EXPLOITER EN FORMATION UN EXTRAIT DU GUIDE « LA RESOLUTION DE PROBLEMES MATHEMATIQUES AU COLLEGE »

Annabelle FANIC, Sylvie GRAU

Résumé. Le guide « La résolution de problèmes mathématiques au collège » publié sur Éduscol en 2021 fait partie des ressources mises à disposition des professeurs de l'enseignement secondaire mais aussi de leurs formateurs et formatrices. Nous nous sommes donc questionnées sur la manière dont on pouvait penser l'utilisation de cette ressource en formation. Nous allons ici nous intéresser à un extrait proposant une situation « le grand défi (construire pour raisonner) » (p. 150) que nous avons expérimentée dans des classes de 4^e^.

Différentes ressources institutionnelles sont actuellement publiées, dont le guide « la résolution de problèmes mathématiques au collège »[1] (MEN, 2021) synthétisant des contributions de chercheurs, chercheures, d'inspecteurs, d'inspectrices, d'enseignants et d'enseignantes, ayant fait l'objet d'une relecture critique de membres du Conseil scientifique de l'éducation nationale. 213 pages pour ce guide, ce qui représente un effort de lecture et d'appropriation pour les enseignants et enseignantes en poste. Formatrices à l'INSPE de l'académie de Nantes, nous nous sommes naturellement posé la question de l'utilisation de ce guide en formation initiale, mais aussi continue. Nous avons donc proposé à un professeur de mathématiques de collège d'expérimenter une situation tirée de ce guide et nous avons cherché comment exploiter cette expérimentation en formation initiale. L'idée était d'avoir des données sur la réalisation effective de séances inspirées par les propositions du guide afin d'identifier les apports de la ressource et les points de vigilance à avoir pour sa mise en œuvre.

L'atelier a proposé aux participants et participantes l'analyse des différentes étapes du dispositif et mis en discussion les nombreuses questions que posent ce type de ressource au sein de l'institution, mais aussi à la communauté des chercheurs et chercheures en didactique des mathématiques. Il a permis de tester et discuter de dispositifs de formation et de l'impact des choix de formation sur les pratiques des futurs enseignants et enseignantes de mathématiques du second degré (Choquet & Grau, 2021).

Le choix de la situation

Le guide précise qu'il « s'adresse aux professeurs de l'enseignement secondaire, mais aussi aux professeurs de l'école primaire et à leurs formateurs » (MEN, 2021). Ainsi nous avons pu constater une injonction forte des membres de l'inspection du premier degré à utiliser les guides et une focalisation sur les situations proposées comme étant de « bonnes situations ». En effet, il est précisé que :

> […] des exercices ont été analysés systématiquement sous le même angle : pourquoi proposer ce genre de problèmes en classe, quels en sont les ressorts de continuité ou de

[1] https://eduscol.education.fr/document/13132/download

progressivité, mais surtout quelles stratégies d'enseignement mettre en place concrètement ? Les analyses faites n'ont pas la prétention d'être exhaustives et les professeurs – dans le cadre des formations entre pairs – pourront avantageusement les compléter ». (MEN, 2021, p. 8).

Il nous semblait donc intéressant de voir comment cette analyse permettait ou non à un enseignant ou une enseignante de collège de proposer l'activité dans sa classe et de voir comment il ou elle l'analysait. En outre, le guide rappelle que la résolution de problème peut intervenir à différents moments de l'apprentissage, sa fonction est alors différente et l'enseignant ou l'enseignante doit aménager étayages, explicitations, institutionnalisation en lien avec son projet d'enseignement. Ce cadre correspond à un axe de travail important avec les étudiants et étudiantes de master MEEF, à savoir la déconstruction d'une représentation très répandue qu'un problème ne peut être posé qu'après l'enseignement des outils, concepts et méthodes qui permettent de le résoudre, un autre axe de travail étant de penser le processus d'institutionnalisation. La résolution d'un problème mobilisant de très nombreuses compétences et connaissances mathématiques, les enseignants et enseignantes ont parfois du mal à isoler ce qui doit figurer dans une trace écrite exploitable afin d'identifier « des stratégies transférables ou des propriétés pertinentes » (*Ibid*., p.12).

Pour rester dans la thématique des journées CORFEM 2022, nous nous sommes naturellement orientées vers le chapitre 5 qui aborde les problèmes de géométrie et plus particulièrement vers le problème 4 (*Ibid*., p. 150) intitulé « le grand défi (construire pour raisonner) » (voir l'énoncé en annexe 1). « Les problèmes de ce chapitre illustrent des situations où ce qui est visible n'est pas suffisant pour raisonner juste ; il faut donc aussi imaginer et abstraire. » Nous sommes donc dans la perspective de rendre nécessaire le passage du paradigme G1 – géométrie perceptive, descriptive et instrumentée – au paradigme G2 – géométrie du raisonnement (Houdement, 2007; Rouquès et *al*., 2019) – ce que nous appelons dans le cadre de l'apprentissage par problématisation (désormais CAP) un changement de registre explicatif (désormais REX). Le REX est considéré comme le cadre dans lequel l'élève pose, construit et résout un problème, ce cadre pouvant être, comme ici, associé à un domaine spécifique des mathématiques (un cadre mathématique au sens de Douady), à un paradigme dans un cadre mathématique précis (comme les paradigmes en géométrie) ou encore à un point de vue spécifique. La situation doit amener les élèves à construire des nécessités amenant à une évolution du REX (Hersant, 2022). Enfin le guide met en évidence une dialectique entre construire et raisonner. La construction peut étayer le raisonnement, mais le raisonnement peut aussi être un préalable nécessaire à la construction. Le problème que nous avons choisi doit amener à construire pour raisonner. La construction géométrique doit amener à poser, construire et résoudre un problème allant vers la preuve. Il s'agit non seulement de produire une construction valide mais aussi les éléments permettant d'expliquer et de valider la construction et sa procédure.

Ce problème a été proposé à des étudiants et étudiantes de M2 MEEF premier degré par Annabelle, formatrice et co-autrice de ce texte, dans la perspective de (re)construire ou consolider leurs connaissances en géométrie plane et travailler sur le raisonnement. Face aux difficultés rencontrées par les étudiants et étudiantes, nous étions curieuses de voir son exploitation au collège par un enseignant ayant déjà de l'expérience et de croiser les analyses avec une chercheure. Ainsi, un enseignant, Claude, a accepté d'expérimenter la situation dans sa classe de 4^{e} et nous avons mené des temps d'analyse en amont, entre les séances et à la fin de l'activité pour croiser trois points de vue, celui de l'enseignant, celui de la formatrice, celui de la chercheure.

Analyse *a priori* et scénario

La première étape est l'analyse *a priori* de la situation. Nous avons proposé aux membres de l'atelier les deux pages de commentaires du guide, ainsi que la grille que nous donnons à nos étudiants et étudiantes en MEEF premier et second degrés pour faire une analyse *a priori*. Cette grille n'est pas donnée immédiatement, elle vient après des apports sur la théorie des situations didactique (TSD) (Brousseau, 2011) et des mises en œuvre collectives. Elle doit ensuite leur permettre l'analyse des situations qu'ils proposent en classe pour mesurer l'écart entre le prévu et le réalisé à partir de l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. C'est l'écart qui donne du sens à l'analyse *a priori* qui sinon peut rester pour les étudiants et étudiantes une simple tâche à exécuter dans le cadre de la formation (voir Annexe 2).

Dans l'atelier, il a été demandé de mener cette analyse à partir de la grille et ensuite d'échanger sur l'outil, les supports proposés en formation, les points de vigilance à avoir, l'adaptation en M1. Tout d'abord chacun a cherché à résoudre le problème, ce qui semble être un automatisme que n'ont pas tous les étudiants et étudiantes de master MEEF. La situation est suffisamment ouverte pour que, dans les groupes de quatre, des représentations différentes du problème et des procédures différentes émergent. Il s'avère effectivement que mener cette analyse seul ne permet pas d'anticiper tous les possibles, d'où la difficulté pour nos étudiants et étudiantes d'anticiper l'activité des élèves. Même pour des étudiants et étudiantes expérimentés, il s'avère que la démonstration n'est pas immédiate et que la question est alors de savoir comment faire émerger, pour les élèves, des pistes de démonstration à partir du tracé, sans dévoiler le raisonnement.

Dans le CAP, nous considérons que problématiser suppose de poser, construire et résoudre un problème. Poser le problème, c'est déjà l'identifier, comprendre qu'il y a un problème. Ici comment trouver un moyen rapide de placer précisément le point J. Construire le problème consiste à identifier les faits et les confronter aux idées. On parle aussi de données et de conditions, les données étant les contraintes du problème et les conditions les contraintes internes au sujet (ce qu'il sait, se représente, s'imagine, son expérience, les théories qu'il connaît…). Ces contraintes internes font que deux personnes ne vont pas toujours construire le même problème. La résolution du problème est donc en lien avec sa construction et peut être différente entre les élèves d'une même classe. Notre hypothèse est que l'enseignant doit veiller à une construction commune du problème pour que les élèves puissent tirer des enseignements de la résolution. Ici, deux problèmes peuvent être construits, celui de la construction géométrique et celui de la démonstration : Comment c'est vrai. Pourquoi c'est vrai.

Du point de vue de la ressource, la lecture du document n'apporte en réalité que peu d'éléments pour faire l'analyse *a priori* de la situation. Les indications données sont plutôt orientées vers l'aide à la scénarisation : mettre les élèves en groupe, dans un climat de confiance les autorisant à prendre des initiatives, motiver par des défis, stimuler par une vérification rapide par le professeur, inciter les élèves à coder. Il est précisé que la situation peut être donnée en 5^{e}, une fois les propriétés du parallélogramme connues. Quelques éléments sont présents dans la partie « stratégies d'enseignement ». Dans ce chapitre sont évoquées des variables didactiques : figure, support quadrillé ou non, logiciel de géométrie, mais aussi certaines difficultés et certains obstacles : prendre l'initiative de placer un point, coder la figure, extraire des sous-figures. Par contre l'étonnement des élèves devant la conjecture, supposé être le moteur de la preuve, semble incontestable. On peut s'interroger sur le rôle du contrat didactique qui n'est pas explicitement précisé.

