille des triangles et une famille de pavages du plan ayant un groupe d'isométries bien déterminés. Nous nous intéresserons ci-dessous à la famille des polyèdres convexes ayant le même groupe de rotations que le cube et dont les sommets constituent une seule

¹R. Palais, *The Visualisation of Mathematics : Towards a Mathematical Exploration*, Notices of the A. M. S., **46**, 6, 647–658, (1999)

²Comme le montrent les paradoxes de Bertrand en probabilités, choisir une paramétrisation parmi d'autres peut se révéler délicat.

³G. Noël, *Structures, géométrie et informatique, de 7 à 77 ans*, à paraître dans *Mathématique et Pédagogie*.

orbite pour ce groupe. Nous tenons à la disposition des lecteurs intéressés un petit logiciel qui d'explorer la famille des polyèdres convexes dans l'esprit de cet article.

2.2 *Rappels et notations.*

- La première rotation du cube est évidemment l'application identique.
- Un cube admet trois axes de rotation d'ordre 4 : ses médianes
Nous désignons la rotation d'angle 90° autour de l'axe Z , ainsi que sa matrice, par la notation M_Z .

$$M_Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

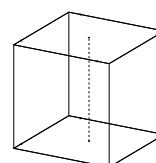


figure 1

- Un cube admet quatre axes de rotation d'ordre 3 : ses diagonales.
Nous désignons la rotation d'angle 120° autour de la diagonale qui passe par le sommet $[1\ 1\ 1]$, ainsi que sa matrice par la notation D_1 .

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

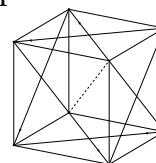


figure 2

- Un cube admet six axes de rotation d'ordre 2 : les droites joignant les milieux d'arêtes opposées.
La matrice de la rotation représentée ci-contre n'est pas difficile à calculer directement. Il est tout aussi facile de remarquer que cette rotation est aussi la composée de D_1 et M_Z , de sorte que sa matrice est le produit matriciel $M_Z \cdot D_1$.

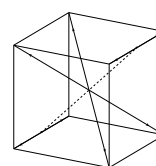


figure 3

On sait que le groupe des rotations du cube comprend 24 éléments : l'application identique, neuf rotations dont l'axe est d'ordre 4, huit rotations dont l'axe est d'ordre 3 et six rotations dont l'axe est d'ordre 2. Les rotations M_Z et D_1 constituent une partie génératrice de ce groupe. Nous n'utiliserons donc que les matrices M_Z et D_1 .

2.3 *L'orbite d'un point.*

Puisque le groupe des rotations comprend 24 éléments, l'orbite d'un point est constituée de 24 points, dont certains peuvent être confondus. (L'orbite d'un sommet du cube ne comporte que 8 points, celle d'un sommet de l'octaèdre en comporte 6 et celle d'un sommet du cuboctaèdre 12.)

Nous pouvons structurer comme suit l'orbite d'un point par le groupe G_C du cube :

1. Nous partons d'un point $P_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Nous appliquons à ce point trois fois la rotation M_Z . Nous déterminons ainsi un carré de sommets

$$P_0, \quad P_1 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

3. Nous appliquons deux fois au carré $P = P_0P_1P_2P_3$ la rotation D_1 . Nous obtenons deux carrés supplémentaires, nous les notons Q et R ($Q_i = D_1(P_i)$ et $R_i = D_1(Q_i)$) :

$$Q_0 = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -x \\ z \\ y \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

et

$$R_0 = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Puisque, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $Q_i = D_1(P_i)$, $R_i = D_1(Q_i)$ et $P_i = D_1(R_i)$, chacun des triangles $P_iQ_iR_i$ est équilatéral.

À ce stade, le dessin se présente comme suit :

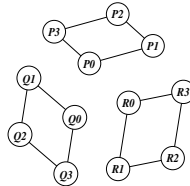


figure 4

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$M_Z(Q_1) = R_0 \quad M_Z(Q_2) = R_1 \quad M_Z(Q_3) = R_2 \quad M_Z(Q_0) = R_3$$

De sorte que M_Z applique le carré Q sur le carré R .

