L’IMPLICATION, PIERRE ANGULAIRE DU RAISONNEMENT

Denis GARDES, Marie-Line GARDES

Résumé. Dans cet article, nous proposons une réflexion didactique, menée par la CII Lycée, autour du concept de l’implication. Nous définissons ce connecteur entre deux propositions puis nous étudions les difficultés d’enseignement et d’apprentissage de cette notion : valeur de vérité, négation, quantification, contraposée et réciproque, formulation.

Dans cet article, nous présentons une réflexion menée par un sous-groupe de la CII Lycée sur la notion d’implication. Cette réflexion fait suite à nos travaux sur le raisonnement par récurrence (Gardes et *al.*, 2016) et sur le raisonnement par l’absurde (Bernard et *al.*, 2018 ; Gardes & Gardes, 2019). Nous avons en effet identifié qu’une difficulté d’apprentissage majeure dans ces raisonnements est liée à la compréhension de l’implication. Ce constat n’est certes pas nouveau (Deloustal-Jorrand, 2001, 2004 ; Durand-Guerrier, 1999 ; Grenier, 2014) mais il nous a permis de re-questionner cette notion.

Dans une première partie, nous définissons la notion d’implication logique entre deux propositions et nous l’illustrons avec plusieurs exemples emblématiques. Dans une seconde partie, nous analysons les difficultés d’enseignement et d’apprentissage de cette notion : valeur de vérité, négation, quantification, contraposée et réciproque. Dans une troisième partie, mous présentons plusieurs méthodes pour démontrer une implication.

Analyse de l’objet « implication »

Quelques principes de la logique des propositions

Nous présentons quelques principes de la logique des propositions :

- le principe de bivalence
  Une proposition a deux valeurs de vérité possibles : Vrai ou Faux
- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c’est-à-dire que (P OU non(P)) est vraie.
- Le principe de non contradiction
  Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en même temps, c’est-à-dire (P ET non(P)) est fausse.
- la vérifonctionnalité
  La valeur de vérité d’une proposition composée ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Il reste maintenant à définir ce qu’est une proposition. Nous donnons la définition suivante :

C’est une phrase mathématique pour laquelle se poser la question de sa valeur de vérité a un sens.

Il faut donc qu'une proposition contienne un verbe et qu'elle soit bien construite. Par exemple « un parallélogramme est divisible par 3 » n'est pas une proposition car cela n'a pas de sens de se poser la question de sa valeur de vérité. La relation « est divisible par 3 » ne peut pas s'appliquer à un parallélogramme. De même la phrase « Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2$ » n'est pas une proposition, en effet se poser la question de la vérité de cette phrase n'a pas de sens.

En mathématiques, les propositions contiennent en général une variable. On note alors la proposition $P[x]$. On parle alors de *proposition ouverte* et on peut se prononcer sur sa valeur de vérité si on précise le domaine d'astreinte de la variable et sa quantification. Par exemple « $x^2 > 1$ implique $x > 1$ » est une proposition ouverte. On ne peut pas se prononcer sur sa vérité si on ne connaît pas à quel domaine appartient la variable x et sa quantification. Si on a « pour tout x réel, $x^2 > 1$ implique $x > 1$ » cette proposition est fausse mais si on a « pour tout x entier naturel, $x^2 > 1$ implique $x > 1$ », cette proposition est vraie.

Définition de l'implication

L'implication est un connecteur logique binaire qui à partir de deux propositions P et Q définit une nouvelle proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse. On obtient la table de vérité suivante (figure 1).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 1 – Table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On peut se poser la question du pourquoi de cette définition. On va donner deux raisons principales qui permettent de mieux comprendre les raisons de cette définition. La première raison consiste à se demander dans quels cas une implication est fausse. Si par exemple, on demande à un lycéen, de décider si l'implication suivante est vraie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 1 \Rightarrow x > 1,$$

il répondra « naturellement » qu'elle est fausse en donnant, par exemple $x = -2$, comme contre-exemple, même s'il n'a pas suivi de cours de logique. On a bien P vraie et Q fausse. Même en insistant en demandant d'autres raisons, il ne donnera que d'autres contre-exemples avec P vraie et Q fausse (c'est normal parce qu'il ne peut pas donner d'autres raisons, c'est le seul cas où l'implication est fausse). Ces réponses « naturelles » font donc référence de manière inconsciente ou non au fait qu'une implication est fausse uniquement dans le cas P vraie et Q fausse.

La seconde raison s'appuie sur le fait que les deux premières lignes de la table de vérité sont aisément acceptées. Le plus difficile est de comprendre que si P est fausse, alors l'implication est vraie. L'implication étant un connecteur logique, $P \Rightarrow Q$ est une proposition qui doit avoir une valeur de vérité dans tous les cas, même quand P est fausse. En effet, on ne peut pas supposer que quand P est fausse, $P \Rightarrow Q$ n'a pas de valeur de vérité. Ainsi les deux dernières lignes de la table de vérité doivent être remplies. Pour ces deux lignes, il y a quatre possibilités. On va étudier chacune de ces quatre possibilités.

Premier cas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Figure 2 – 1ère possibilité de remplissage des deux dernières lignes de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On remarque que l'on obtient la table de vérité du connecteur ET, cela n'aurait donc pas de sens de définir un nouveau connecteur ayant les mêmes propriétés qu'un connecteur existant. Cela ne peut donc pas être celle du connecteur IMPLIQUE.

Deuxième cas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Figure 3 – 2ème possibilité de remplissage des deux dernières lignes de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On obtient la table de la proposition Q. Cela signifierait que la vérité de $P \Rightarrow Q$ ne dépendrait pas de la proposition P, ce qui n'est pas possible.

Troisième cas

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Figure 4 – 3ème possibilité de remplissage des deux dernières lignes de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$

On remarque que l'on obtient la table de vérité du connecteur EQUIVALENT[1], cela ne peut donc pas être celle du connecteur IMPLIQUE.

Il ne reste donc que le quatrième cas pour la table de vérité du connecteur IMPLIQUE. On obtient alors la table de vérité présentée en figure 1.

Autre définition de l'implication

On peut aussi définir $P \Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs disjonction et négation. En effet, $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à (non P ou Q). Pour le voir, il suffit d'établir la table de vérité de (non P ou Q). On retrouve bien que $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que P est fausse ou Q est vraie et fausse dès que P est vraie et Q est fausse.

[1] Le connecteur EQUIVALENT peut se définir de la façon suivante : P est équivalent à Q si et seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

Ce point de vue permet d'expliciter les trois cas où $P \Rightarrow Q$ est vraie et en particulier ceux où la prémisse est fausse. Or comprendre que l'on peut raisonner à partir d'une prémisse fausse est une connaissance importante pour le raisonnement et la démonstration. Par exemple, elle est indispensable pour comprendre un raisonnement par l'absurde. Ce manque de connaissance peut ainsi être à l'origine des difficultés des élèves pour comprendre et utiliser un raisonnement par l'absurde (Gardes & Gardes, à paraître).