Enfin la question de l'institutionnalisation amène à distinguer deux étapes, celle de l'institutionnalisation de la construction du problème et celle de sa résolution. Il en sort la nécessité de prévoir des temps réflexifs et des étayages. Ni l'un ni l'autre ne sont précisés dans la ressource même si l'étayage est évoqué à plusieurs reprises sans que soit précisée la manière d'étayer.

Ce temps d'atelier a d'abord montré les limites de la ressource et les écarts entre les commentaires du guide et les attendus en formation :

- Le problème n'est pas résolu et les procédures ne sont pas détaillées, il peut être difficile pour un étudiant, et même pour un enseignant de collège, d'anticiper la manière dont les élèves vont construire le problème.
- Les variables didactiques sont évoquées mais pas clairement explicitées amenant à des choix pour la mise en œuvre qui peuvent modifier la construction du problème.
- Le guide ne présente pas une analyse *a priori* permettant de comprendre le sens et la fonction de cette analyse.

Les choix pour la mise en œuvre et les productions des élèves

Avant la mise en œuvre, la formatrice et l'enseignant se sont vus pour fixer la préparation de la séance. La séance sera menée en classe de 4^{e}. En fin d'année scolaire, les élèves ont mené des raisonnements dans le cadre du travail sur le théorème de Pythagore, ils n'ont pas travaillé sur des problèmes de raisonnement s'appuyant sur les connaissances liées aux parallélogrammes. Les élèves ont l'habitude de travailler en groupe, constitués au hasard.

Claude n'a pas rédigé de document de préparation, mais il a anticipé les documents pour les élèves et la consigne.

Il a reformulé l'énoncé :

> Chaque figure doit être complétée par un point *J* qui respecte les conditions suivantes :
> * *I*, *C* et *D* sont trois points tels que le point *I* est le milieu des segments [*AC*] et [*BD*] ;
> * *E* est le point tel que le point *A* est le milieu du segment [*DE*] ;
> * le point *J* est le milieu du segment [*CE*].
> Il faut placer le point J sur toutes les figures.
> Répartissez-vous les figures à compléter.

Il ne donne pas d'enjeu de rapidité, ni de précision, contrairement à ce qui est proposé dans la ressource.

Comme indiqué dans la ressource, Claude prévoit de proposer plusieurs figures (figure 1) par groupes de 4 élèves : il en donne 5 pour leur laisser le choix éventuellement de changer ou d'en laisser une de côté. Il choisit de faire des tracés sur papier quadrillé pour éviter les difficultés de construction avec les instruments.

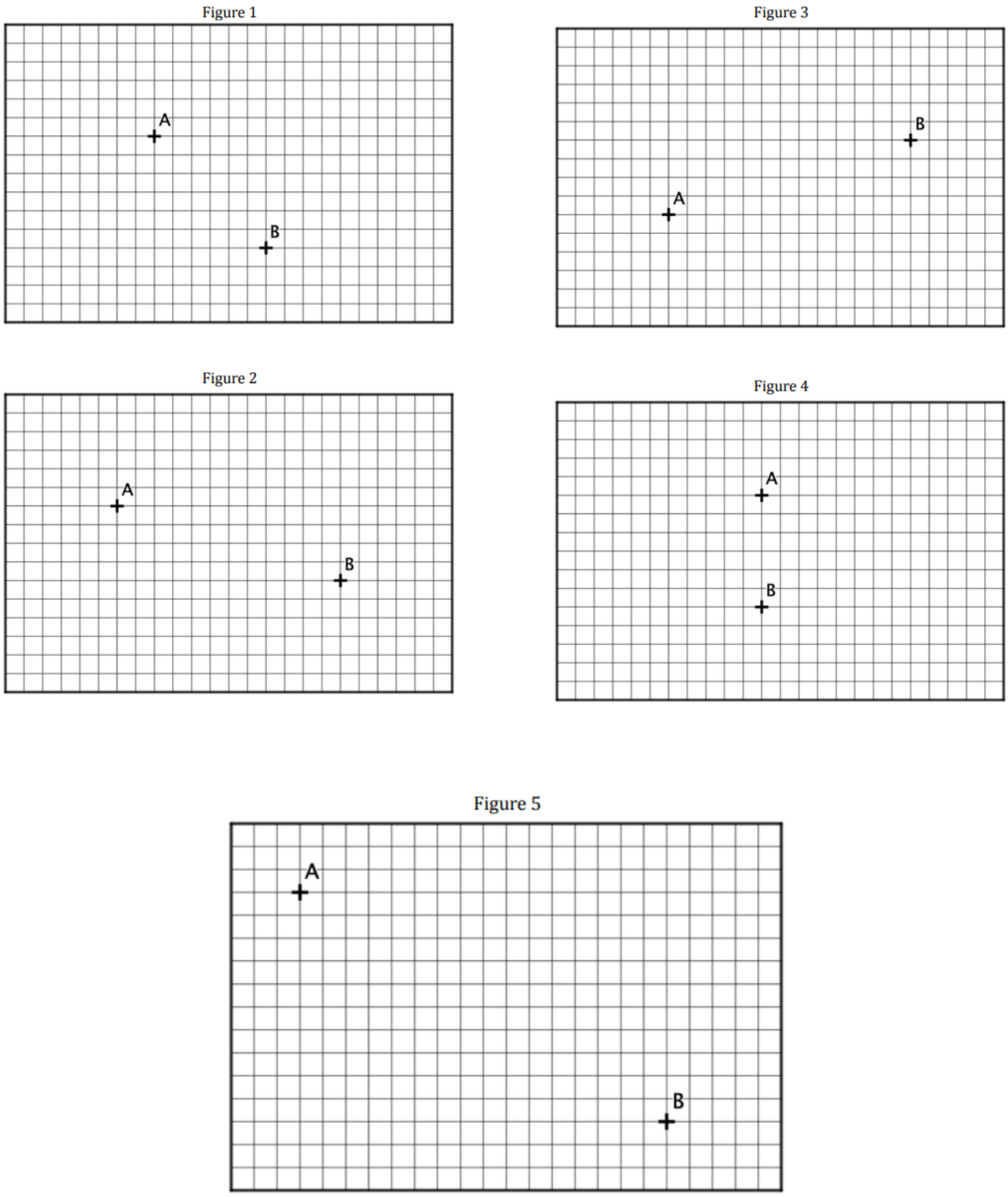


Figure 1. Les figures distribuées

La séance est menée en présence de la formatrice qui note les échanges qui ont lieu dans un groupe et lors des plénières et qui prend des photos des productions des élèves.

Comment rebondir à partir des productions des élèves lors de la première séance ?

A l'issue de l'expérimentation dans deux classes de 4^e^, un temps d'analyse est prévu avec l'enseignant, la formatrice et la chercheure. Les premières constructions des élèves sont en annexe 3. Lors de cette première séance, dans les deux classes, les élèves ont fait des essais de construction, expliqué leur construction, essayé de comprendre les explications des autres élèves. Les procédures sont parfois différentes de celles envisagées (« je fais deux segments et après j'essaye. »). La difficulté est essentiellement de démarrer la construction, mais dans l'une des classes, la réalisation n'est pas terminée à la fin de la séance. L'enseignant exprime une difficulté pour prendre des informations, intervenir en tenant compte de la diversité des élèves et des productions. Dans la première classe, il fait une pause réflexive – mise en commun des procédures et des idées − au bout de 20 min à partir de productions d'élèves. C'est l'enseignant qui amène les élèves à émettre une conjecture, il affirme qu'elle est vraie puis demande de réfléchir à des explications. Dans la seconde classe il fait une pause au bout de 40 min. Plusieurs groupes n'ont réussi aucune construction, l'enseignant guide les échanges pour qu'une conjecture soit formulée. Nous sommes donc très loin de « l'étonnement devant la conjecture » annoncée par la ressource institutionnelle. La mise en commun à l'issue d'une recherche, qu'elle soit individuelle ou collective, reste toujours problématique (Grau, 2018) et cette question est peu travaillée en formation initiale. Le nouveau défi est de construire la suite de l'activité ; comment penser un dispositif de formation autour de ce défi ?

A partir de ces productions, il faut envisager la suite du travail.

Nous proposons aux membres de l'atelier, répartis en cinq groupes de quatre, d'envisager le rebond à partir de productions d'élèves suivant différentes modalités :

- Au groupe A, il est demandé, à partir des productions du document A, qui figure en annexe 4, d'imaginer la suite de la séance.
- Au groupe B, la consigne est donnée de faire une analyse *a priori* de la 2ème séance construite à partir de document B, comportant des productions à classer (voir en annexe 5).
- Au groupe C, il est demandé de faire une analyse *a priori* du document C, qui figure en annexe 6, qui contient une fiche « preuve ».
- Au groupe D, il est demandé, à partir de la figuration (support reprenant des productions anonymes et introduisant certains éléments ostensifs), de faire une analyse *a priori* (document D en annexe 7). Que peuvent dire les élèves de ces productions ? Quelles vérifications peuvent-ils faire ? Quels arguments peuvent-ils échanger ?
- Au groupe E, la consigne est donnée d'analyser le processus d'institutionnalisation, à partir du verbatim, donné dans le document E, en annexe 8.

L'objectif est d'analyser ce que chaque modalité peut amener comme conditions dans le cadre de la formation initiale en master MEEF mathématiques second degré et quels savoirs peuvent être mis en évidence pour les étudiants et les étudiantes.

Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'approfondir le travail, mais certaines modalités ont été critiquées, ceci amenant des éléments de discussion.

Eléments de discussion à propos du document A (voir annexe 4)

Comment sélectionner les productions des élèves ? Le choix des productions doit amener la mise en évidence d'indices permettant de structurer le raisonnement. Ici le problème principal est de voir les sous-figures permettant de travailler successivement dans différents parallélogrammes. L'utilisation du parallélogramme pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment n'est pas disponible pour de nombreux élèves. La situation peut être utile pour introduire ce type de démonstration. La production de l'élève D est particulièrement intéressante puisqu'elle introduit le dessin à main levée comme outil pour mener un raisonnement inductif à partir de la construction réalisée. Le codage est nécessaire du fait que le tracé est à main levée, faisant apparaître les propriétés des figures et sous-figures. Il est aussi intéressant de voir que certains élèves tracent les segments et d'autres non, ce qui les amène à travailler dans des dimensions différentes. Cela permet aussi de mettre en évidence que les côtés des figures 2D ne sont pas tracées, le parallélogramme est caractérisé par ses diagonales, ce qui ne permet pas une reconnaissance perceptive aussi immédiate que lorsqu'il est caractérisé par ses côtés parallèles deux à deux. Ces productions peuvent donc amener à débattre des procédures pour réussir le tracé et ainsi permettre à tous les élèves de faire un tracé correct pour l'étape suivante.