4. Nous avons trouvé 12 points de l'orbite de P_0 , qui peut en contenir jusqu'à 24. Pour trouver des points supplémentaires, appliquons la rotation M_Z au carré R . Par analogie avec les formules ci-dessus, nous poserons

$$M_Z(R_1) = S_0 \quad M_Z(R_2) = S_1 \quad M_Z(R_3) = S_2 \quad M_Z(R_0) = S_3$$

De même, nous appliquons la rotation M_Z au carré $S = S_0S_1S_2S_3$ en posant

$$M_Z(S_1) = T_0 \quad M_Z(S_2) = T_1 \quad M_Z(S_3) = T_2 \quad M_Z(S_0) = T_3$$

Vu que $M_Z(Q) = R$, il est inutile d'appliquer M_Z à T : le résultat ne peut être que Q .

Nous trouvons donc huit points supplémentaires de l'orbite, répartis en deux carrés S et T :

$$S_0 = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ -x \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ x \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} -z \\ x \\ -y \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} -z \\ -x \\ y \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} -z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

et la figure comporte à présent cinq carrés :

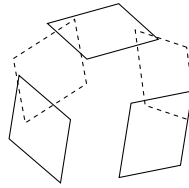


figure 5

5. Il nous manque encore quatre points de l'orbite. Ces points ne peuvent être obtenus qu'en appliquant la rotation D_1 à l'un des carrés S ou T . Or D_1 applique le carré S sur le carré T . Par exemple, $D_1(S_0) = T_2$. Par contre les quatre points obtenus en appliquant D_1 aux points T_i ne figurent pas encore dans l'orbite. Ils constituent les sommets d'un sixième carré noté U . Nous posons donc

$$U_0 = D_1(T_0) \quad U_1 = D_1(T_1) \quad U_2 = D_1(T_2) \quad U_3 = D_1(T_3)$$

De façon précise :

$$U_0 = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad U_1 = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$$

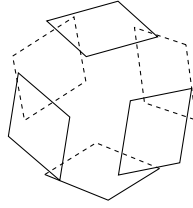


figure 6

Le graphe suivant représente l'orbite du point P_0 , les flèches en traits pleins relèvent de la rotation M_Z , et les flèches en traits tiretés de la rotation D_1 .

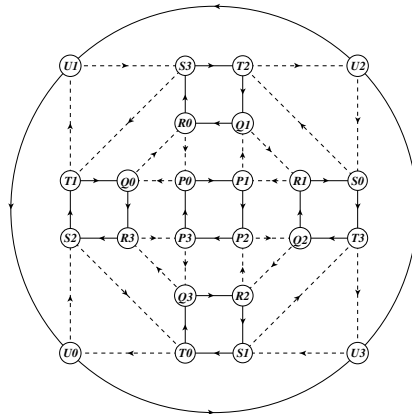


figure 7

2.4 paramétrisation

Nous venons de déterminer l'orbite par le groupe des rotations du cube d'un point quelconque de l'espace. Nous nous intéresserons dans la suite à l'enveloppe convexe de cette orbite. Les polyèdres ainsi obtenus constitueront la « famille du cube », étant bien entendu que nous nous limitons aux polyèdres *convexes* et *homogènes*, ce dernier terme signifiant que les sommets des polyèdres considérés constituent une seule orbite pour le groupe des rotations du cube.

La première chose à réaliser est de déterminer le « domaine de paramétrisation de la famille du cube ». Ici aussi, il y a des sous-entendus : nous ne considérons pas comme différents des polyèdres directement semblables : ce sont des « formes de polyèdres » qui nous intéressent.

Pour atteindre notre objectif, nous allons travailler en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Dans ces formules, θ est l'angle entre le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et l'axe Z , angle que nous nommerons la « colatitute », et φ est l'angle entre la projection de ce vecteur sur le plan XY et l'axe X . Nous le nommerons la longitude. r est le rayon de la sphère circonscrite au polyèdre. Nous choisirons tout simplement $r = 1$.

A priori, θ peut varier entre 0 et π , et φ entre 0 et 2π .