Exemples illustrant cette définition

Nous détaillons ci-dessous trois exemples emblématiques travaillant l'implication.

Exemple 1 – Tâche de Wason (Wason, 1966)

Il y a ci-dessous en ensemble de quatre cartes. Pour chaque carte, figure une lettre sur un côté et un chiffre de l'autre côté.

Voici maintenant une proposition :

S'il y a un A sur une face, alors il y a un 4 sur l'autre face.

Laquelle ou lesquelles de ces quatre cartes est-il nécessaire de retourner pour vérifier que la proposition est vraie ?

Nous sommes en présence d'une implication du type $P \Rightarrow Q$ avec P la proposition « la carte a un A sur une face » et Q la proposition « la carte a un 4 sur une face ». On sait que $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement si P est vraie et Q fausse.

- Pour la première carte, la proposition P est vraie. Il faut donc s'assurer que Q n'est pas fausse. Il faut donc retourner cette carte.
- Pour la deuxième carte, la proposition P est fausse. L'implication $P \Rightarrow Q$ est alors vraie quelle que soit Q c'est-à-dire le chiffre sur l'autre face. Il n'est donc pas nécessaire de la retourner.
- Pour la troisième carte, la proposition Q est vraie. L'implication $P \Rightarrow Q$ est alors vraie quelle que soit P c'est-à-dire la lettre sur l'autre face. Il n'est donc pas nécessaire de la retourner.
- Pour la quatrième carte, la proposition Q est fausse. Il faut donc s'assurer que P est fausse. Il faut donc retourner la carte.

En conclusion, il faut retourner les cartes A et 7.

Selon plusieurs études (voir par exemple Rogalski & Rogalski, 2004), le taux de réponses correctes (seulement les cartes A et 7) sur cette tâche se situe aux environs de 10%. La majorité des personnes interrogées sur cette tâche répondent A ou (A et 4). Cela met en évidence que, pour elles, accepter la première ligne de la table de vérité de l'implication va de soi mais que les suivantes posent des difficultés.

Exemple 2 (Durand-Guerrier, 2005)

Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la proposition « si n est un nombre pair, alors son successeur est premier ».

On formalise avec l'implication ouverte $P[n] \Rightarrow Q[n]$ pour n entier compris entre 1 et 20 où $P[n]$ est « n est pair » et $Q[n]$ est « $n + 1$ est premier ».

On cherche donc les entiers n compris entre 1 et 20 tels que $P[n]$ est fausse et les entiers n tels que $Q[n]$ est vraie.

$P[n]$ est fausse pour tous les entiers impairs.

$Q[n]$ est vraie pour $n + 1$ appartenant à $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19\}$ c'est-à-dire n appartenant à $\{1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 10 ; 12 ; 16 ; 18\}$.

Ainsi seuls les entiers de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19\}$ satisfont l'implication ouverte.

On aurait pu chercher le complémentaire, à savoir pour quelles valeurs de n l'implication est fausse (ce qui revient par ailleurs à rechercher l'ensemble des contre-exemples). Elle est fausse uniquement si $P[n]$ est vraie et si $Q[n]$ est fausse.

La majorité des élèves et de nombreux enseignants pensent que les impairs ne sont pas concernés par cet énoncé.

Cet exercice permet de :

- travailler sur les règles de vérité de l'implication,
- mettre en valeur l'utilisation des tables de vérité (cet outil est certes non nécessaire mais il permet de mettre en évidence les trois cas de vérité d'une implication),
- mettre en défaut la règle-en-acte qui consiste, pour évaluer une implication, à évaluer d'abord l'antécédent de cette implication et de ce fait, faire un traitement de l'implication comme une conjonction (P ET Q),
- préciser, du point de vue du langage, la différence entre les expressions « si … alors » et « on sait que … alors ».

Exemple 3. Les jetons (Mesnil, Beaud, Barbe, 2016)

On dispose de trois jetons de formes différentes (rond, carré et triangulaire) et de trois couleurs différentes (bleu, vert et rouge).

Chaque jeton a une seule couleur.

Voici trois propositions vraies sur ces jetons :

1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert
2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge
3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Déterminer la couleur de chaque jeton.

Il y a plusieurs manières de résoudre l'exercice. La solution proposée ici s'appuie sur un raisonnement par disjonction des cas.

- <u>Premier cas</u> : le jeton rond est bleu.

Alors le jeton carré est vert (d'après la proposition 1).
D'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert, ce qui est impossible puisque deux jetons (carré et triangulaire) seraient verts.

- <u>Deuxième cas</u> : le jeton rond est vert.

Alors le jeton carré est rouge (d'après la proposition 2).

D'après la proposition 3, le jeton triangulaire est vert, ce qui est impossible puisque deux jetons (rond et triangulaire) seraient verts.

- Troisième cas : le jeton rond est rouge.

Si le jeton carré est vert, alors le jeton triangulaire est vert d'après la proposition 3. Ceci est impossible puisque deux jetons (carré et triangulaire) seraient verts. Ainsi le jeton carré serait bleu et le jeton triangulaire serait vert.

La seule solution possible correspond au jeton rond rouge, au jeton carré bleu et au jeton triangulaire vert. On vérifie que cette combinaison rend les trois implications vraies. La solution est ici unique (rond rouge, carré bleu, triangle vert) et rend les trois implications vraies avec antécédents faux ce qui est l'intérêt principal de cet exercice.

Contraposée d'une implication

Toute proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée (non $Q \Rightarrow$ non P). En effet, (non $Q \Rightarrow$ non P) est équivalent à (Q ou non P) qui est équivalent à $P \Rightarrow Q$.

La proposition « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[x]$ » a pour contraposée « pour tout x, non $Q[x] \Rightarrow$ non $P[x]$ ». Il faut remarquer que la quantification est identique pour une implication et sa contraposée. Ce n'est pas le cas dans la démonstration par l'absurde d'une implication. Beaucoup de personnes confondent ces deux types de raisonnement (par l'absurde et par contraposition).

Négation d'une implication

La négation de l'implication n'est pas une implication. En effet, $P \Rightarrow Q$ est équivalent à (non P ou Q). D'après les lois de De Morgan, non(non P ou Q) est équivalent à (P et non Q) qui est la conjonction de deux propositions. Elle ne peut donc pas se traduire en une implication qui est une disjonction.

Donc nier une implication $P \Rightarrow Q$ revient à écrire (P et non Q).

Pour une implication avec variable, la négation de « pour tout x, $P[x] \Rightarrow Q[\mathrm{x}]$ » est la proposition « il existe x tel que $P[x]$ est vraie et $Q[x]$ est fausse ». Un tel élément x est appelé un contre-exemple.

On demande souvent dans des exercices si telle implication est vraie ou fausse mais sans avoir toujours bien explicité que montrer qu'une implication est fausse, revient à montrer que sa négation est vraie.