Eléments de discussion à partir du document B (voir en annexe 5)

La tâche de « classement » est intéressante pour mettre en évidence les représentations des élèves. Quels critères mettent-ils en avant ? L'activité peut être l'occasion de spécifier les critères qui permettent d'accéder à la preuve. La difficulté est cependant d'induire des classements efficients chez les élèves qui sont très éloignés des critères attendus d'autant que ce type de tâche n'est pas habituel. Ici la question n'est pas de savoir ce qui est juste ou faux puisque toutes les productions ont été validées. Le classement peut alors se faire en fonction des objets dont il est question, en fonction des registres sémiotiques utilisés, ou en fonction de l'information qui est mise en avant ou encore de sa fonction. Il est difficile d'anticiper ce que les élèves vont produire mais la mise en commun doit permettre de discuter de la formalisation d'un même fait dans différents registres (codage du milieu d'un segment, langage naturel, écritures mathématiques) et d'amener l'idée de propriété caractéristique.

Eléments de discussion à partir du document C (voir en annexe 6)

Le fait de proposer une figure à main levée amène la nécessité de formaliser les propriétés et non plus à se contenter de « voir » sur la figure. La structure du document doit amener les élèves à identifier les faits (informations écrites, codées, données dans le texte de l'exercice), de citer les propriétés du cours (énoncé tiers), et de donner la nouvelle affirmation qu'on peut en déduire. Les propriétés sont schématisées avec des flèches pour décomposer les équivalences en deux implications. L'étape 3 amène la rédaction d'une démonstration. Cette étape permet de différencier le raisonnement (recherche et production d'une preuve par la mise en relation des idées et des faits en prenant comme référence des définitions, propriétés, théorèmes etc.) et la démonstration (formalisation structurée sous forme déductive et rédigée d'un texte tenant compte des conventions d'écriture). Une partie de la rédaction est prise en charge par le document, l'élève n'a que la responsabilité de compléter avec les tableaux précédents. La fin est laissée à la responsabilité de l'élève. Ici la mise en œuvre et le contrat didactique sont décisifs. Le risque étant que l'élève se contente de compléter les cases sans donner de sens à l'activité. C'est bien le discours et l'étayage, la validation par l'enseignant et le processus d'institutionnalisation mis en place qui peuvent amener l'élève à tirer de cette activité des éléments pour construire seul une démonstration dans un nouveau contexte.

Eléments de discussion à partir du document D (voir en annexe 7)

Que faut-il mettre en débat dans la classe : la validation ou l'explication ? En clair, la question du vrai ou faux est-elle toujours pertinente pour amener les élèves à comprendre pourquoi c'est vrai ? Dans le CAP, la construction du problème prime sur sa résolution, et ce sont les nécessités construites qui sont à la base du processus d'institutionnalisation. Les nécessités sur les objets mathématiques amènent à construire un savoir apodictique. Ici les arguments sont des explications données par les élèves, la tâche est de les classer suivant que les faits sont lus dans l'énoncé, issus de définitions ou issus d'un raisonnement à partir de propriétés. C'est une tâche inhabituelle qui doit amener les élèves à critiquer les productions des autres élèves et au statut de la preuve en mathématique. Cette activité peut être l'occasion de préciser le statut des arguments suivant qu'on cherche une piste (raisonnement inductif), qu'on veut convaincre (mais on peut être convaincu par un argument d'autorité) ou qu'on veut démontrer.

Eléments de discussion à partir du document E (voir en annexe 8)

Les notes prises lors de la mise en commun dans la classe de Claude permettent de bénéficier d'un verbatim dans lequel il est possible d'analyser le processus d'institutionnalisation. Ce support peut être l'occasion avec des étudiants de mesurer l'écart entre ce que les élèves ont produit, ce que l'enseignant veut formaliser et le savoir mathématique. L'utilisation du mot « malentendu » peut être l'occasion d'une approche des « registres pour apprendre » tels que les définit Rayou (Rayou, 2020).

Quelques pistes pour la formation en complément de l'atelier

Différents paradigmes en géométrie

Résoudre un problème de géométrie, quel qu'il soit, conduit à produire une figure mentalement ou matériellement (Bulf & Celi, 2016). La construction de figures planes peut être considérée comme une classe de problèmes. Il s'agit de construire une figure à partir d'informations qui peuvent être : une description (écrite ou orale), un schéma codé, éventuellement complété par une description – par exemple pour désigner des parallèles car, en France, nous n'avons pas de codage pour l'indiquer explicitement sur le schéma − ou un programme de construction.

Ici le problème posé est donc de trouver comment construire la figure. La solution pourrait relever d'une technique, mais il n'existe pas une technique générale immédiatement transférable, elle doit être adaptée au modèle. Par contre, ce qui peut être transférable, c'est la manière de construire les faits permettant de choisir ou adapter des techniques déjà rencontrées. En quoi cette factualisation est-elle spécifique à la géométrie et plus particulièrement aux problèmes de construction de figure ? En fonction du support (quadrillé ou non), de l'emplacement des points sur la feuille, de l'aisance et de la familiarité que l'élève peut avoir avec certaines techniques, chaque élève va construire un problème différent qui peut se schématiser dans le losange de problématisation par le schéma 1 (figure 2).

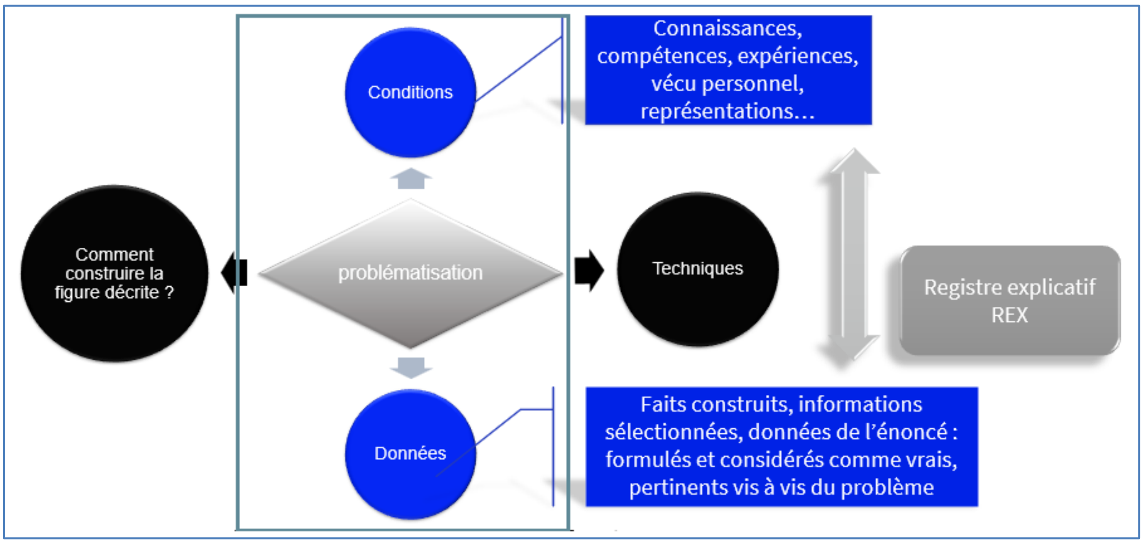


Figure 2. Losange de problématisation du problème 1

Un deuxième problème se pose ensuite, il s'agit d'un problème explicatif et non plus d'un problème de construction (voir le schéma 2, figure 3)) : pourquoi J est-il le milieu de [AB] ?

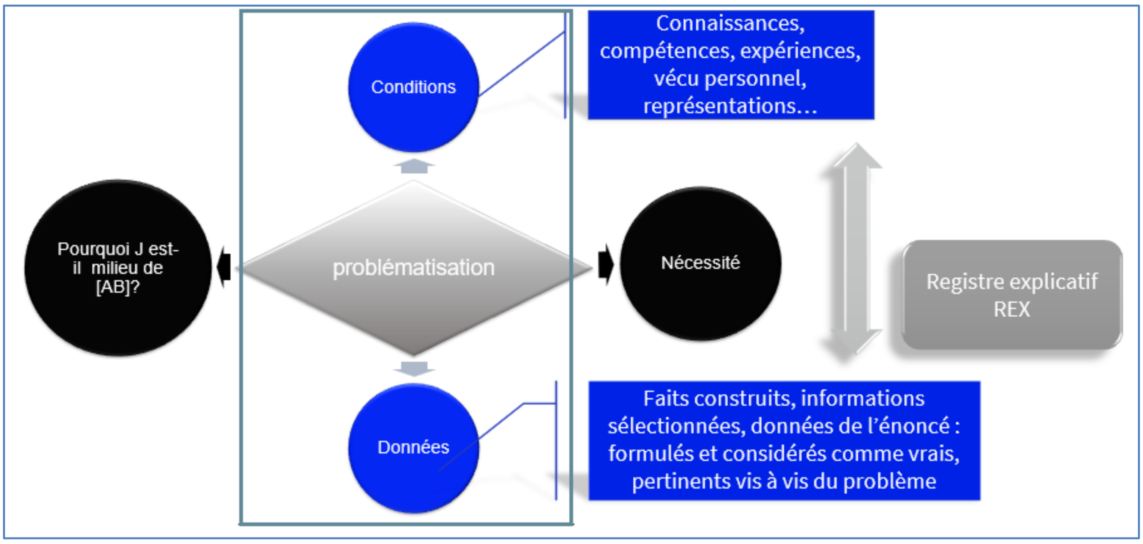


Figure 3. Losange de problématisation du problème 2

Ce nouveau problème amène à formaliser des nécessités – pourquoi le point J est-il au milieu de [AB] et pourquoi il ne peut pas être ailleurs ? – qui vont prendre le statut de nouveau fait pour des résolutions ultérieures.