L'orbite d'un point peut être engendrée par n'importe lequel de ses points. Cette propriété nous permet de limiter le domaine de variation des paramètres θ et φ .

Par exemple, les quatre points P_0, P_1, P_2 et P_3 ont la même colatitute puisque les trois derniers sont images du premier par des rotations d'axe Z . L'un d'entre eux a certainement une longitude comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2}$ exclu). C'est celui-là que nous appelons P_0 . Comme précédemment, les coordonnées de P_0 sont simplement notées x, y et z .

La première contrainte affectant les paramètres θ et φ est donc $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Il en résulte $\cos \varphi \geq 0$ et $\sin \varphi \geq 0$. Donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Ainsi, P_0 est dans le premier octant. Les seuls autres points de l'orbite dans le premier octant sont Q_0 et R_0 .

De même, nous pouvons supposer que P_0 est un des points de l'orbite dont la colatitute est minimum. Autrement dit, aucun point de l'orbite ne peut être strictement plus haut que P_0 . Exprimons cette condition analytiquement.

Vu les symétries de l'orbite, il suffit que P_0 soit plus haut que Q_0 et R_0 . La hauteur de P_0 est $z = \cos \theta$, celles de Q_0 et R_0 sont respectivement x et y . Clairement les conditions à satisfaire par P_0 sont donc

$$z \geq x \quad \text{et} \quad z \geq y$$

Dans le cas $x \geq y$, c'est-à-dire si $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ la condition à satisfaire est $\cos \theta \geq \sin \theta \cos \varphi$. Et si $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, la condition est $\cos \theta \geq \sin \theta \sin \varphi$.

Ainsi, le domaine de variation des paramètres θ et φ est limité par les conditions

$$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ et } \begin{cases} \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\cos \varphi} & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\sin \varphi} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Par exemple, pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, θ peut varier de 0 à $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$. Si $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$, alors on a $P_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'orbite ne comporte que 8

points distincts : les sommets d'un cube.

Pour $\theta = 0$, la valeur de φ importe peu : le point P_0 est en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans

ce cas, l'orbite est constituée des sommets d'un octaèdre.

Aux autres points du domaine de paramétrisation correspondent d'autres formes de polyèdres, que nous étudierons au paragraphe suivant. Retenons déjà l'allure du domaine de paramétrisation de la famille du cube, et la position du cube et de l'octaèdre dans ce domaine :

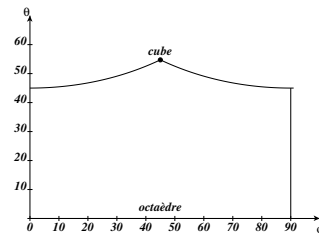


figure 8

2.5 La famille du cube

Maintenant que nous avons paramétrisé la famille du cube, nous pouvons étudier les polyèdres (convexes) qui la constituent. Chaque membre de la famille est l'enveloppe convexe d'une orbite. Nous devons déterminer les faces de cette enveloppe.

Il est d'abord clair que le carré $P = P_0P_1P_2P_3$ est une face du polyèdre, puisque les quatre sommets de ce carré sont les sommets de hauteur maximum de celui-ci. De plus, le polyèdre admettant le même groupe de rotations que le cube, les rotations M_Z et D_1 appliquent une face sur une face. Les carrés Q, R, S, T et U , obtenus précédemment et représentés à la figure 6 sont donc aussi des faces.

Sur la figure 7, on peut lire que les 24 points de l'orbite se répartissent en 8 triangles équilatéraux associés à la rotation D_1 . Ces huit triangles sont dans des plans perpendiculaires à l'axe de D_1 , donc parallèles entre eux. Deux de ces triangles — les plus éloignés de l'origine — sont nécessairement des faces. La distance à l'origine du plan d'un de ces triangles est la distance du barycentre de ce triangle à l'origine. On calcule donc les huit vecteurs $\frac{1}{3}(P_0 + Q_0 + R_0), \dots, \frac{1}{3}(S_2 + T_0 + U_0)$, puis les normes de ces huit vecteurs. On dresse ainsi le tableau suivant, où les distances sont toutes données à un facteur $\frac{\sqrt{3}}{3}$ près :