Deux règles de raisonnement liées à l'implication

La règle la plus couramment utilisée est la règle du *modus ponens* ou règle de détachement. Elle s'énonce ainsi : si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie.

Une autre règle, qui découle de la table de vérité de l'implication est la règle du *modus tollens* : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et si Q est fausse alors P est fausse.

Notons que cette règle est rarement mentionnée dans l'enseignement alors qu'elle permet très souvent d'éviter un raisonnement par l'absurde comme le montre l'exemple suivant (figure 5) :

C Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Énoncé : Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

Solution

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$. Deux nombres égaux ont le même carré donc $2 = 1{,}414^2$. Or $1{,}414^2 = 1{,}999396$, on obtient ainsi une contradiction.
Donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse.

Figure 5. Extrait du manuel Hyberbole Nathan Seconde 2019

Il suffit dans cet exemple d'utiliser le *modus tollens* avec l'implication vraie suivante : « pour tous nombres réels a et b, $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ». Comme $(\sqrt{2})^2 \neq 1{,}4142135 62^2$, par modus tollens, on en déduit $a \neq b$.

Difficultés didactiques liées à l'implication

Différence entre la logique naturelle et la logique mathématique

On assimile souvent (voire on définit ainsi) le connecteur IMPLIQUE à l'expression « Si … alors » qui a souvent dans le langage courant une autre signification (Fabert et Grenier, 2011). Pour le voir, examinons la phrase dite à un enfant « Si tu ne manges pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert ! ». Que pense un enfant qui mange sa soupe ? L'enfant interprète cette phrase comme une équivalence, c'est-à-dire qu'il aura un dessert à condition d'avoir mangé sa soupe. Dans l'extrait ci-dessous, l'élève de Seconde voit une différence entre « si *P* alors *Q* » et « *Q* si *P* » (figure 6) :

Une mère dit à son enfant : "Si tu manges ta soupe alors tu auras un dessert."
L'enfant aura-t-il un dessert s'il mange sa soupe ? O
S'il ne la mange pas ? NJ

Si la mère avait dit : "Tu auras un dessert si tu manges ta soupe."
Vos réponses changeraient-elles ? (Si oui, précisez.) Oui car s'il ne la mange pas on NNPS du fait que elle n'impose pas la condition comme précédemment : si — alors —. là on trouve : si seulement, ce qui nous avance pas sur : si non.

Oui car s'il ne la mange pas on NNPS (ne peut pas savoir) du fait qu'elle n'impose pas la condition comme précédemment : si ----- alors---- là on trouver si seulement, ce qui nous avance pas sur : si non.

Figure 6. Extrait d'une production d'élève de Seconde (Fabert & Grenier, 2011, p.44)

L'idée de temporalité est très présente dans le « si ... alors » du langage courant. Prenons l'exemple « s'il pleut (alors) je prends mon parapluie ». Si cette phrase était une proposition mathématique, elle serait équivalente à sa contraposée « si je ne prends pas mon parapluie, (alors) il ne pleut pas ». Cette dernière phrase se heurte au bon sens, je ne suis pas devin !

De plus l'idée de causalité est souvent associée à l'implication alors que la vérité d'une implication entre propositions ne dépend que de la vérité des propositions en jeu. Ainsi l'implication suivante est vraie « $2 - 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{121} = 11$ », pourtant il semble difficile de déduire la deuxième égalité de la première égalité. Ainsi, attention à ce que l'on écrit à propos de l'implication (figure 7) :

Implication

Une implication est une assertion prenant la forme d'une **relation de cause à effet** entre deux assertions.
On explicite cette relation en l'écrivant sous la forme « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ ».

Figure 7. Extrait du manuel Variations Hatier Seconde 2019

Confusion entre le modus ponens et l'implication

On rappelle que la règle du *modus ponens* affirme que si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie. Trop souvent, on réduit l'implication à cette utilisation, c'est-à-dire que l'on ne prend en compte qu'une seule ligne de la table de vérité (figure 8) :

8 **Implication**
La proposition P implique la proposition Q signifie que : si P est vraie, alors Q est vraie.
On la note cette implication : $P \Rightarrow Q$.

Figure 8. Extrait du manuel Transmath Nathan Seconde 2019

Les quatre cas possibles de la table de vérité ne sont jamais mentionnés. Au mieux, on en cite deux : le cas P vraie ET Q vraie et le cas P vraie ET Q fausse. Les manuels n'envisagent pour ainsi dire jamais le cas où la prémisse est fausse comme le montre l'extrait ci-dessous (figure 9) :

A **Implication**

• Une **implication** est une proposition de la forme « **Si P, alors Q** » où P est une proposition appelée **hypothèse** et Q une proposition appelée **conclusion**.
• On suppose la proposition P vraie, alors :
– si la proposition Q est vraie, l'implication « Si P, alors Q » est vraie ;
– si la proposition Q est fausse, l'implication « Si P, alors Q » est fausse.

Figure 9. Extrait du manuel Hyperbole Nathan Seconde 2019

Ceci entretient la règle-en-acte « si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors P est vraie ». On retrouve ceci dans le raisonnement par récurrence. Nous avons proposé à des élèves de Terminale de déterminer des valeurs de l'entier n pour lesquelles la vérité de $P[n]$ est assurée (figure 10). Un grand nombre d'élèves considère que la vérité de $P \Rightarrow Q$ impose la vérité de P.

1. $P[0]$ est vraie et $\forall n \geqslant 2$ $P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

Vrai, $P[n]$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 2$.

2. $P[2]$ est vraie et $\forall n \geqslant 0$ $P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

Vrai, $P[n]$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $P[2]$ est fausse, $P[5]$ est vraie et $\forall n \geqslant 4$ $P[n] \Longrightarrow P[n+1]$.

$P[n]$ est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

Figure 10. Extrait d'une copie d'élève de Terminale spécialité Maths (2022)

Cet élève ne tient absolument pas compte de l'initialisation et répond que $P[n]$ est vraie dès que $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ est vraie. On peut se demander ce que cet élève comprend du raisonnement par récurrence. Malheureusement, ce n'est pas un cas isolé. Cette règle en acte peut être confortée aussi par une formulation malheureuse comme dans l'extrait ci-dessous (figure 11).

Démontrer par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (en général, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$), on peut utiliser le **raisonnement par récurrence** :

1. Initialisation	2. Hérédité
On vérifie que **$P(n_0)$ est vraie.**	Hypothèse de récurrence : on considère un entier quelconque k tel que $k \geqslant n_0$ et on suppose que $P(k)$ est vraie. On démontre l'implication : « **$P(k)$ vraie** » $\Rightarrow$ « **$P(k+1)$ vraie** »

3. Conclusion
$P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Figure 11. Extrait du manuel Barbazo Hachette Terminale Spécialité 2020

Il est incorrect d'écrire que l'on démontre P *vraie* $\Rightarrow Q$ *vraie*, il s'agit ici de démontrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et pour cela il suffit de vérifier que si P est vraie alors Q est aussi vraie. Cette confusion rend difficile de repérer la distinction entre la vérité de l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'utilisation de l'implication dans le *modus ponens* (qui on le rappelle affirme que si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie).