Le CAP s'intéresse aux registres explicatifs (REX) mobilisés par les élèves pour mettre en évidence des changements de REX considérés comme des indices d'un apprentissage.

La construction de faits en géométrie dépend du paradigme dans lequel on travaille. Houdement et Kuzniak (2006) en définissent trois. Le paradigme qu'ils appellent G1 est celui de la géométrie naturelle, c'est une géométrie dans laquelle la validation se fait par le sensible, la réalité, la perception. Ainsi ici je vois un carré. Cela suppose la connaissance de formes qui permettent une reconnaissance automatique facilitée par certaines caractéristiques de ces formes comme ici le fait que les côtés sont de même longueur, qu'on peut le poser sur n'importe quel côté, on verra toujours la même forme, qu'on peut le plier suivant ses diagonales et que l'on a superposition etc. Le carré est la forme la plus vite connue et reconnue par les élèves. Elle peut être celle sur laquelle vont s'appuyer les premiers éléments de la géométrie G2 qui est celle de l'axiomatique dite naturelle. Dans le paradigme G2, la validation se fait par des lois hypothéticodéductives dans un système axiomatique mais ces axiomes ne sont pas détachés de la réalité, il s'agit ici de la géométrie euclidienne constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. Ainsi sur le dessin, je peux reconnaître un carré non pas par sa forme mais par l'interprétation que je fais du codage qui m'indique qu'il s'agit d'un quadrilatère dont les 4 côtés mesurent 3 cm et dont les 4 angles sont droits.

Si ces deux géométries se distinguent clairement par la nature des objets étudiés, elles ne s'excluent pour autant pas l'une l'autre, au contraire elles se complètent :

- la construction d'une figure complexe (question de géométrie dessinée) peut donner lieu à des raisonnements sur des figures abstraites (incursion en géométrie abstraite) avant de revenir au dessin ;
- pour résoudre une question concernant un objet abstrait, un élève peut commencer par faire une figure qui lui permettra de faire une conjecture (géométrie dessinée) puis effectuer des déductions (phrases ou calculs) à partir de ce qui est connu, seuls arguments acceptables en géométrie abstraite.

Un troisième paradigme est celui de la géométrie « axiomatique formaliste » G3 dans laquelle la validation se fait par un raisonnement logique basé sur une axiomatique complètement détachée de la réalité perceptible. Pour Wittgenstein, cette géométrie non euclidienne peut ne contenir aucune vérité (During, 2005). Le raisonnement logique prime sur le sensible dans une complétude du système d'axiomes (l'axiomatisation n'est plus partielle). Par exemple, le dessin ci-dessous représente un carré en géométrie hyperbolique. Il n'est pas possible de reconnaître le carré de G1 de manière perceptible sur ce dessin.

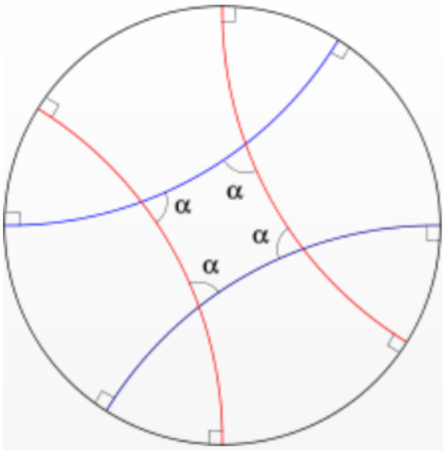


Figure 4. Représentation d'un carré en géométrie hyperbolique

Les travaux québécois de Tanguay apportent une nouvelle nuance en s'intéressant au rôle de la mesure dans le passage d'une géométrie perceptible qu'il dit intuitive à la géométrie déductible. Il définit alors un chainon manquant : la géométrie instrumentée qui consiste à construire et mesurer à l'aide d'instruments (Tanguay & Geeraerts, 2012).

Ainsi on peut définir un premier paradigme G0 dans lequel la perception est le seul moyen de factualiser. Et déjà dans ce paradigme, on peut définir différents niveaux d'abstraction (Fernandes & Vinter, 2009). Au niveau « archéologique », les tâches de manipulation permettent d'isoler des propriétés perceptives des objets afin de les reconnaître, la reconnaissance est globale. Par ailleurs la géométrie sur les représentations physiques ou mentales de l'objet − la reconnaissance est toujours liée à l'objet matériel mais cet objet est absent, il est évoqué ou représenté par ce qu'on appelle une image concept qui embarque toute la connaissance que l'élève a de l'objet − est le niveau « photographique ». Enfin le niveau « scénographique » correspond à un niveau ou l'élève est capable de faire une analyse des objets photographiés pour en identifier la structure et la composition et ainsi imaginer leurs caractéristiques, leur transformation, leurs interactions dans l'espace. Les images concepts ne sont plus statiques, elles peuvent alors amener l'élève à anticiper par déplacement mental, à imaginer différents points de vue. Le passage d'un niveau à l'autre est très lié au type de tâche demandé.

Reproduire une image constituée de pièces de tangram si l'image reste visible maintient l'élève au niveau archéologique ; si le modèle n'est exposé qu'un court instant, l'élève est contraint de travailler au niveau photographique ; si maintenant on donne uniquement le contour externe de l'image, l'élève va devoir opérer des transformations mentales pour imaginer la manière dont les différentes pièces peuvent le constituer.

La difficulté est d'amener les élèves à passer d'un paradigme à l'autre, certains obstacles étant extrêmement difficiles à franchir. Prenons l'exemple du cercle. Au cycle 1, les élèves vont reconnaître le cercle visuellement mais aussi par le toucher par sa caractéristique « il n'a pas de pique », « c'est rond », « il n'y a pas de côtés droits ». En fait ce que perçoit l'élève à ce stade c'est une ligne fermée dont la courbure est constante. Au cycle 2 est introduit un instrument, le compas, qui porte en lui les caractéristiques du cercle avec la pointe qui matérialise le centre et l'écartement du compas qui matérialise le rayon. Les élèves utilisent le compas pour tracer des cercles mais ne perçoivent pas réellement leurs caractéristiques, ils perçoivent surtout la forme obtenue. C'est au cycle 3 que les choses se précisent avec la définition du cercle comme l'ensemble des points équidistants de son centre. Ensuite au lycée, le cercle sera défini de manière formelle par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ où le point de coordonnées (a ; b) est le centre et R le rayon. Cet exemple illustre bien le chemin inverse que doivent effectuer les futurs enseignants pour repenser la construction des objets géométriques à partir de la géométrie perceptive, et en particulier pour penser la définition de ces objets dans une axiomatique cohérente. C'est pourquoi il peut être très utile de travailler ces paradigmes en formation des enseignants (Parzysz, 2006).

Reproduire une image constituée de pièces de tangram si l'image reste visible maintient l'élève au niveau archéologique ; si le modèle n'est exposé qu'un court instant, l'élève est contraint de travailler au niveau photographique ; si maintenant on donne uniquement le contour externe de l'image, l'élève va devoir opérer des transformations mentales pour imaginer la manière dont les différentes pièces peuvent le constituer.

La difficulté est d'amener les élèves à passer d'un paradigme à l'autre, certains obstacles étant extrêmement difficiles à franchir. Prenons l'exemple du cercle. Au cycle 1, les élèves vont reconnaître le cercle visuellement mais aussi par le toucher par sa caractéristique « il n'a pas de pique », « c'est rond », « il n'y a pas de côtés droits ». En fait ce que perçoit l'élève à ce stade c'est une ligne fermée dont la courbure est constante. Au cycle 2 est introduit un instrument, le compas, qui porte en lui les caractéristiques du

cercle avec la pointe qui matérialise le centre et l'écartement du compas qui matérialise le rayon. Les élèves utilisent le compas pour tracer des cercles mais ne perçoivent pas réellement leurs caractéristiques, ils perçoivent surtout la forme obtenue. C'est au cycle 3 que les choses se précisent avec la définition du cercle comme l'ensemble des points équidistants de son centre. Ensuite au lycée, le cercle sera défini de manière formelle par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une équation du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ où le point de coordonnées $(a ; b)$ est le centre et R le rayon. Cet exemple illustre bien le chemin inverse que doivent effectuer les futurs enseignants pour repenser la construction des objets géométriques à partir de la géométrie perceptive, et en particulier pour penser la définition de ces objets dans une axiomatique cohérente. C'est pourquoi il peut être très utile de travailler ces paradigmes en formation des enseignants (Parzysz, 2006).

Conditions du passage de G1 à G2

Duval s'est intéressé aux conditions de passage de la géométrie G1 à la géométrie G2 (Duval & Godin, 2005). Il explique qu'il s'agit de développer une vision non iconique et que ce développement nécessite trois compétences :

- La division méréologique (de méréologie : la science des parties) consiste à voir un dessin comme un assemblage, une juxtaposition, une superposition de figures. Pour le modèle proposé tout à l'heure, on peut le regarder comme constitué d'un triangle, d'un carré et d'un cercle.
- La déconstruction dimensionnelle consiste à regarder la figure en termes de points (dimension 0), de lignes (dimension 1) ou de surfaces (dimension 2). Ainsi ici (figure 5), on peut voir un cercle rouge, un carré noir et un triangle bleu, vus en surface on peut voir le carré sur un triangle et un cercle ou un cercle et un triangle sur un carré. En dimension 0, cela amène à voir des sommets et des intersections mais aussi à penser des alignements, visibles parce que sur une même droite tracée ou non visibles comme ici avec la diagonale du carré en pointillés. On voit que cette décontruction/reconstruction amène à analyser le dessin en identifiant des propriétés comme le fait que le triangle a un côté qui est une diagonale du carré et que le cercle est centré en un sommet du carré sur l'autre diagonale du carré de sorte que le cercle soit à l'extérieur du triangle.
- La déconstruction instrumentale consiste à analyser le dessin dans une logique de reproduction en identifiant des actions dans une organisation séquentielle permettant d'anticiper les étapes de sa reproduction. Par exemple dans la figure ci-dessous (illustration 2), l'élève doit imaginer tracer le carré puis sa diagonale, le triangle et enfin le cercle.