Triangle	$P_0Q_0R_0$	$P_1Q_1R_1$	$P_2Q_2R_2$	$P_3Q_3R_3$	$S_3T_1U_1$	$S_0T_2U_2$	$S_1T_3U_3$	$S_2T_0U_0$
Distance à O	$ x + y + z $	$ -x + y + z $	$ -x - y + z $	$ x - y + z $	$ x + y - z $	$ -x + y - z $	$ -x - y - z $	$ x - y - z $

Compte tenu de ce que les trois nombres x, y et z sont positifs, et des inégalités $z \geq x, z \geq y$, on voit que les valeurs extrêmes de ce tableau sont $x + y + z$ et $-x - y - z$. Ainsi les triangles $P_0Q_0R_0$ et $S_1T_3U_3$ sont des faces

du polyèdre perpendiculaires à l'axe de la rotation D_1 . En appliquant la rotation M_Z à ces deux faces, et en itérant l'opération deux fois, on trouve six nouvelles faces triangulaires perpendiculaires aux autres diagonales du cube. Ce sont, d'après la figure 7, les triangles équilatéraux $P_1R_3S_3$, $P_2S_2T_2$, $P_3T_1Q_1$ et $T_0Q_2U_2$, $Q_3R_1U_1$, $R_2S_0U_0$.

Dessignons la situation actuelle :

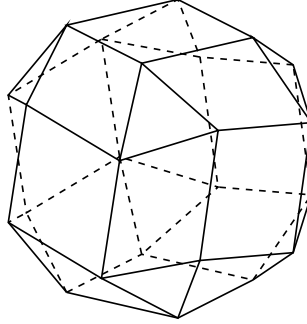


figure 9

Notre travail n'est pas terminé : la figure précédente montre 14 faces du polyèdre, six carrés et huit triangles équilatéraux. Dans certains cas particuliers, par exemple le cube ou l'octaèdre, on a trouvé ainsi toutes les faces du polyèdre. On constate même qu'il arrive à des faces de disparaître : le cube n'a que des faces carrées, l'octaèdre n'a que des faces triangulaires. Mais dans le cas général, il nous manque encore des faces.

En effet, dans un polyèdre, tout sommet doit appartenir à au moins trois faces ! Or, sauf cas particuliers, les points appartenant à l'orbite appartiennent exactement à une des faces carrées et à une des faces triangulaires.

En examinant la figure 9, on pourrait cependant croire que le polyèdre est complet. On constate en effet que des quadrilatères sont apparus en plus des carrés et des triangles équilatéraux. Ces quadrilatères « empruntent » deux côtés opposés à des carrés et les deux autres côtés opposés à des triangles équilatéraux. Ils sont au nombre de 12 : les six carrés ont ensemble 24 arêtes, les huit triangles équilatéraux en ont autant. Comme aucune arête n'est commune à un carré et à un triangle équilatéral, les 48 arêtes délimitent 12 quadrilatères.

Mais on constate aussi en examinant les quadrilatères situés sur les bords de la figure qu'ils ne sont pas plans. Or nous nous intéressons aux polyèdres *convexes*. Examinons de plus près un de ces quadrilatères, par exemple $P_0P_1R_3R_0$ (voir la figure 4).

On sait que $R_0 = M_Z(Q_1) = M_ZD_1(P_1)$ et $R_3 = M_Z(Q_0) = M_ZD_1(P_0)$. Or M_ZD_1 est une rotation de 180° . Par conséquent, on a aussi $P_1 = M_ZD_1(R_0)$ et $P_0 = M_ZD_1(R_3)$. De plus, l'axe A de cette rotation de 180° est perpendiculaire aux segments $[P_1R_0]$ et $[P_0R_3]$ et les coupe en leur milieu.

2.5.1 Sous quelle condition le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ est-il plan ?

Admettons d'abord que les quatre points P_0, P_1, R_0, R_3 sont distincts. Alors, pour que le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ soit plan, il faut et il suffit que les segments $[P_1R_0]$ et $[P_0R_3]$ aient le même milieu.