Le fait d'ignorer les cas où la prémisse est fausse rend encore plus difficile la compréhension du raisonnement par l'absurde. En effet, dans ce raisonnement, on part d'une prémisse fausse pour montrer qu'elle ne l'est pas !

Problème de la quantification

La quantification est souvent implicite dans la formulation de l'implication. Cela pose des problèmes d'interprétation comme le montre l'exercice suivant tiré des évaluations de l'APMEP (figure 12) et déjà analysé dans Durand-Guerrier (1999).

Exercice 1
Voici un labyrinthe
Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée la sortie, *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.
Les pièces sont nommées A, B, C… comme il est indiqué sur la figure.

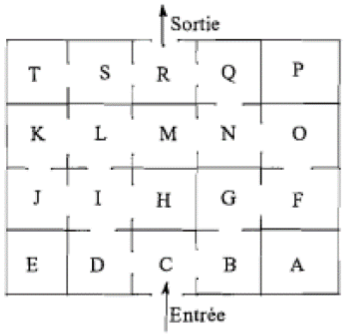


Figure 12. Enoncé de l'exercice du Labyrinthe

L'énoncé proposait six phrases pour lesquelles il fallait dire si elles étaient vraies, si elles étaient fausses ou si on ne pouvait pas savoir. Nous allons analyser la phrase n°6 puis la phrase n°3.

La phrase n°6 est : « Si X est passé par L, alors X est passé par K ».

Pour cette phrase, une grande majorité d'élèves a répondu ON NE PEUT PAS SAVOIR et un petit tiers a répondu FAUX, réponse considérée exacte par les auteurs de l'exercice. Or ces deux réponses sont acceptables selon la quantification implicite imaginée. En effet si X représente une personne donnée, il est impossible de savoir si elle passée par K en sachant qu'elle est passée par L. Cela dépend du trajet qu'elle a emprunté (CDIJKLMNQR ou CDILMNQR). Si on prend la quantification universelle sur toutes les personnes (en réalité, la variable est le trajet et non la personne), l'implication est fausse puisqu'elle admet un contre-exemple (le trajet CDILMNQR). Cette différence d'appréciation de la quantification existe encore même avec un public d'enseignants de mathématiques, nous l'avons vérifié lors de stages de formation.

La phrase n°3 est : « X est passé par M ».

Les auteurs de l'exercice considèrent que la bonne réponse est ON NE PEUT PAS SAVOIR. Ils n'envisagent donc pas la même quantification implicite (c'est-à-dire une quantification universelle) que pour la phrase n°6. Cela pourrait être lié au fait que la phrase n°3 n'est pas une implication.

On voit alors poindre la propriété-en-acte sous-jacente : une implication est toujours quantifiée universellement. C'est vrai que la plupart des implications sont utilisées avec une quantification universelle. L'expliciter permettrait probablement d'éviter certains obstacles auprès des élèves.

On retrouve exactement le même problème qu'avec l'exercice de l'APMEP avec le problème classique suivant donné en classe de Seconde (figure 13) :

Soit f une fonction définie sur $[-4;3]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		-1		0		3
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

Dire pour chaque phrase si celle-ci est vraie ou fausse ou si on ne peut pas savoir.

1. L'image par f de 1 est 0.
2. L'image par f de 1 est -4.
3. L'image par f de -4 est 1.

Figure 13. Exercice classique sur les fonctions en classe de Seconde

Pour la proposition 1, selon que l'on considère que la quantification est universelle (c'est-à-dire pour toutes les fonctions qui ont ce tableau de variation) ou que la proposition ne concerne qu'UNE fonction dont on ne connaît que son tableau de variation, la réponse change de « Fausse » à « On ne peut pas savoir ».

Un autre point qui est souvent passé sous silence est l'explicitation du domaine d'astreinte de la variable. Sans cette précision, il est impossible de se prononcer sur la vérité d'une implication. Comment répondre à la question **b)** de l'exercice ci-dessous (figure 14) :

112 Implication et réciproque

Pour chaque implication, dire si elle est vraie puis énoncer sa réciproque et dire si elle est vraie.

a) Si $x = 0$ ou $x = 3$, alors $x^3 - 9x = 0$.

b) Si $x^2 \geqslant 1$, alors $x \geqslant 1$.

c) Si $x \in [0\ ;\ 8]$, alors $\dfrac{x-1}{-x+6} > 0$.

Figure 14. Extrait du manuel Hyperbole Nathan Seconde 2019

En effet, si x est un réel, réel positif, voire même un entier naturel, la réponse est différente.

Cette absence de la quantification est même rencontrée dans les sujets de Bac. A notre connaissance, un seul sujet de Bac a eu pour objet de déterminer la vérité d'une implication. C'est celui du Bac S de Nouvelle-Calédonie en 2015. Voici le début de l'exercice 3 (figure 15) :

EXERCICE 3
Commun à tous les candidats

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

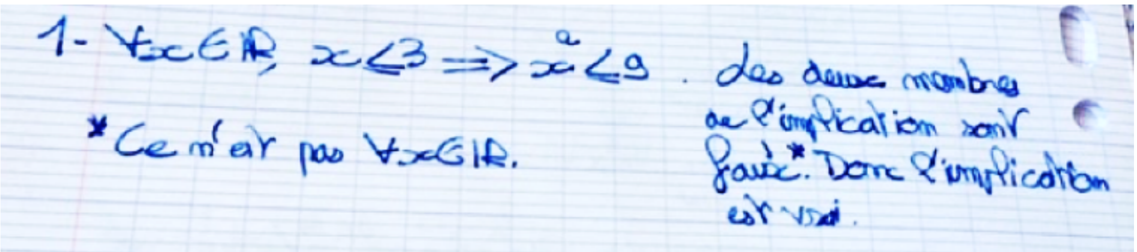
$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Figure 15. Extrait de l'exercice 3 du sujet du Bac S de Nouvelle-Calédonie 2015

Nous supposons que l'expression « soient x, y et z trois nombres réels » inclut pour les auteurs une quantification universelle. Comment alors comprendre que quand on veut prouver une proposition universellement quantifiée du type « $\forall x, P[x]$ », on commence à écrire dans la démonstration « soit x un élément ». Il serait nettement plus simple de prendre l'habitude d'écrire « Pour tout x … » dans l'énoncé de l'implication à démontrer et de commencer la démonstration par « soit x … » et de conclure en reprenant l'expression « Pour tout x … ».

