1

Géométrie vectorielle.

Michel Ballieu et Marie-France Guissard
CREM, Nivelles.

> Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas la voie d'accès la plus courte aux belles constructions de la géométrie. C'est pourquoi je pense qu'en ce qui concerne la géométrie, nous avons besoin d'une autre analyse encore qui soit clairement géométrique ou linéaire et qui exprime directement les *situations* comme l'algèbre exprime directement les *grandeurs*.
>
> G. W. LEIBNIZ

Le dernier volet – qui vise la tranche d'âge de 15 à 18 ans – de la recherche du CREM sur la linéarité concerne la géométrie vectorielle. Il n'y a pas si longtemps, l'algèbre linéaire s'enseignait dans le plus pur schéma axiomatique, sans donner la moindre place à l'intuition. C'est dans l'esprit de la réforme des « mathématiques modernes » que s'inscrivait cette manière d'enseigner. Nous savons aujourd'hui qu'elle n'a pas produit les résultats escomptés. Cet échec a entraîné le retrait quasi complet de l'algèbre linéaire du cursus de l'école secondaire. L'enseignement de cette discipline est ainsi reporté en première année des études supérieures, où le manque de temps et parfois l'absence de souci pédagogique ne procurent pas aux étudiants une meilleure approche de cette matière difficile.

Au CREM, nous pensons qu'il est indispensable de travailler la géométrie vectorielle à partir de quinze, seize ans, en développant des formes d'intuition, des images mentales et la conscience de la performance de l'outil vectoriel pour résoudre des problèmes de géométrie.

Nous proposons donc des séquences d'apprentissage qui, dans un premier temps, sont conçues de manière à favoriser l'intuition. Les activités conduisent à la mise en place de la notion de composantes d'un vecteur ; elles abordent les opérations élémentaires sur les vecteurs dans un contexte riche de sens concret.

Après ce démarrage en douceur, les élèves sont confrontés à la résolution de problèmes qui exploitent de manière très profonde le concept de combinaison linéaire.

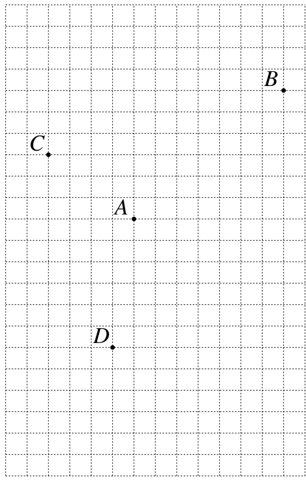
Nous avons retrouvé dans les textes originaux, qui témoignent de l'émergence de la notion de vecteur, la préoccupation majeure qui a guidé notre démarche, à savoir : décrire simplement un déplacement, c'est-à-dire une grandeur d'une autre espèce qu'un nombre réel, en fait quelque chose qui possède à la fois une direction, un sens et une longueur. ARGAND les appelle *lignes en direction* ou *lignes dirigées*, TAIT les nomme *vecteurs*, BELLAVITIS et LAISANT les désignent par le terme *droites*.

Nous allons maintenant préciser quelque peu le travail dans les classes. Au fil de leur parcours scolaire, les élèves ont calculé d'abord avec des nombres, ensuite avec des lettres qui représentent des nombres. Nous leur proposons de découvrir un nouveau mode de calcul qui permettra de traduire des problèmes géométriques sous forme algébrique. Il est donc prudent, avant de se lancer dans cette nouveauté, de faire le point sur leur connaissance des propriétés des opérations sur les réels.

On présente ensuite un plan de l'Ensanche à Barcelone et on pose quelques questions.

– Comment indiquer le chemin qui mène d'un point quelconque de cette ville à un autre ?
– Ce chemin est-il unique ?
– Y a-t-il plusieurs chemins de même longueur ?
– Y a-t-il des chemins plus courts que les autres ?

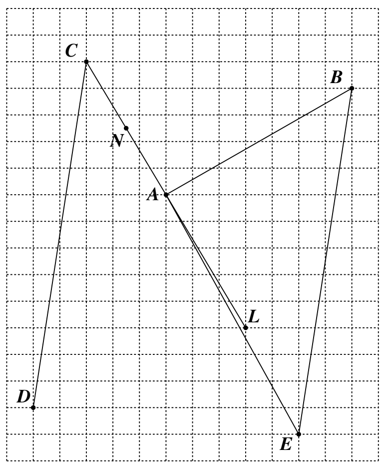
On fournit une feuille comme ci-contre, qui schématise un plan de la ville et on demande de décrire quelques déplacements sur ce quadrillage, par exemple le déplacement AB, le déplacement BC, ... Au départ, les élèves utilisent quatre symboles qui peuvent être h, b, d, g (haut, bas, droite, gauche). Le nombre de ces symboles peut être réduit à deux si on oriente les deux directions, ce qui provoque l'apparition de nombres négatifs. Enfin, moyennant une convention, un déplacement peut être caractérisé par un couple de réels dans une matrice colonne. Nous avons choisi de disposer les couples sous forme de colonnes pour préparer le vecteur colonne du calcul matriciel et pour éviter la confusion avec les couples de coordonnées. De plus, les différentes opérations sur les couples, qui se font terme à terme, apparaissent plus clairement dans cette disposition où les termes correspondant sont sur une même ligne.