Or

$$\frac{1}{2}(P_1 + R_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y + z \\ 0 \\ y + z \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2}(P_0 + R_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + z \\ 0 \\ x + z \end{pmatrix}$$

Le quadrilatère est donc plan si $x = y$, c'est à dire si $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, pour obtenir l'enveloppe convexe de l'orbite de P_0 , il suffit d'adjoindre les douze quadrilatères en question aux faces déjà trouvées.

Si $x > y$ (ou $\varphi < \frac{\pi}{4}$), alors les points P_0 et R_3 sont plus éloignés de l'origine que P_1 et R_0 . On obtiendra l'enveloppe convexe en coupant en deux triangles le quadrilatère gauche $P_0P_1R_3R_0$ à l'aide de la diagonale P_0R_3 . Par contre, si $x < y$ on devra utiliser dans ce but la diagonale P_1R_0 .

Les deux configurations ci-dessous ne se distinguent que par les valeurs de la longitude φ : 34° pour celle de gauche, 56° pour celle de droite. Ces deux valeurs sont symétriques par rapport à 45° . Les deux configurations sont symétriques par rapport au plan d'équation $x = y$.

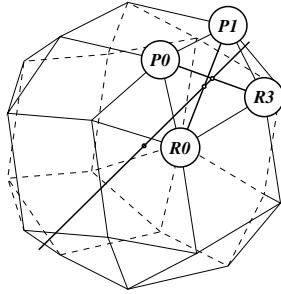


figure 10

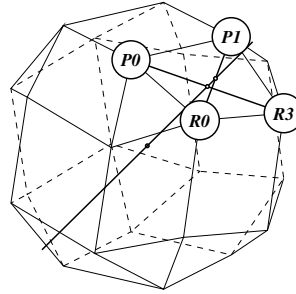


figure 11

Sur chacune de ces figures on a tracé l'axe de la rotation de 180° qui échange les points P_1 et R_0 d'une part, P_0 et R_3 d'autre part. Sur la figure 11, on va tracer la diagonale R_0P_1 du quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$, alors que sur la figure 10, on va tracer P_0R_3 .

En procédant de la même manière pour tous les quadrilatères gauches du type $P_0P_1R_3R_0$, on obtient deux polyèdres convexes symétriques.

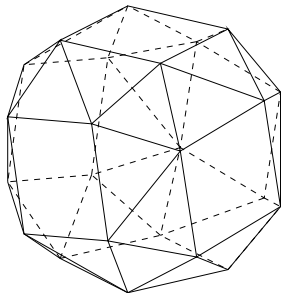


figure 12

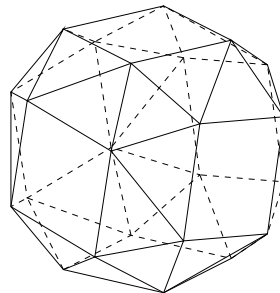


figure 13

Pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, on obtient un polyèdre qui est son propre symétrique. Le quadrilatère $P_0P_1R_3R_0$ est un rectangle : c'est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. De plus, le plan de symétrie (du polyèdre) d'équation $x = y$ passe par les milieux des arêtes P_0P_1 et R_3R_0 .

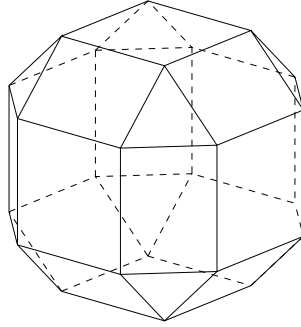


figure 14

2.5.2 Sous quelle condition les quadrilatères gauches disparaissent-ils ?

Nous envisageons dans ce paragraphe la possibilité que les quatre points P_0, P_1, R_3, R_0 ne soient pas tous distincts. Plusieurs cas apparaissent.

$P_0 = P_1$: Ce cas ne peut se produire que si le point P_0 est sur l'axe de

M_Z , autrement dit si $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou encore $\theta = 0$. Il est de plus

équivalent à $R_3 = R_0$. Le polyèdre est alors un octaèdre. Les faces carrées du type $P_0P_1P_2P_3$ se réduisent à des points, les polygones gauches du type $P_0P_1R_3R_0$ se réduisent à des segments et ceux-ci coïncident avec les arêtes des faces triangulaires du type $P_0Q_0R_0$.