Mais indiquer explicitement la quantification ne résout pas tout. En effet, lors d'un travail en Terminale sur la vérité de l'implication « $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$ », voilà ce qu'ont écrit deux élèves (figure 16) :



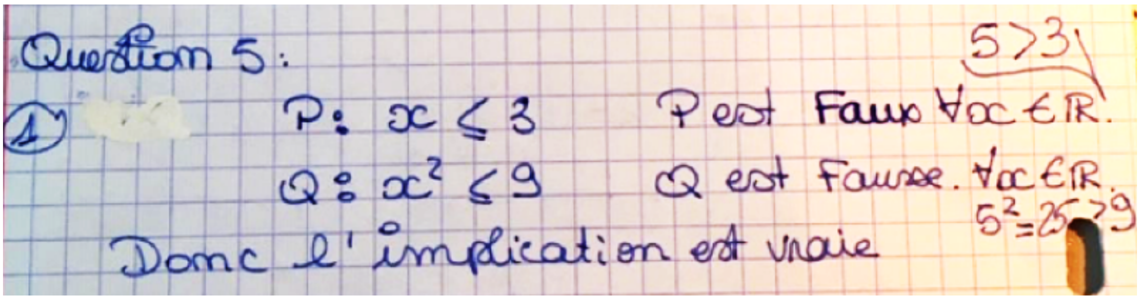


Figure 16. Extraits de copies d'élèves de Terminale S (2018-2019)

Ces deux élèves ont confondu la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9$ » avec la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 3) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 9$ ». C'est pour cela qu'ils affirment que les deux membres de l'implication sont faux et que le deuxième élève donne 5 comme contre-exemple de « $x \leq 3$ » et de « $x^2 \leq 9$ ». Pourtant, ils ont bien intégré que $P \Rightarrow Q$ est vraie si P et Q sont fausses. Il serait préférable de mettre des parenthèses (au moins au début de l'apprentissage) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9)$$

Négation de l'implication

Nous avons vu précédemment que la négation d'une implication n'est pas une implication. Ce point n'est pas souvent explicité et une règle-en-acte, courante chez les élèves, concernant la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est que celle-ci est « non $P \Rightarrow$ non Q ». Un travail spécifique doit être mené sur la négation et sur la réciproque.

Dans beaucoup d'exercices de Vrai-Faux, on demande si une implication est vraie ou fausse. C'est à ce moment-là que l'on peut donner la table de vérité de l'implication, expliciter que montrer qu'une implication est fausse, revient à montrer que sa négation est vraie et donc formuler la négation de l'implication. Notons également que c'est aussi essentiel de savoir nier une implication si on veut la démontrer par l'absurde (voir paragraphe 3.4.).

Formulation d'une implication

Les propriétés mathématiques ne sont pas toujours écrites sous la forme d'une implication. Il faut savoir repérer dans les différentes formulations l'implication sous-jacente. Par exemple si on considère la propriété « deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles ». Cette propriété n'est pas écrite sous la forme d'un « si … alors ». Il faut être capable de traduire en « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors ces deux droites sont parallèles ». On peut remarquer qu'ici la quantification universelle est implicite et est même rarement explicitée notamment dans les théorèmes de géométrie. Cet exercice de reformulation peut sembler simple mais la pratique avec les élèves nous prouve le contraire.

Un autre exercice peut consister à préciser la prémisse, la conclusion d'une propriété implicative et la quantification quand elle est implicite. Prenons par exemple la propriété « si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ». Il faut comprendre que la prémisse est la proposition P « D_1 parallèle à D_2 et D_1 perpendiculaire à Δ » et que la conclusion est « D_2 perpendiculaire à Δ », ceci avec la quantification implicite « pour toutes droites D_1, D_2 et Δ du plan ». Il faut bien remarquer que la proposition P ne correspond pas à la partie de la propriété qui est énoncée entre le « si » et le « alors ». C'est une vraie difficulté pour les élèves.

Un exemple assez caractéristique de ce problème est le suivant : « l'équation (E) n'admet pas de solution positive ». Si on traduit sous la forme « si … alors », on obtient « si α est solution de (E) alors $\alpha < 0$ ». Cette formulation est ici très éloignée de l'énoncé de départ. Notons au passage que cette proposition est vraie pour l'équation dans $\mathbb{R}$ « $x^2 = -1$ », il s'agit encore d'un exemple où l'implication est vraie avec une prémisse fausse.

Enfin, un dernier exemple avec la propriété « Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$ où C est un réel ». Cet énoncé est en fait une équivalence entre les propositions « f vérifie $y' = ay$ » et « f est définie par $f(x) = Ce^{ax}$ »[2]. Ainsi pour démontrer cette propriété, on va démontrer deux implications réciproques l'une de l'autre. Ce travail de traduction doit être fait et ne peut être passé sous silence. Dans l'extrait ci-dessous, cette explicitation n'est pas faite (figure 17).

[2] On peut aussi voir cette équivalence comme l'égalité de deux ensembles : l'ensemble des fonctions vérifiant $y'=ay$ et l'ensemble des fonctions définies par $f(x)=Ce^{ax}$.

A Équations différentielles $y' = ay$

Propriété

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a nombre réel non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel.

Démonstration

• La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$, avec k nombre réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = kae^{ax}$, donc $f_k'(x) = af_k(x)$ et f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, on considère une solution g sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$.
On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = g(x)e^{-ax}$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\phi'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}$.
Or, pour tout réel x, $g'(x) = ag(x)$ donc $\phi'(x) = 0$.
Ainsi ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et il existe un réel k tel que pour tout réel x, $\phi(x) = k$, soit $g(x)e^{-ax} = k$. On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = ke^{ax}$.

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette démonstration est présentée en vidéo

Figure 17. Extrait Hyperbole Nathan Terminale 2020

Ces formulations rendent plus difficile l'énoncé de la réciproque ou de la contraposée et peuvent engendrer des difficultés à résoudre certaines questions. Par exemple, prenons l'énoncé suivant : démontrer que pour tous réels a et b différents de -1, $a + b + ab \neq -1$. Cet énoncé peut se traduire par : pour tous réels a et b, $(a \neq -1\ et\ b \neq -1) \Rightarrow a + b + ab \neq -1$. Ecrit sous cette forme, démontrer sa contraposée s'impose comme solution possible. Effectivement, celle-ci n'est pas compliquée à démontrer, le plus difficile a été de repérer l'implication implicite pour pouvoir ensuite écrire la contraposée.

Il n'est pas question dans notre propos de s'interdire ces différentes formulations, elles ont un avantage certain de concision. En revanche un travail de « traduction » auprès des élèves, comme ci-dessus, est nécessaire.

Comment démontrer une implication ?