Une activité similaire est alors proposée sur une feuille munie d'un réseau de parallélogrammes, puis de triangles. Le travail sur les réseaux triangulaires, où trois directions semblent privilégiées, permet de faire progresser considérablement toute une série d'intuitions. Même si on ne prononce pas des expressions comme *dépendance linéaire*, *indépendance linéaire*, *famille libre*, *famille génératrice*, les élèves perçoivent que, dès qu'on se donne deux déplacements de directions différentes, ils engendrent tous les déplacements du plan. De plus, l'activité montre clairement que les deux déplacements « de base » déterminent univoquement les composantes des déplacements mais que ces composantes sont différentes chaque fois que l'on change de base. On comprend aussi qu'il est possible de calculer les composantes des déplacements dans une nouvelle base dès qu'on connaît les composantes de ces déplacements dans l'ancienne et les composantes des déplacements de l'ancienne base dans la nouvelle.

La mise en relation, dès le départ, des déplacements du plan et de leurs composantes, permet de travailler à la fois l'aspect géométrique et le calcul sur les composantes dans la construction des opérations sur les vecteurs.

La somme des déplacements est abordée dans un premier cas où l'origine du second déplacement coïncide avec l'extrémité du premier. Si après le déplacement AB noté $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, on effectue le déplacement BC noté $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$, les élèves s'accordent à dire que l'on a effectué le déplacement AC. On leur demande alors si une relation existe entre les trois couples de nombres associés aux déplacements AB, BC et AC. Ils observent que les composantes du déplacement AC s'obtiennent par une addition terme à terme de celles de AB et de BC, ce qui incite à parler d'addition de déplacements.



Avant d'aborder le deuxième cas où l'origine du second déplacement ne coïncide plus avec l'extrémité du premier, les élèves sont invités à dessiner sur un quadrillage un déplacement quelconque, par exemple, $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ils le placeront évidemment à des endroits différents de la feuille et prendront ainsi conscience qu'un couple détermine la direction du déplacement, son sens et sa longueur mais ne donne aucune indication sur sa position. Il apparaît ainsi qu'un même déplacement peut être dessiné en une infinité d'endroits dans le plan et qu'on peut choisir parmi toutes ces possibilités celle qui convient le mieux à chaque situation. On demande alors d'effectuer $AB + CD$, qui donne AE.

Une question telle que « Quel est le déplacement CL qui, en partant de C mène deux fois plus loin que CA dans la même direction et le même sens ? » permettra de définir la multiplication d'un déplacement par un nombre, à la fois sur le graphique et sur les composantes, par utilisation du théorème de THALÈS.

Il faut bien entendu que les élèves soient conscients du fait que $CL = k \cdot CA$ donne une condition d'alignement des points A, C et L. C'est par le biais des multiples des déplacements par des scalaires fractionnaires que l'on se dégage des nœuds du quadrillage.

Des exercices de fixation sont proposés. Leur intérêt est non seulement de faire manipuler les opérations qui viennent d'être définies, mais surtout de dégager petit à petit les propriétés du calcul vectoriel.

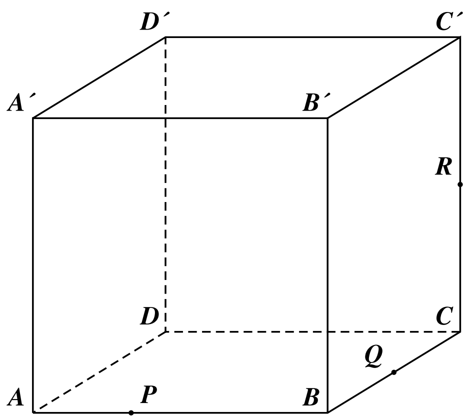
Les expériences effectuées en classe ont montré à quel point les idées ont foisonné tout au long de cet ensemble d'activités. Si bien que le besoin de faire le point et de rassembler de manière claire les résultats obtenus, s'est fait sentir impérieusement. Les élèves élaborent une première synthèse, en termes de déplacements du plan, puis une autre, de nature plus théorique, reprenant la structure d'espace vectoriel.