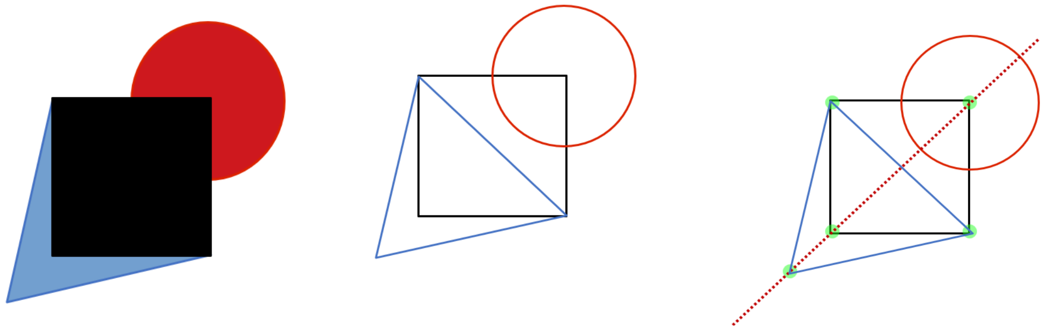


Figure 5. Déconstruction et reconstruction dimensionnelles d'une figure

Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation, le registre explicatif (REX) désigne une certaine manière de penser. Le REX est donc très proche des paradigmes G0 et G1 mais on voit que les compétences décrites par Duval jouent aussi un rôle. Nous pouvons alors définir plusieurs REX différents :

- REX G1 d0 : l'élève pense dans une géométrie perceptive en dimension 0. Il voit des points et leur position les uns par rapports aux autres.
- REX G1 d1 : l'élève pense dans une géométrie perceptive en dimensions 0 et 1. Il voit des segments et des égalités de longueurs.
- REX G1 d2 : l'élève pense dans une géométrie perceptive en dimensions 0, 1 et 2. Il peut voir des figures planes caractéristiques de manière isolée.
- REX G1-G2 méréologique : l'élève connaît des objets géométriques, il peut reconnaître des formes planes caractéristiques et voir des agencements de ces figures.
- REX G2 : l'élève pense dans une géométrie des propriétés, il repère des sur-figures et des sous-figures.

Il est alors possible de penser des tâches amenant les élèves à passer d'un REX à un autre. Par exemple demander de tracer des segments peut amener à passer de d0 à d1, coder des figures peut amener à d2. Demander de tracer des sur ou des sous-figures peut aider à travailler la compétence méréologique, tout comme l'utilisation de gabarits de couleur et transparents (Celi, 2016). Apporter le répertoire des propriétés des figures planes peut amener à G2. Tout comme demander d'écrire des textes argumentatifs à partir de schémas à main levée peut amener à entrer dans G2. En particulier demander de surligner des informations précises sur un schéma peut amener à travailler la compétence méréologique. C'est ce que font certains élèves comme dans les exemples ci-dessous (figure 6) tirés des productions dans la classe de Claude.

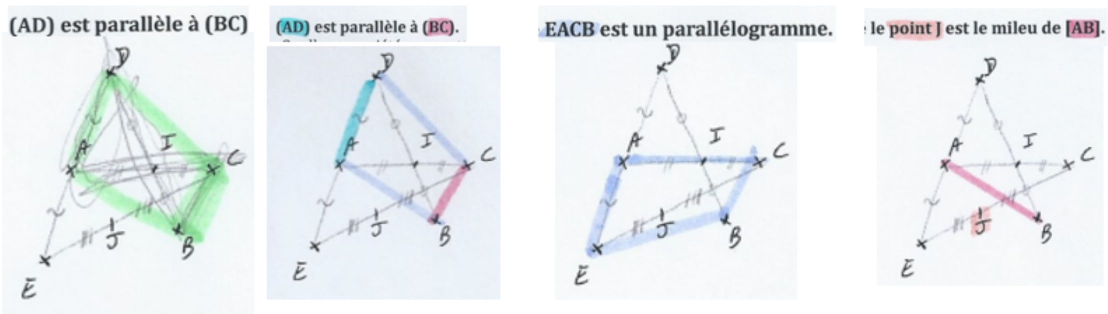


Figure 6. Mobilisation de la compétence méréologique

Repenser la consigne

Le passage de la géométrie naturelle à la géométrie abstraite se fait par un temps d'expérimentation où la géométrie instrumentée va jouer un grand rôle et cet espace d'expérimentation concerne les cycles 2 et 3. Cependant au cycle 4, on mobilise encore la représentation pour élaborer des raisonnements (c'est l'idée développée dans le guide de construire pour raisonner). La question est de trouver comment amener la nécessité de la preuve. Un moteur de la preuve est la défection de la perception : ce que l'on voit est faux (je crois voir un angle droit, un parallélisme, un alignement…). Ici c'est justement le contraire, on « voit » que c'est le milieu et c'est effectivement le milieu. On peut donc s'interroger, la preuve est-elle nécessaire ? Pour les auteurs du guide, c'est le fait que ce soit toujours le milieu, quels que soient les points choisis, qui doit induire la nécessité d'une preuve. Mais comme le dit un élève : « si on suit toujours bien le protocole de construction, on voit pas pourquoi ce serait différent ! »

Le seul cas où cette preuve devient vraiment nécessaire aux yeux des élèves, c'est quand la construction des points intermédiaires n'est pas possible. Par exemple, cet élève ne peut pas placer le point *D* sur sa figure sans sortir du cadre, il faut donc effectuer un raisonnement pour placer *J*.

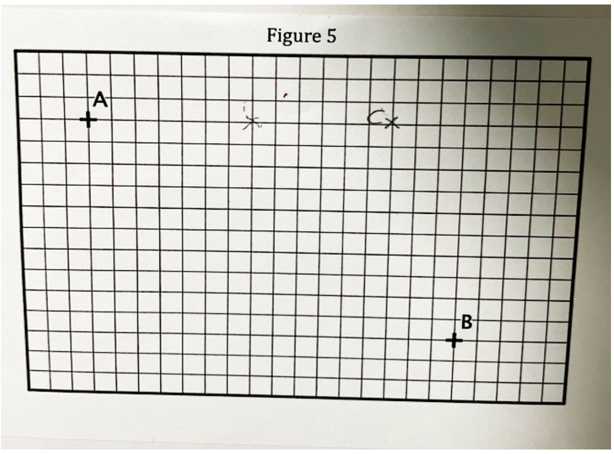


Figure 7. Nécessité d'un raisonnement pour construire

On pourrait alors penser proposer aux élèves la situation suivante :

Amélie dit qu'elle peut placer *J* de manière certaine et très précise sans tracer les autres points. Quel est son secret ?

Conclusion

Les scénarios possibles en formation sont entre autres : organiser une Lesson's study pour analyser les mises en œuvre et les ajustements, des analyses de l'activité de l'enseignant ou de l'enseignante à partir de vidéos ou de verbatims, des analyses des productions d'élèves, la construction de séances dédiées au développement de la vision non iconique, une analyse de l'activité prétexte à des apports en didactique de la géométrie, en particulier à travers le CAP. Ce problème issu du guide est donc une bonne entrée pour une formation initiale mais aussi continue, comme a pu en attester le travail avec l'enseignant qui a expérimenté la situation.

C'est aussi l'occasion de montrer en formation qu'une ressource n'est jamais interprétée ni utilisée de la même manière en fonction du cadre théorique dans lequel on problématise la situation. Il pourrait être intéressant d'analyser d'autres situations du guide et de réfléchir à un document d'accompagnement reprenant les différentes analyses développées dans l'atelier pour chacune des situations étudiées.

Cet atelier a aussi été un temps réflexif sur la participation des chercheurs à l'élaboration des ressources institutionnelles, l'occasion de pointer les écarts entre ces collaborations et les enjeux politiques qui peuvent se cacher derrière ces publications.

Bibliographie

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Education et didactique*, *5*(1), 101-104.

Bulf, C., & Celi, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire. Une transition clé : Du gabarit au compas. *Grand N*, *97*, 21-58.

Celi, V. (2016). *Reproduire une figure géométrique plane à l'école primaire : Quand ? Comment ? Pourquoi ?* https://www.unige.ch/fapse/dimage/files/2114/7142/2744/VCeli_geneve_20_mai_2016.pdf

Choquet, C., & Grau, S. (2021). Analyse de la pratique des enseignants stagiaires en lien avec des dispositifs de formation : Croisements de deux cadres théoriques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*.

During, É. (2005). Ni « pure » ni « appliquée » : Les usages de la géométrie chez Wittgenstein et Poincaré. *Revue de métaphysique et de morale*, *46*(2), 197-214. https://doi.org/10.3917/rmm.052.0197

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7-27.

Fernandes, M., & Vinter, A. (2009). Développement des représentations graphiques réalisées par des enfants à partir d'une exploration tactile ou visuelle de formes bidimensionnelles. *L'Année psychologique*, *109*(3), 407-429. https://doi.org/10.3917/anpsy.093.0407

Grau, S. (2018). *Enseigner par les problèmes : La question de la mise en commun*. Conférence CREN-CARDIE, Nantes. http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/innovation-pedagogique/kiosque/conferences-du-cren-751343.kjsp?RH=1164983391203

Hersant, M. (2022). Usages et apports du cadre de la problématisation à la didactique des mathématiques. In Doussot, Sylvain, Hersant, Magali, Lhoste, Yann, & Orange-Ravachol, Denise, *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques.* (Presses universitaires Rennaises).

Houdement, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, *67*, 69-84.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *11*, 175.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : De quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *17*, 128-151.

Rayou, P. (2020). Des registres pour apprendre. *Education et didactique*, *14*(2), 49-64.

Rouquès, J.-P., Valade, L., & Gragnic, C. (2019). *Des maths ensemble et pour chacun* (Canopé). https://www.reseau-canope.fr/notice/des-maths-ensemble-et-pour-chacun-2nde.html

Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : À la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, *88*, 5-24.