Pour démontrer une implication (c'est-à-dire démontrer qu'elle est vraie), plusieurs méthodes sont possibles :

- Démontrer que si P est vraie alors Q est vraie
- Utiliser les valeurs de vérités de P et Q
- Démontrer la contraposée
- Démontrer par l'absurde
- Démontrer par disjonction des cas

Démonstration d'une implication en démontrant que si la prémisse est vraie alors le conséquent est vrai

Pour démontrer qu'une implication est vraie, le raisonnement le plus fréquemment utilisé (voire le seul utilisé) dans l'enseignement est le suivant : on suppose la prémisse P vraie et on démontre que sous cette hypothèse le conséquent Q est vrai. Il est important de souligner que cela suffit. En effet si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est nécessairement vraie. Il est donc inutile de considérer ce cas. Nous donnons un exemple de ce type de démonstration.

Enoncé

Démontrer que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Démonstration

Il faut reconnaître l'implication :

pour tous a et b rationnels, $(a \in \mathbb{Q}$ et b $\in \mathbb{Q}) \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$.

Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \frac{p}{q}$. De même, il existe $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = \frac{p'}{q'}$. Alors $a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$.

Or le numérateur $pq' + qp'$ est élément de $\mathbb{Z}$ et le dénominateur qq' est élément de $\mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b$ est bien de la forme $\frac{p"}{q"}$ avec $p" \in \mathbb{Z}$ et $q"" \in \mathbb{N}^*$, donc $a + b \in \mathbb{Q}$.

On a bien démontré que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Remarque

Dans cet exemple, peu d'opérations ont été nécessaires pour arriver au résultat : écriture de nombres rationnels, calcul de somme en réduisant au même dénominateur, vérification de l'appartenance du numérateur, du dénominateur puis du quotient aux bons ensembles. L'utilisation de l'hypothèse a et b nombres rationnels a été immédiate, mais ce n'est pas toujours le cas, cela dépend fortement de la question posée.

Démonter une implication en utilisant les valeurs de vérité de la prémisse et du conséquent

Dans cette méthode, on démontre que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie en utilisant les valeurs de vérité des propositions P et Q. Il y a donc trois cas : P fausse et Q fausse ; P fausse et Q vraie ; P et Q vraies. Le fait de savoir que Q est vraie est indépendant du fait de savoir que P est vraie. Nous allons examiner deux exemples où cette méthode est présente.

Enoncé

Démontrer que :

pour tout entier naturel n, $(10^n + 1$ divisible par 9$) \Rightarrow (10^{n+1}$ divisible par 9.

Démonstration

La somme des chiffres de $10^n + 1$ est égale à 2. D'après le critère de divisibilité par 9, on obtient que $10^n + 1$ n'est pas divisible par 9. Donc l'implication demandée est vraie car sa prémisse est fausse.

Remarque

Cet exercice est souvent proposé aux élèves, lors du travail sur le raisonnement par récurrence, pour illustrer une propriété héréditaire mais toujours fausse. Très souvent, les enseignants donnent la démonstration de l'implication avec la première méthode (si la prémisse est vraie alors le conséquent est vrai). Il nous semble important de citer la démonstration qui donne l'occasion de revenir sur la table de vérité de l'implication.

Voici un deuxième exemple où cette méthode a un caractère nécessaire.

Enoncé

Pour quelles valeurs de n entier naturel, a-t-on $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ où $P[n]$ est la proposition ouverte $\frac{3^n}{n!} \leq 2^{7-n}$?

Démonstration

Soit n tel que $P[n]$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{3^n}{n!} \leq 2^{7-n}$.

Nous en déduisons $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3^n}{n!} \times \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{n+1} \times 2^{7-n}$.

Pour obtenir $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq 2^{6-n}$, il suffit que $\frac{3}{n+1} \times 2^{7-n} \leq 2^{6-n}$ ce qui équivaut à $n+1 \geq 6$ soit $n \geq 5$.

Par conséquent, nous pouvons déjà affirmer que la proposition « pour tout $n \geq 5, P[n] \Rightarrow P[n+1]$ » est vraie.

La démonstration précédente ne permet pas de conclure pour $n < 5$. Pour cela, examinons les propositions $P[0]$, $P[1]$, …, $P[5]$.

$P[0]$ s'écrit : $1 \leq 2^7$ donc $P[0]$ est vraie.

$P[1]$ s'écrit : $3 \leq 2^6$ donc $P[1]$ est vraie.

$P[2]$ s'écrit : $\frac{9}{2} \leq 2^5$ donc $P[2]$ est vraie.

$P[3]$ s'écrit : $\frac{9}{2} \leq 2^4$ donc $P[3]$ est vraie.

$P[4]$ s'écrit : $\frac{27}{8} \leq 2^3$ donc $P[4]$ est vraie.

$P[5]$ s'écrit : $\frac{81}{40} \leq 2^2$ donc $P[0]$ est vraie.

Ces six propositions sont vraies, nous pouvons en déduire que les cinq implications $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ pour n variant de 0 à 4 sont vraies.

Nous avons donc démontré que « pour tout entier naturel n, $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ » est vraie.

Remarque

Dans cet exemple, nous avons démontré que $P[n] \Rightarrow P[n+1]$ est vraie pour n variant de 0 à 4 en montrant que cette implication est vraie car la prémisse et le conséquent sont vrais. Nous avons seulement utilisé les valeurs de vérité de P et de Q pour prouver $P \Rightarrow Q$. La démonstration de ces cinq implications illustre la méthode que nous voulions mettre en exergue. Notons que pour $n \geq 5$, nous avons supposé $P[n]$ vraie et nous avons prouvé alors que $P[n+1]$ était vraie. On retrouve la méthode courante pour démontrer qu'une implication est vraie. Ainsi, l'intérêt de cet exercice est de faire cohabiter les deux premières méthodes pour démontrer une implication.

3.3. Démontrer une implication à l'aide d'un raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence d'une implication et de sa contraposée : P et Q étant deux propositions quelconques, $P \Rightarrow Q$ est équivalent à non $Q \Rightarrow$ non P. Pour cela, on suppose (non Q) et on en déduit (non P). Nous donnons un exemple où nous démontrons une implication en démontrant sa contraposée, ce qui revient donc à démontrer une autre implication.

Enoncé

Démontrer que pour tout x réel non nul, $\sqrt{x^2+1} \neq 1+\frac{x^2}{2}$.

Démonstration

Il s'agit de prouver l'implication : pour tout réel x, si $x \neq 0$ alors $\sqrt{x^2+1} \neq 1+\frac{x^2}{2}$.

La contraposée de cette implication s'écrit : pour tout réel x, si $\sqrt{x^2+1} = 1+\frac{x^2}{2}$ alors $x=0$.

Soit x un réel tel que $\sqrt{x^2+1} = 1+\frac{x^2}{2}$. En élevant au carré, on obtient $x^2+1 = 1+x^2+\frac{x^4}{4}$, d'où $\frac{x^4}{4}=0$ et on en déduit $x=0$.

La contraposée est vraie, donc l'implication de départ est vraie.