La séquence d'apprentissage se généralise aisément à l'espace. Avec des étudiants dont la tournure d'esprit accepte plus facilement l'abstraction, il est possible de reconnaître la même structure dans des ensembles de polynômes, dans l'ensemble des suites arithmétiques, ...

Le problème de situer un point sur un quadrillage est latent depuis le moment où l'on a demandé de dessiner un déplacement donné par ses composantes. Chaque élève reçoit une feuille A4 recouverte d'un quadrillage. L'un d'entre eux a la consigne de placer un point A sur un nœud du quadrillage et, sans montrer sa feuille, de communiquer des renseignements à ses condisciples pour que chacun puisse placer le point A exactement au même endroit de la feuille. Cette courte activité préalable est destinée à faire prendre conscience du fait que, pour déterminer la position d'un point, en plus des deux vecteurs « de base », il faut une origine. Après avoir fait le lien entre composantes d'un vecteur et coordonnées de ses extrémités, la classe est prête à résoudre des problèmes d'alignement, de parallélisme et de centres de gravité.

On traitera aussi des questions d'incidence comme, par exemple, la détermination d'une section plane dans un cube.

Construire la section du cube par le plan PQR, où P est situé sur l'arête $[AB]$ au tiers à partir de A, Q est situé au milieu de l'arête $[BC]$ et R est situé au milieu de l'arête $[CC']$. On demande ensuite de déterminer les coordonnées de tous les sommets de cette section, après avoir choisi un repère approprié.
Dessiner la vraie grandeur de la section. Reporter la section sur un développement de cube.



Une telle activité permet d'allier plusieurs facettes d'un même problème :

- la construction de la section par géométrie synthétique ;
- la détermination de la position exacte de chaque sommet de la section sur chacune des arêtes par géométrie vectorielle ;
- la détermination de la vraie grandeur de la section par calcul des longueurs de côtés et des amplitudes des angles (par produit scalaire) ;
- la construction d'un développement du cube avec découpe de la section.

Il est également possible d'aborder vectoriellement les transformations du plan et de l'espace.

Dans certaines sections de sixième année, le programme des cours prévoit d'enseigner les nombres complexes. Il nous a paru opportun de mettre en évidence la corrélation très étroite qui, dès le départ allie les concepts de nombres complexes et de vecteurs. Quelques extraits de textes de TAIT, BELLAVITIS et LAISANT sont très clairs à ce sujet. Lorsqu'on tente de remonter aux origines des vecteurs, on se heurte inévitablement au souci qu'avaient les mathématiciens de l'époque de donner un sens aux quantités imaginaires. Cela débouche sur la représentation géométrique des complexes et sur leur généralisation à quatre dimensions, les quaternions. Par exemple, BELLAVITIS définit un produit de vecteurs qui n'est rien d'autre que le produit de deux complexes considérés dans leur représentation géométrique.

La lecture de ces textes fait comprendre pourquoi on peut avantageusement utiliser les nombres complexes comme outil de démonstration en géométrie. Certains problèmes où interviennent des transformations du plan, notamment des rotations, trouvent, par ces complexes, une solution élégante et plus courte que celle fournie par le calcul matriciel. Dans ce contexte, nous présentons, pour quelques applications, une confrontation des méthodes de résolution par la géométrie vectorielle, par les nombres complexes, par la géométrie synthétique. Il nous paraît de loin préférable d'exercer les élèves au calcul avec les nombres complexes dans des situations géométriques significatives plutôt que de leur soumettre des listes de calculs vides de sens.

Les deux derniers chapitres de cette partie destinée aux élèves de quinze à dix-huit ans rattachent l'idée de vecteur à celle de *grandeur vectorielle* en physique. On y traite d'abord de problèmes simples d'équilibre de solides dans un champ de pesanteur uniforme, ce qui mobilise les centres de gravité. On étudie ensuite les conditions d'équilibre d'un point soumis à des forces, matière qui permet d'introduire la règle du parallélogramme. Cette même loi est reprise dans le contexte de la composition des vitesses pour des mouvements uniformes et uniformément accélérés.

L'ouvrage se termine par un chapitre qui propose une synthèse de l'ensemble, qui dégage la structure linéaire dans ses divers avatars de la maternelle jusqu'à dix-huit ans.

Le lecteur désireux d'en savoir plus peut consulter l'ouvrage *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*, CREM, 2002. Le texte de ce rapport de recherche est entièrement téléchargeable sur le site `http://www.agers.cfwb.be`

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
rue Émile Vandervelde 5 B1400 Nivelles (Belgique)
+32 (0)67 212527 `crem@sec.cfwb.be`
`http://www.profor.be/crem/index.htm`