Annexe 1. Extrait du guide

Problème 4. Le grand défi (construire pour raisonner)

Énoncé

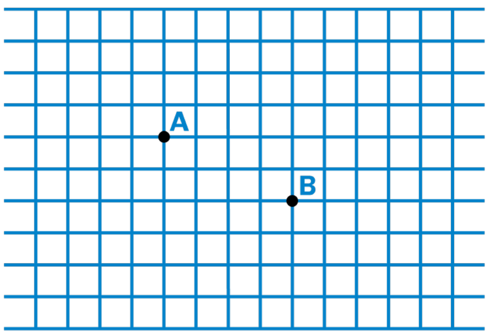
Chacune des figures suivantes est constituée de deux points A et B. Chacune d'elles doit être complétée par un point J qui respecte les conditions suivantes :

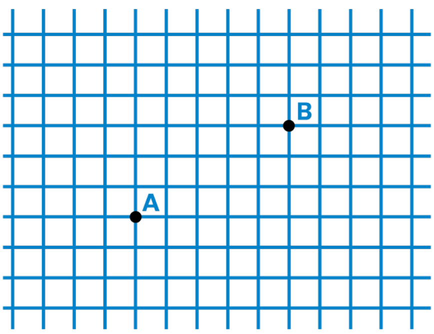
— I, C et D sont trois points tels que I est le milieu des segments [AC] et [BD] ;

— E est le point tel que A est le milieu du segment [DE] ;

— J est le milieu du segment [CE].

Soyez le premier groupe à placer très précisément le point J sur toutes les figures pour remporter le défi. Vous devrez ensuite être capables de convaincre les autres groupes que toutes vos figures sont correctes !





Mots-clés

Géométrie plane, construction, parallélogramme, conjecture, géométrie dynamique, représenter, raisonner.

Pourquoi ce problème ?

Ce problème nécessite dès le début de sa résolution une prise d'initiative originale de la part de l'élève. En effet, la construction va reposer sur un point C (ou un point D) qui n'est pas donné et pour lequel on n'a aucune indication. L'élève doit donc faire preuve d'imagination et, en quelque sorte, de confiance en lui pour placer ce point où il le souhaite et continuer la construction qui s'avère ensuite assez facile.

L'observation de plusieurs figures précises (faites à la main et/ou avec un logiciel de géométrie dynamique) amène un raisonnement inductif. Les multiples représentations obtenues par le groupe, la classe ou grâce à un logiciel semblent très variées de prime abord puisque les points A, B et même C sont placés sans aucune contrainte. Mais leur comparaison amène à constater que les positions des premiers points n'ont pas d'influence sur la position du point J cherché : il est toujours le milieu du segment [AB]. On passe donc de cas particuliers à un cas général. L'étonnement qui résulte de ce premier raisonnement est une stimulation pour nombre d'élèves, car cela ne se réduit pas, pour eux, à une vérification d'un résultat annoncé.

Un autre moyen de motiver les élèves est la présentation de la consigne sous forme de défi : cela donne une dimension ludique, avec un enjeu de vitesse et de précision d'exécution entre les groupes où chacun a à cœur de s'investir.

Ce problème contient aussi un élément intéressant pour la gestion de l'activité par le professeur lui-même : le point J cherché étant le milieu du segment [AB] donné initialement, le professeur peut vérifier d'un seul coup d'œil la construction de chaque élève. Il pourra d'ailleurs expliquer aux élèves que cette figure a une propriété qui lui permet de le faire, sans pour autant dévoiler ce qu'elle est pendant la phase de recherche. Cet aspect intrigue facilement les élèves qui, là encore, peuvent être stimulés.

Enfin, comme d'autres problèmes de géométrie classique, la construction demandée est complexe sans être difficile à exécuter, et les élèves y apprennent à coder au fur et à mesure, à prouver ce qui est établi par un raisonnement inductif puis, dans la phase de raisonnement déductif, à décomposer la figure en sous-figures, extraites les unes après les autres, mais dans l'ordre de la construction.

Ressorts de continuité ou éléments de progressivité

Ce problème pourra être proposé à partir de la classe de 5e, lorsque les propriétés du parallélogramme sont connues. Il fait travailler la compétence « représenter », mais aussi plusieurs aspects de la compétence « raisonner » : le raisonnement inductif basé sur l'observation de plusieurs constructions complètes et le raisonnement déductif à plusieurs étapes qui devra être davantage accompagné par le professeur en début de cycle. La communication de la preuve, bien organisée à l'écrit, n'est qu'un attendu de fin de cycle 4.

Stratégies d'enseignement

La consigne s'adresse à des groupes d'élèves, car un travail individuel serait long et assez fastidieux, ce qui ferait courir le risque de les désintéresser de la situation étudiée.

Les figures données à chaque groupe permettent une différenciation : les figures avec quadrillage sont plus faciles à exécuter et à vérifier entre élèves. La dernière figure proposée est importante d'un point de vue didactique, car la construction pas à pas oblige à sortir du cadre ; pour placer le point J, il sera nécessaire de conjecturer sa position. Cela rend le raisonnement nécessaire : les élèves ne peuvent pas se contenter d'exécuter une construction.

Une ou deux autres figures peuvent être ajoutées pour assurer un bon raisonnement inductif avec des constructions sur papier, mais elles peuvent être remplacées avantageusement par une deuxième partie de construction avec un logiciel de géométrie dynamique. Aucun fichier préparé par le professeur n'est utile : les points A et B de départ sont quelconques.

Si chaque étape de la construction ne comporte aucune difficulté technique particulière après l'étude des parallélogrammes en classe de 5^{e}, la première requiert une prise d'initiative : le point C (ou le point D) peut être placé où l'on veut sans que cela change la position du point J. Cela va souvent déstabiliser les élèves qui ne connaissent initialement pas le résultat et il sera nécessaire de différencier l'aide apportée. Le professeur doit donc les inciter à se lancer dans la démarche sans plus d'indication, en les rassurant, ou même proposer explicitement de placer le point C où ils veulent.

La conjecture sera plus facile à établir dans certains groupes que dans d'autres. Pour faire un temps de régulation, il est nécessaire d'attendre que tous les élèves aient chacun une figure bien réalisée. Si la construction avec un logiciel de géométrie dynamique vient ensuite, il est important de rappeler qu'elle ne permettra que de consolider la conjecture, pas de la prouver.

L'étonnement devant la conjecture, mieux que les petites imperfections dues aux erreurs de tracé sur certaines figures, amène la nécessité de la preuve : comment est-ce possible que le point J soit toujours le milieu de [AB] ? En début de 5^{e}, le professeur pourra aider à déterminer les étapes de démonstration, en guidant plus ou moins les groupes selon leurs besoins. Il sera souvent amené à rappeler aux élèves de bien coder la figure au fur et à mesure et à leur demander d'extraire des parties de figure, car il n'est pas naturel pour eux de faire abstraction de certains éléments, de redessiner à main levée une partie de la figure. La dernière étape de démonstration nécessite l'utilisation de la propriété suivante dans le quadrilatère AEBC : « Si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. » Si cette propriété n'a pas été donnée dans le cours, le professeur pourra la donner à l'occasion de ce problème.

Annexe 2. Grille d'analyse didactique d'une situation d'apprentissage en mathématiques

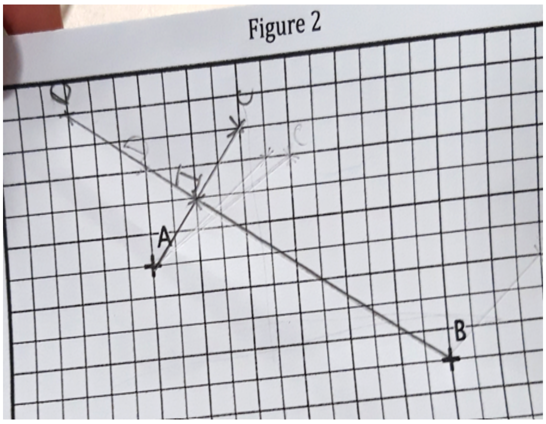
L'analyse préalable

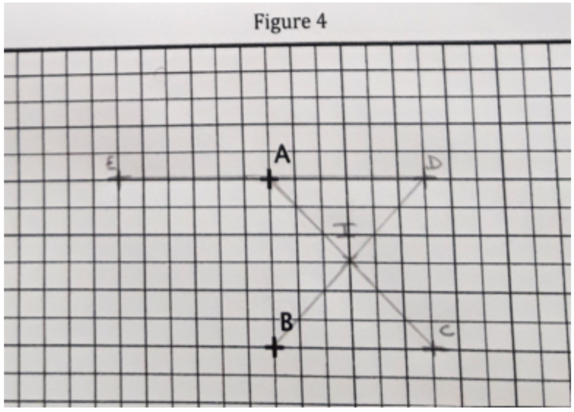
- Quel savoir est visé ? Qu'est-ce que les élèves doivent savoir après la séance qu'ils ne savaient pas avant ?
- Sur quoi les élèves peuvent-ils s'appuyer pour aborder cet apprentissage ?
- En quoi la situation ressource choisie semble-t-elle en adéquation avec le projet d'enseignement ? Quels ajustements prévoyez-vous si elle ne correspond pas exactement à ce projet ?