Remarque

Il a fallu traduire l'énoncé pour faire apparaître une implication pour ensuite la démontrer par un raisonnement par contraposition. Remarquons qu'on aurait pu démontrer le résultat en effectuant un raisonnement par l'absurde. Dans ce cas, la quantification serait alors différente : on supposerait qu'il existe x non nul tel que l'on ait l'égalité. On aboutirait à la proposition : $x=0$, ce qui est impossible puisque x est non nul. Ce raisonnement, nous semble-t-il, n'est pas plus simple à comprendre du fait de la négation d'une proposition universelle. Un travail spécifique sur le raisonnement par l'absurde nous a montré que ce raisonnement était difficile à comprendre.

Démontrer une implication à l'aide d'un raisonnement par l'absurde

Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, par un raisonnement par l'absurde, on suppose que $P \Rightarrow Q$ est fausse c'est-à-dire que non $(P \Rightarrow Q)$ est vraie et donc que P est vraie et Q est fausse. Puis en utilisant les deux hypothèses (P est vraie et Q est fausse) et des théorèmes ou propositions déjà démontrées, on montre qu'on aboutit à une certaine proposition auxiliaire, disons R. Soit on sait de manière indépendante que R est fausse (résultat connu), soit on montre que $P \Rightarrow Q$ implique que R est vraie et fausse.

Ainsi, on a les deux cas suivants :

((P et non Q) $\Rightarrow$ R) vraie et R fausse

((P et non Q) $\Rightarrow$ (R et non R)) vraie

Dans les deux cas, on a une implication vraie avec le conséquent faux (R fausse ou (R et non R) proposition qui est fausse quelle que soit R). D'après la table de vérité de l'implication, la prémisse est alors fausse. Ainsi (P et non Q) est fausse, d'où $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Notons que la proposition R du second cas peut être la proposition (non P). Dans ce cas, si, pour aboutir à cette contradiction, on utilise explicitement l'hypothèse P, on a alors effectivement un raisonnement par l'absurde, mais si on arrive en fait à montrer (non P) à partir de (non Q) sans utiliser P, le raisonnement peut alors être rédigé comme un raisonnement par contraposée. Ce cas arrive fréquemment dans les exemples que l'on propose aux élèves notamment dans les manuels.

Voici maintenant un exemple de démonstration d'une implication par l'absurde.

Enoncé

Démontrer que si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles.

Démonstration

On doit démontrer l'implication suivante : pour toutes droites $(D_1), (D_2)$ et (Δ) du plan, si (D_1) est parallèle à (Δ) et si (D_2) est parallèle à (Δ), alors (D_1) et (D_2) sont parallèles.

On va démontrer par l'absurde cette implication. On suppose qu'il existe $(D_1), (D_2)$ et (Δ) trois droites vérifiant (D_1) parallèle à $(\Delta), (D_2)$ parallèle à (Δ) et (D_1) non parallèle à (D_2).

Soit A le point d'intersection de (D_1) et (D_2). Ainsi (D_1) est une droite parallèle à (Δ) passant par A ainsi que la droite (D_2). Or, d'après l'axiome d'Euclide, il n'existe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Donc les droites (D_1) et (D_2) sont confondues. Ceci est faux puisque ces droites sont sécantes. Ainsi la proposition (D_1) parallèle à $(\Delta), (D_2)$ parallèle à (Δ) et (D_1) non parallèle à (D_2) est fausse.

L'implication de départ est vraie.

Remarque

Pour cette démonstration il a été nécessaire d'écrire la négation de l'implication avec la bonne quantification. Si on se réfère à la structure du raisonnement par l'absurde donnée plus haut, nous sommes dans le deuxième cas. P est la proposition «(D_1) est parallèle à (Δ) et (D_2) est parallèle à (Δ)», Q est la proposition « (D_1) et (D_2) sont parallèles » et R la proposition « (D_1) et (D_2) sont confondues ». Cette démonstration ne semble pas pouvoir se réduire à un raisonnement par contraposition car la proposition P est nécessaire (la droite (Δ) n'est pas introduite dans la proposition Q).

Démontrer une implication à l'aide d'un raisonnement par disjonction des cas

Deux schémas du raisonnement par disjonction des cas se présentent :

- la prémisse de l'implication est la disjonction de deux (ou plus) propositions « $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ » ;
- l'ensemble d'astreinte de la variable est la réunion de deux (ou plus) ensembles « pour tout x appartenant à $E_1 \cup E_2, P[x] \Rightarrow Q[x]$ ».

Pour le premier cas, les propositions « $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ » et « $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ » sont logiquement équivalentes, ce qui justifie la structure du raisonnement par disjonction des cas. En effet, « (P ou Q) ⇒ R » équivaut à « R ou non (P ou Q) », équivaut à « R ou (non P et non Q) », équivaut à « (R ou non P) et (R ou non Q) » équivaut à « $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$ ». Pour le deuxième cas, il est clair qu'il suffit de démontrer les deux implications « $\forall x \in E_1, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » et « $\forall x \in E_2, P[x] \Rightarrow Q[x]$ ».

Voici un exemple de démonstration d'une implication par un raisonnement par disjonction des cas (premier schéma).

Enoncé

Démontrer la proposition : pour tout entier naturel n, si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3.

Démonstration

Pour n entier naturel, soit $P[n]$ la proposition : « n n'est pas divisible par 3 » et $Q[n]$ la proposition « $n^2 - 1$ est divisible par 3 ».

Soit n entier naturel. n n'est pas divisible par 3 si et seulement si le reste de la division de n par 3 est 1 ou 2.

$P_1[n]$ est la proposition : « le reste de la division de n par 3 est 1 ».

$P_2[n]$ est la proposition : « le reste de la division de n par 3 est 2 ».

$P[n]$ est équivalent à ($P_1[n]$ ou $P_2[n]$).

On doit donc démontrer : pour tout entier naturel n, ($P_1[n]$ ou $P_2[n]$) $\Rightarrow Q[n]$. Il suffit de démontrer : pour tout entier naturel n, $P_1[n] \Rightarrow Q[n]$ et $P_2[n] \Rightarrow Q[n]$.

Démontrons : pour tout entier naturel n, $P_1[n] \Rightarrow Q[n]$.

Soit n entier naturel. Supposons $P_1[n]$ vraie, alors il existe un entier naturel m tel que

$n = 3m + 1$.

Ainsi $n^2 - 1 = (3m + 1)^2 - 1 = 9m^2 + 6m = 3(3m^2 + 2m)$ et donc $n^2 - 1$ est un multiple de 3 car $3m^2 + 2m$ est entier naturel.

Démontrons : pour tout entier naturel n, $P_2[n] \Rightarrow Q[n]$.

Soit n entier naturel. Supposons $P_2[n]$ vraie, alors il existe un entier naturel m tel que

$n = 3m + 2$.

Ainsi $n^2 - 1 = (3m + 2)^2 - 1 = 9m^2 + 12m + 3 = 3(3m^2 + 4m + 1)$ et donc $n^2 - 1$ est un multiple de 3 car $3m^2 + 4m + 1$ est entier naturel.