$P_0 = R_0$: Dans ce cas, on a aussi $P_0 = Q_0$ puisque P_0, Q_0 et R_0 sont sommets d'un triangle équilatéral. De même P_1, R_3 et S_2 coïncident, etc. Ainsi, les faces triangulaires sont réduites à un point, situé sur l'axe de la rotation D_1 , les polygones gauches $P_0P_1R_3R_0$ se réduisent à des segments et ceux-ci coïncident avec les arêtes des faces carrées type $P_0P_1P_2P_3$. Puisque $P_0 = Q_0 = R_0$, on a $x = y = z$ et par conséquent $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \arctg \sqrt{2}$ (soit 54,5356... degrés) Le polyèdre est un cube.

$P_0 = R_3$: De l'examen de la figure 7, on déduit immédiatement $Q_0 = P_3$. La face carrée $P_0P_1P_2P_3$ est donc cette fois adjacente à la face triangulaire $P_0Q_0R_0$. Le polygone gauche $P_0P_1R_3R_0$ se réduit à deux arêtes R_0P_0 et P_0P_1 .

De $P_0 = R_3$, on déduit aussi $x = z$ et $y = 0$: P_0 appartient à l'axe de la rotation M_ZD_1 . On a alors $\varphi = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Le polyèdre est un cuboctaèdre.

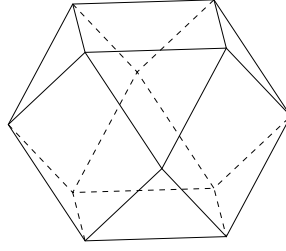


figure 15 : Un cuboctaèdre

$P_1 = R_0$: Ce cas correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. À part cela, il est identique au précédent, à ceci près que les identifications entre sommets s'opèrent autrement. Mais le polyèdre final est le même.

2.5.3 D'autres possibilités

Dans le cas général, une face carrée et une face ayant la forme d'un triangle équilatéral ne peuvent avoir en commun qu'un sommet. Les « trous » entre ces deux types de faces sont bouchés par les triangles issus du coupage en deux, par une diagonale, des polygones gauches de type $P_0P_1R_3R_0$. Se pourrait-il que pour certaines valeurs des paramètres θ et φ , deux faces adjacentes soient coplanaires, ce qui les amènerait à fusionner ?

Il est clair qu'une face carrée et une des faces triangulaires équilatérales ne pourraient être coplanaires : les unes sont dans des plans perpendiculaires aux axes de rotation d'ordre 4, les autres dans des plans perpendiculaires aux axes de rotation d'ordre 3. Ces directions de plans sont indépendantes des valeurs de θ et φ .

Par contre, on pourrait imaginer qu'un des sommets R_0 ou R_3 soient dans le plan du carré $P_0P_1P_2P_3$. Vu la symétrie d'ordre 4, ce sont alors quatre triangles qui fusionneraient avec ce carré, amenant la formation d'octogones.

De la même façon, un des points P_1 ou R_3 pourrait être dans le plan du triangle $P_0Q_0R_0$, et cette fois c'est la symétrie d'ordre 3 qui amènerait la formation d'hexagones.

Voyons cela de plus près.

- Si $\varphi < \frac{\pi}{4}$, le triangle $P_0P_1R_3$ est une face adjacente au carré $P_0P_1P_2P_3$. Ces deux faces sont coplanaires si R_3 a la même hauteur que P_0 . Or la hauteur de R_3 vaut x , et la relation $x = z$ équivaut à

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Si cette condition est satisfaite, on note en effet le remplacement des six faces carrées et des 24 faces triangulaires issues des quadrilatères gauches par six octogones.