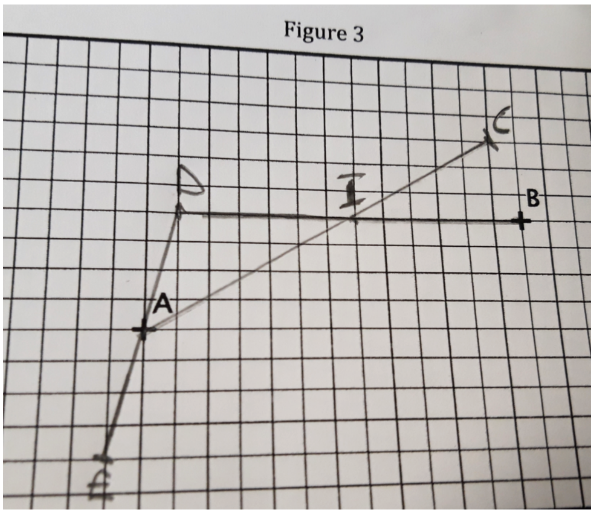
L'analyse a priori théorique de la situation

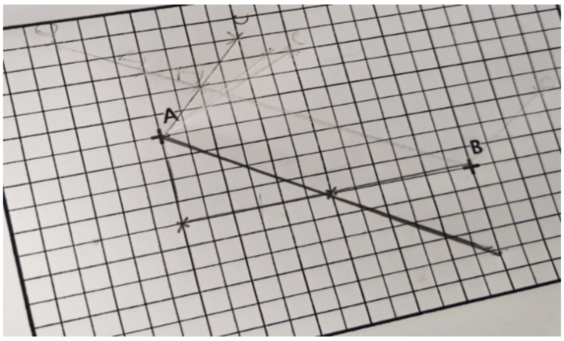
- Quelle consigne est donnée aux élèves ? Quel problème ont-ils à résoudre ?
- Quelles sont **les stratégies** pour résoudre ce problème ?
- Quelles sont **les variables didactiques** et leurs valeurs possibles ? Quels effets ont ces variables didactiques sur les stratégies ?
- Quelles **connaissances** sont nécessaires pour résoudre le problème ? Sont-elles à construire, nouvelles ou anciennes ?
- L'élève peut-il facilement imaginer une solution ? Faire des traitements ? Tester des hypothèses ? Faire des essais ? (Ceci doit assurer le **principe de dévolution**)
- La résolution mobilise-t-elle la connaissance visée ? Cette connaissance correspond-elle à la stratégie la plus efficace ? (Doit faire émerger des nécessités)
- Quelles conceptions erronées peuvent apparaître ? Quels sont les **obstacles ou difficultés** pour les élèves ? (Principe d'empathie cognitive)
- Quel **étayage** envisager ? Qu'est-ce-que l'enseignant peut prendre à sa charge tout en laissant l'élève construire la connaissance visée ? (Ajustement du milieu)
- Les élèves peuvent-ils se rendre compte par eux-mêmes de la **validité** de leur solution ? Une intervention du professeur est-elle nécessaire ? (Principe de rétroaction)
- Comment peut-on envisager la **formalisation** de la connaissance nouvelle en lien avec la situation ? (Première étape de la secondarisation)
- Sur quelles variables peut-on jouer pour diversifier la rencontre avec la connaissance visée et donc amener à une **généralisation** ? (Deuxième étape de secondarisation)

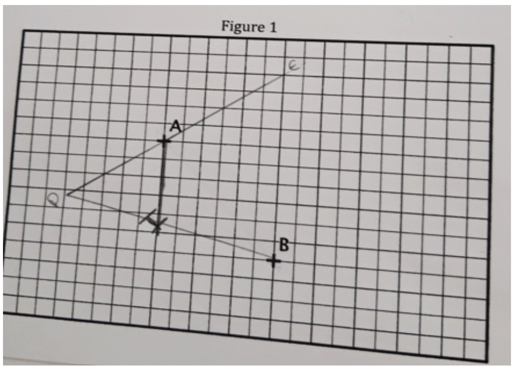
Annexe 3. Productions d'élèves de 4e à l'issue de la première séance

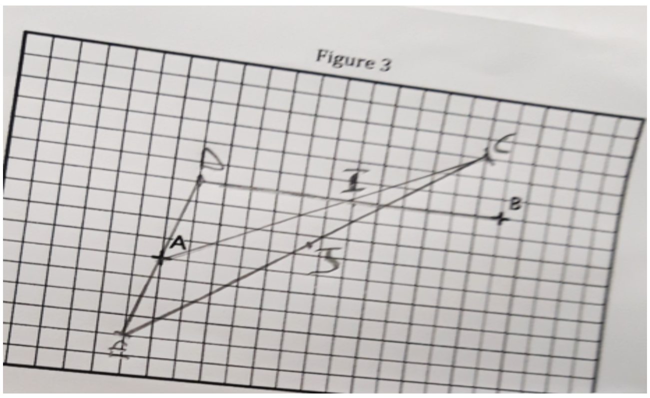






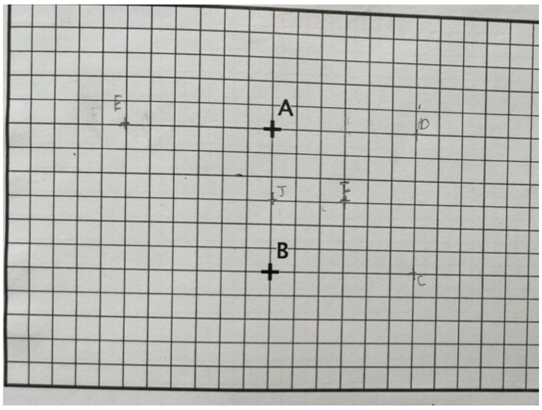




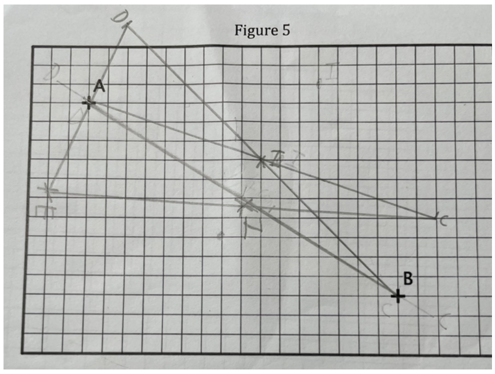


Annexe 4. Document A

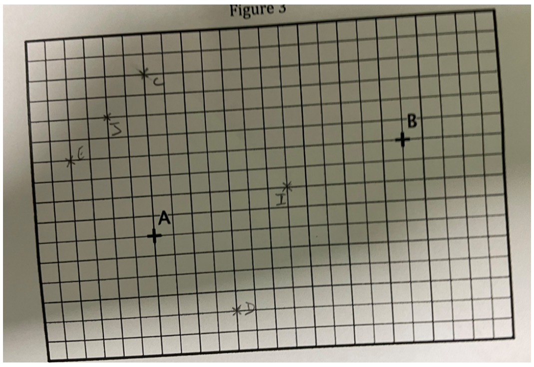
Elève A



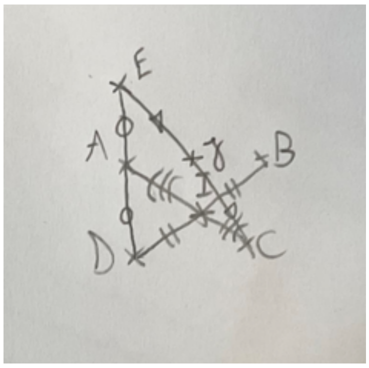
Elève B



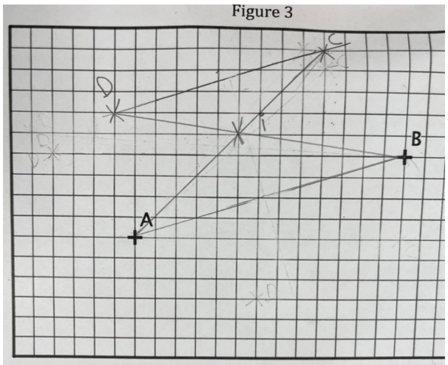
Elève C



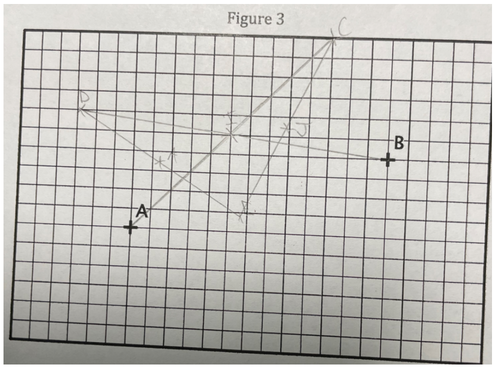
Elève D



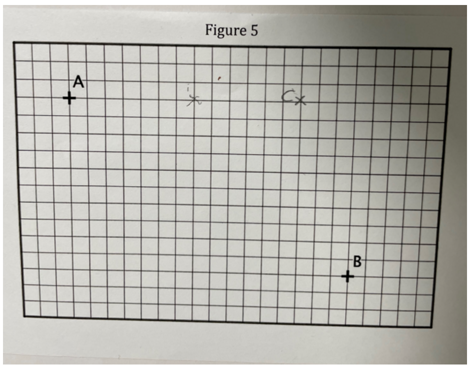
Elève E



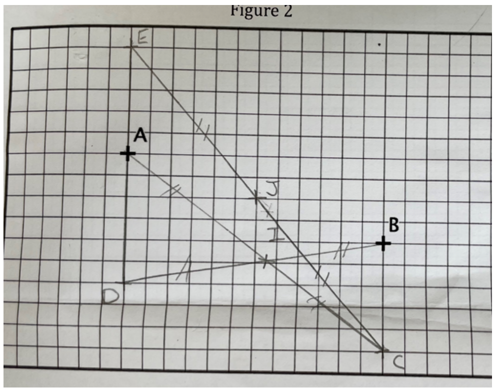
Elève F



Elève G



Elève H

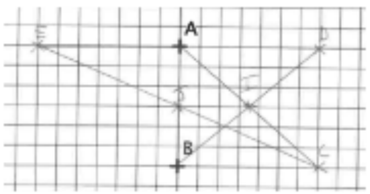


Annexe 5. Document B

En fin de 1ère séance, l'enseignant a validé la conjecture que le point J est le milieu du segment [AB]. Il a demandé aux élèves d'écrire ce qui peut expliquer pourquoi le point J est le milieu du segment [AB]. Voici le document donné aux élèves lors de cette 2ème séance.

Voici des productions d'élèves. Regrouper ces productions par "famille" et donner un titre à chaque "famille".