Donc on a démontré $P_1[n] \Rightarrow Q[n]$ et $P_2[n] \Rightarrow Q[n]$ qui est équivalent à ($P_1[n]$ ou $P_2[n]$) $\Rightarrow Q[n]$.

On a bien démontré l'implication cherchée « pour tout entier naturel n, si n n'est pas divisible par 3 alors $n^2 - 1$ est divisible par 3 ».

Enfin nous donnons un deuxième exemple qui illustre le deuxième schéma.

Enoncé

Démontrer que : pour tout $x \in [2\,;\,+\infty[$, $\sqrt{x-2} \geq x - 4 \Rightarrow x \in [2\,;6]$.

Démonstration

L'ensemble d'astreinte de la variable est $E = [2\,;\,+\infty[$.

Comme on va envisager deux cas selon le signe de $x-4$, on va considérer le recouvrement de *E* en $E_1 \cup E_2$ avec $E_1 = [2\,;4[$ et $E_2 = [4\,;\,+\infty[$. Pour *x* élément de *E*, on note *P*[*x*] la proposition « $\sqrt{x-2} \geq x-4$ » et *Q*[*x*] la proposition « $x \in [2\,;6]$ ».

- Si $x \in E_1$, *P*[*x*] est vraie puisque $x-4$ est négatif et *Q*[*x*] est vraie. Donc l'implication « pour tout *x* de $E_1, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » est vraie.
- Si $x \in E_2$, alors $x-4$ est positif ou nul. On en déduit que $x-2 \geq (x-4)^2$ c'est-à-dire $x^2-9x+18 \leq 0$ qui équivaut à $(x-3)(x-6) \leq 0$ et enfin à $x \in [3\,;6]$.
  Et si $x \in [3\,;6]$ alors $x \in [2\,;6]$. Donc l'implication « pour tout *x* de $E_2, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » est vraie.

Ainsi l'implication « pour tout *x* de $E, P[x] \Rightarrow Q[x]$ » est vraie.

Remarque

Dans le premier cas ($x \in E_1$), on a démontré l'implication sans déduire *Q*[*x*] de *P*[*x*] mais en examinant les valeurs de vérité de *P*[*x*] et de *Q*[*x*].

Conclusion : quelques points de vigilance

Nous concluons en exposant quelques conseils et points de vigilance pour l'enseignement de l'implication au lycée.

Nous avons vu que dans le langage courant avec l'expression « si … alors », il y avait très souvent une relation de causalité et de temporalité : la cause précède toujours la conséquence. Or en mathématiques, cette notion de temporalité n'est pas présente : un réel *x* n'est pas plus grand que 1 avant que son carré le soit. C'est pour cette raison qu'il faut être très prudent avec les exemples que l'on peut prendre dans la vie courante, d'autant plus qu'ils admettent très souvent beaucoup d'implicites. D'autre part cette expression « si … alors » dans le langage courant peut signifier l'équivalence.

Trop souvent l'implication n'est pas définie comme un connecteur logique qui détermine une nouvelle proposition (qui peut donc être vraie ou fausse). Par exemple, dans les manuels, on voit que $P \Rightarrow Q$ signifie que si *P* est vraie alors *Q* est vraie. On oublie de dire que c'est dans le cas où $P \Rightarrow Q$ est vraie. Il nous paraît indispensable de dire que $P \Rightarrow Q$ est une proposition et donner sa valeur de vérité en fonction des valeurs de vérité des propositions *P* et *Q* (la table de vérité est un bon moyen pour le faire). En particulier bien préciser que $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que *P* est fausse.

A partir de l'implication, bien définir les deux règles de raisonnement : le *modus ponens* et le *modus tollens*. Il est important de bien comprendre la différence entre ces deux modes de raisonnement et l'implication. D'autre part, énoncer la règle du *modus tollens* nous paraît intéressant (en effet, elle est « naturelle », les élèves l'emploient souvent lors d'une recherche de problème en disant par exemple « *a* n'est pas de solution de l'équation car en remplaçant *x* par *a* on n'obtient pas 0 »). Cette règle a l'avantage d'éviter un certain nombre de raisonnements par l'absurde et aussi par contraposition.

Il nous semble très important d'expliciter au maximum la quantification universelle. L'exercice de repérage des moyens d'exprimer cette quantification universelle avec différentes expressions (un, quelconque, tous…) doit être travaillé. Bien faire comprendre que sans cette quantification et sans la précision du domaine d'astreinte de la variable, il est impossible de se prononcer sur la vérité d'une proposition ouverte.

Un dernier point à travailler consiste à repérer les différentes formulations d'une proposition implicative. Certaines formulations sont très loin du « si … alors » avec très souvent une quantification implicite. Demander de citer alors la contraposée ou la réciproque est un exercice qui permet de travailler ce point.

Références bibliographiques

Bernard, D., Gardes, D., Gardes, M.-L, Grenier, D. (2018). Le raisonnement par l'absurde une étude didactique pour le lycée. *Petit x, 108*, 5-40. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR18018/IGR18018.pdf

Deloustal-Jorrand., V. (2004). L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. *Thèse de l'Université de Grenoble*.

Deloustal-Jorrand., V, (2001). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et point de vue d'élèves-professeurs. *Petit x, 55*, 35-70. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR01025/IGR01025.pdf

Durand-Guerrier., V, (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. Petit x, 50, 57-79. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR99258/IGR99258.pdf

Durand-Guerrier, V. (2005). Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique. *Habilitation à Diriger des Recherches*. Université Claude Bernard - Lyon I.

Fabert, C., Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x, 87*, 31-52. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR11017/IGR11017.pdf

Gardes, D., Gardes, M.L, Grenier, D, (2016). Etat des connaissances de Terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x, 100*, 67-98. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100x4_1568109550310-pdf

Grenier, D. (2014). La pratique des problèmes de recherche pour enseigner la logique et les raisonnements mathématiques. *Actes de la CORFEM, Grenoble*, 2014. https://www.univ-irem.fr/corfem/Actes_2014_03.pdf

Gardes, D., Gardes, M.-L. (2019). Le raisonnement par l'absurde à la transition Lycée-Université. In *Actes du XXVIè colloque de la CORFEM*, Strasbourg, 11-12 juin 2019.

Gardes, D., Gardes, M.-L. (à paraître). Le raisonnement à la transition lycée-université : que savent faire les élèves et les étudiants. In *Actes du XXVIIè colloque de la CORFEM*, Nantes, 9-10 juin 2022.

Mesnil, Z., Beaud, S. & Barbe, H. (2016). *Retour de notions de logique dans les programmes de lycée*. Atelier C2i Lycée, Bordeaux, 29 janvier 2016.

Rogalski J. et Rogalski M. (2004). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 9 (pp. 175-203)*. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_09/adsc9-2004_000.pdf

Wason, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New horizons in psychology*. London: Penguin.