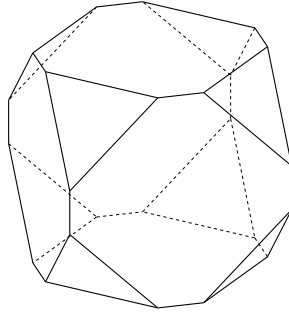


figure 16

- Si $\varphi > \frac{\pi}{4}$, c'est le triangle $P_0P_1R_0$ qui est une face adjacente au carré $P_0P_1P_2P_3$. On procède comme ci-dessus en supposant que R_0 a la même hauteur que P_0 . La hauteur de R_0 vaut y , et la relation $x = z$ équivaut à

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Nous pouvons résumer ces deux situations en disant que le polyèdre admet des faces octogonales lorsque le point (φ, θ) appartient à la courbe qui limite vers le haut le domaine de paramétrisation (figure 7).

- Si $\varphi < \frac{\pi}{4}$, le triangle $P_0R_0R_3$ est une face adjacente à la face triangulaire équilatérale $P_0Q_0R_0$. Le point R_3 est dans le plan de cette face si et seulement si le vecteur $R_3 - P_0 = \begin{pmatrix} z - x \\ -2y \\ x - z \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à l'axe de la rotation D_1 , c'est à dire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition à satisfaire est donc $y = 0$, c'est-à-dire $\sin \theta \sin \varphi = 0$. Le cas $\theta = 0$ est celui — déjà rencontré — de l'octaèdre. Le cas $\varphi = 0$ correspond aux points du bord gauche du domaine de variation.

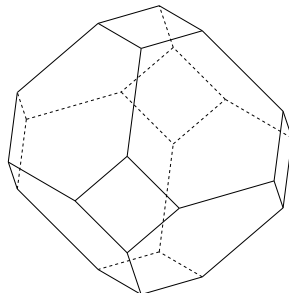


figure 17

- Si $\varphi > \frac{\pi}{4}$, c'est le triangle $P_0P_1OR_0$ qui est une face adjacente à la face triangulaire équilatérale $P_0Q_0R_0$. Le point P_1 est dans le plan de cette face si et seulement si le vecteur $P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} y - x \\ -x - y \\ 0 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à l'axe de la rotation D_1 , c'est à dire au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition à satisfaire est donc $x = 0$, c'est-à-dire $\sin \theta \cos \varphi = 0$. Le cas $\theta = 0$ est à nouveau celui de l'octaèdre. Le cas $\varphi = \frac{\pi}{2}$ correspond aux points du bord droit du domaine de variation.

Dressons un tableau qui résume (provisoirement) nos constatations.

θ	φ				
	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
0	Octaèdre (φ quelconque) F : 8 triangles équilatéraux, A : 12, S : 6				
	F : 8 hexagones, 6 carrés A : 36 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 24 triangles A : 60 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 12 rectangles A : 48 S : 24	F : 6 carrés 8 triangles équil. 24 triangles A : 60 S : 24	F : 8 hexagones, 6 carrés A : 36 S : 24
Max	$\frac{\pi}{4}$ Cuboctaèdre F : 6 carrés 8 triangles équil. A : 24 S : 12	$\arctg \frac{1}{\cos \varphi}$ F : 6 octogones 8 triangles équil. A : 36 S : 24	$\arctg \sqrt{2}$ Cube F : 6 carrés A : 12 S : 8	$\arctg \frac{1}{\sin \varphi}$ F : 6 octogones 8 triangles équil. A : 36 S : 24	$\frac{\pi}{4}$ Cuboctaèdre F : 6 carrés 8 triangles équil. A : 24 S : 12

2.6 Des polyèdres archimédiens

Dans les pages précédentes, nous avons déjà découvert dans la famille du cube des polyèdres très particuliers. D'abord deux polyèdres réguliers, le cube lui-même et l'octaèdre. Ensuite un polyèdre quasi-régulier, le cuboctaèdre.

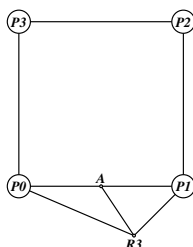
Nous allons rechercher à présent si la famille comprend d'autres polyèdres archimédiens. Il nous suffit de rechercher dans cette famille les polyèdres dont toutes les faces sont des polygones réguliers.

Les seuls polygones que l'on rencontre comme faces de polyèdres de cette famille sont des triangles, des rectangles, des hexagones et des octogones.