Production 1



Production 2

Production 3

AI = IC

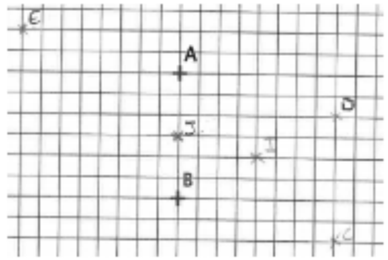
Production 4

ABCE est un parallélogramme

Production 5

I est au milieu de [AC]

Production 6



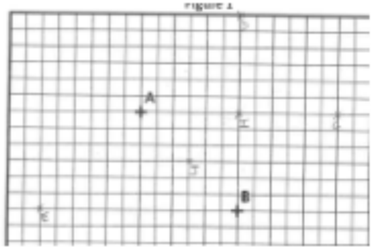
Production 7

On en déduis que (AD) // (BC) car elles sont symétriques par rapport à I

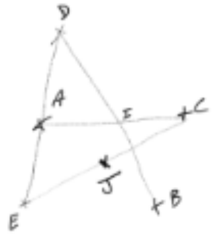
Production 8

[DE] est parallèle à [EJ]

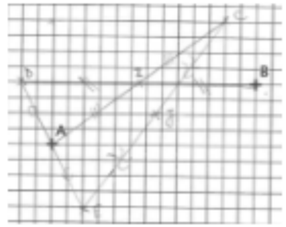
Production 9



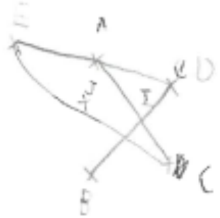
Production 10



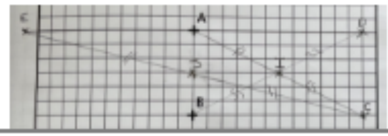
Production 11



Production 12



Production 13



Production 14

Vue que I est le milieu de [AC] et [BD] ça veut dire que ACBD est un parallélogramme

Production 15

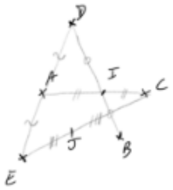
AD et BC sont parallèles

Production 16

AD // BC   Si on rajoute un point E sur la droite (AD) alors EA // BC. Donc EABC

Annexe 6. Document C distribué aux élèves

1. Un élève a affirmé que **(AD) est parallèle à (BC).**

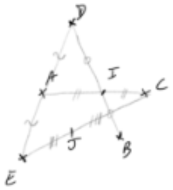


Quelles propriétés permettent de prouver que cette affirmation est vraie ?
Indiquer les informations données ou déduites qui permettent d'utiliser ces propriétés.

Preuve :

Informations :	Propriété n°............	Déduction :
Informations :	Propriété n°	Déduction :

2. Un élève a affirmé que **les segments [AD] et [BC] ont la même longueur et sont parallèles.**



Preuve :

Informations :	Propriété n°............	Déduction :

Voici des propriétés mathématiques.
Certaines peuvent être utilisées pour prouver la conjecture émise.

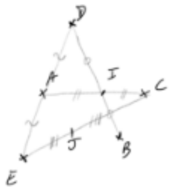
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors

- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. (propriété 1)
- ses côtés opposés ont même longueur deux à deux. (propriété 2)
- ses diagonales ont même milieu. (propriété 3)
- ses angles opposés sont égaux. (propriété 4)
- deux angles consécutifs sont supplémentaires. (propriété 5)

- (propriété 6) Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux,
- (propriété 7) Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur deux à deux ,
- (propriété 8) Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu
- (propriété 9) Si un quadrilatère a deux côtés opposés à la fois parallèles et de même longueur

alors c'est un parallélogramme.

3. Un élève a affirmé que **le quadrilatère EACB est un parallélogramme.**



Démonstration :

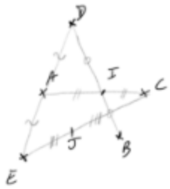
Les segments [AD] et [BC] ont même longueur et sont parallèles ,

et A est ………………………………………………………………

donc les segments ……….. et ……….. sont parallèles et de même longueur.

Donc d'après la propriété n° ………, le quadrilatère EACB est un parallélogramme.

4. Un élève a affirmé **le point J est le mileu de [AB].**



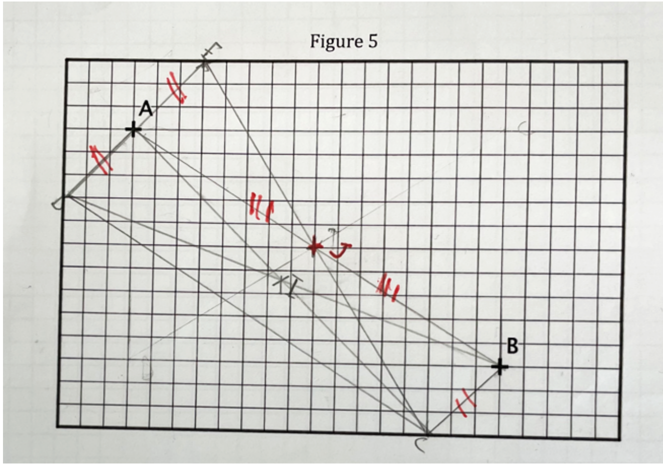
Preuve :

Informations :	Propriété n°……………	Déduction :

Annexe 7

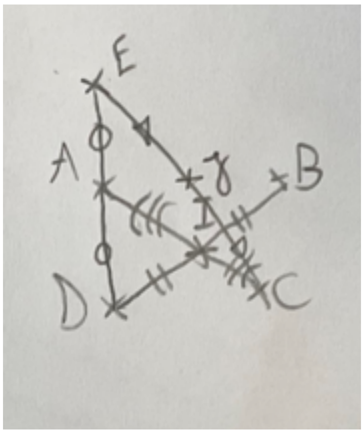
Argument 1

On sait que *J* est le milieu de [*AB*]. Expliquer pourquoi il ne peut pas être ailleurs ?



Argument 2

Schéma suivant :



Argument 3

On remarque que ABCD est un parallélogramme grâce au positionnement du point I donc DA, AE, et BC sont de la même longueur donc le point J est forcément au milieu de [AB].

Argument 4

On a remarqué que AE et BC sont égaux. C'est la raison pour laquelle J est au milieu de [AB] et [EC].

Argument 5

[AB] est parallèle à [DC] parce qu'elles ne se croisent pas.

DCBA est un quadrilatère.

EBCA est un parallélogramme.

Argument 6

ABCD et ABCE sont des parallélogrammes et leurs milieux sont I pour ABCD et J pour ABCE. J est la diagonale de ABCE.

Argument 7

ABCD et ABCE sont des parallélogrammes, leur milieu est I et J. [AB] est la diagonale de ABCE et J est l'intersection des deux diagonales [AB] et [EC] il est donc le milieu de [AB].

Argument 8

Je pense que si le programme est toujours le même et bien réalisé, alors le point J sera au même endroit.

Argument 9

ABCD est un parallélogramme dont le centre est le point I.

Toutes ces propositions sont basées sur des faits qui sont vrais. Cherche pourquoi chacun des faits est vrai en t'aidant de ton répertoire de géométrie et complète le tableau suivant avec les définitions et les propriétés utilisées.

C'est vrai parce que c'est écrit dans l'énoncé.	C'est vrai parce que c'est la définition.	C'est vrai parce qu'il existe une propriété.

Annexe 8. Document E, Verbatim mise en commun séance 2 après le tri des productions (voir document B)

Analyser le processus d'institutionnalisation :

- *Quelle est la part des productions des élèves dans ce processus ?*
- *Quelles sont les focales de l'enseignant ?*
- *Quels sont les risques de malentendus entre l'enseignant et les élèves ?*

Critiquez le bilan écrit (en gras dans le verbatim).

P	On voit qu'on a commencé un petit peu à préciser ; il y a cette histoire dessin schéma, on hésite entre les 2 mots.
A	Nous on a écrit : 6, 9 et croquis sans segment tracés 10, 12 et 2 croquis à main levée 11, 13, 1 croquis avec segments tracés 3 et 5, les informations qu'on a obtenues avant 4, 7, 15, 14, 16 les informations obtenues après On a fait une sous famille où on a mis les phrases expliquées (16, 5, 14) et les phrases non expliquées (15, 4, 8)
B	Pour croquis sans segment tracés c'est pas des croquis ?
P	Pourquoi ?
B	C'est des segments, c'est un dessin.
P	Un croquis c'est un dessin…
P	Et il y a le mot schéma ? C'est quoi la différence entre un dessin et un schéma ?
D	Le schéma on l'utilise dans les matières scientifiques et il y a des règles.
P	Quel est l'intérêt ?
C	On peut mettre les informations, enfin… le codage.
P	A quoi ça va nous servir ?
C	Un schéma, on n'est pas obligé d'utiliser la règle, ça nous entraîne.
P	Ça sert à … nous entrainer ? /
D	A visualiser.
P	Un dessin nous sert aussi à visualiser ?/
P	La différence […] le dessin avec les instruments, le schéma à main levée, la différence elle est là.
P	Le schéma c'est pour avoir l'idée.
P	Si je comprends bien, on est tous d'accord pour avoir séparé le dessin et le texte. *(relit le classement proposé par le groupe)*
P	Qu'est-ce que vous entendez par ''obtenues avant'' ?
N	Les informations données, les informations de base.
P	Ce sont les informations données.
P	Il y en a d'autres ? La production 4, est-ce que c'en est une ?
A	Non.

P	Est-ce qu'elle est vraie ?
P	*(Repasse sur la production 1 le quadrilatère AEBC)* Attention quand on nomme un quadrilatère, l'ordre de points est important. Est-ce que c'est un parallélogramme ? […] Ce n'est pas donné, c'est ce qu'on pense ; est-ce qu'on en est sûr ? Non, il va falloir l'expliquer. Il y a les données, les explications et ce qu'on en déduit, ce qu'on va conclure.
P	On va noter pour garder une trace. Est-ce que vous vous souvenez pourquoi on a fait toutes ces productions ?
D	Pour s'entraîner.
P	Ah bon /
D	Non, pour faire des propriétés.
P	Ah pour démontrer, pour raisonner.
P	*(Écrit au tableau, les élèves recopient ce qui est en gras)* **Pour raisonner, il faut distinguer :** **- les informations données (par l'énoncé)** Il y a d'autres info comme celles-ci : c'est quoi ? (*montre du doigt la production 4)* Des affirmations, on va supposer que c'est vrai **- les affirmations (informations qu'on pense vraies)** **- les informations déduites (grâce à des propriétés ou des définitions)**
P	Pour raisonner, il faut distinguer ça, mais là on a parlé que du texte, mais il y a quoi d'autre ?
B	Des schémas.
P	Et ils servent à quoi ? *(sonnerie)* A appuyer. On notera ça la prochaine fois. (*Complément écrit la séance suivante :* **Pour appuyer notre raisonnement, on peut utiliser :** **Un dessin** **Un schéma** **Les codages** **Cela permet d'extraire les figures clés : triangles, quadrilatères particuliers.**)