Nous procéderons en passant en revue les différentes cases du tableau précédent.

1. Commençons par la case de la dernière ligne pour laquelle $\varphi < \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$.

Pour trouver un polyèdre archimédien dans cette case, il faut rechercher des valeurs de θ et φ pour lesquelles les faces octogonales soient régulières. D'après l'analyse faite en 2.5.3, une des faces octogonales est constituée du carré $P_0P_1P_2P_3$ fusionné avec quatre triangles parmi lesquels le triangle $P_0P_1R_3$.



La première condition à satisfaire pour que l'octogone soit régulier est que les côtés P_0R_3 et R_3P_1 aient même longueur, c'est-à-dire que dans le plan $P_0P_1P_2$, le point R_3 soit sur la médiatrice de P_0P_1 . La figure ci-dessus est réalisée dans ce plan. Les coordonnées de P_0 , P_1 et R_3 y sont respectivement (x, y) , $(y, -x)$ et $(x, -y)$. Le milieu du segment P_0P_1 est le point A de coordonnées $\frac{1}{2}(x+y, y-x)$. La perpendicularité de P_0A et AR_3 se traduit par l'équation $2y^2 + 4xy - 2x^2 = 0$, soit, en remplaçant $\frac{y}{x}$ par $\operatorname{tg} \varphi$: $\operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0$. La solution positive est $\operatorname{tg} \varphi = -1 + \sqrt{2}$ ce donne pour φ une valeur de $\frac{\pi}{8}$. La valeur correspondante de θ est donnée par l'équation $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\cos \varphi}$. On obtient ainsi $\theta = 0.8249436 \dots \text{ rad } (47,26579 \dots^\circ)$

En principe, pour vérifier qu'un polygone est régulier, il faut vérifier que les côtés ont même longueur, mais aussi que les angles sont égaux. Nous venons de choisir θ et φ de façon que R_3 soit sur la médiatrice de P_0P_1 . Par raison de symétrie, les quatre sommets de l'octogone autres que P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont tous sur la médiatrice d'un

des côtés du carré $P_0P_1P_2P_3$ et les huit côtés de l'octogone ont même longueur. De plus, les huit rayons joignant le centre du carré aux huit sommets de l'octogone ont même longueur puisque les coordonnées dans le plan du carré de P_0 et R_3 sont respectivement (x, y) et $(x, -y)$. Enfin ces huit rayons forment entre eux huit angles de $\frac{\pi}{4}$. L'octogone est donc régulier.

2. Pour $\varphi > \frac{\pi}{4}$ et $\text{tg } \theta = \frac{1}{\sin \varphi}$, on trouve de la même manière un polyèdre archimédien correspondant à $\varphi = \frac{3\pi}{8}$ et $\theta = 0.8249436 \dots \text{ rad}$.

Les deux polyèdres précédents portent le nom de « cube tronqué ».

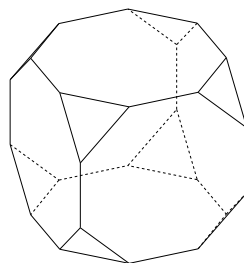


figure 18 : Un cube tronqué

3. Passons à la case du tableau pour laquelle $\varphi = 0$ et $\theta < \frac{\pi}{4}$. Les polyèdres correspondant à cette case ont 14 faces dont 6 carrés et 8 hexagones. Nous cherchons si ces hexagones, construits autour de triangles équilatéraux tels que $P_0Q_0R_0$ sont réguliers pour certaines valeurs de θ .

Dans cette situation, on a $P_0 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, $R_0 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R_3 =$

$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Notre raisonnement sera analogue au précédent : nous

cherchons si le point R_3 peut se trouver sur la médiatrice de P_0R_0 . En notant A le milieu de P_0R_0 et en exprimant la perpendicularité de AR_3 et AP_0 , on obtient l'équation

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{2}$$

d'où $\theta \simeq 26,56^\circ$.

4. On obtient bien entendu un autre polyèdre du même type pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \text{arctg } \frac{1}{2}$. Ces deux polyèdres portent le nom de « octaèdre tronqué ».