

## LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE A LA TRANSITION LYCEE-UNIVERSITE : QUE SAVENT FAIRE LES ELEVES ET LES ETUDIANTS ?

Denis GARDES, Marie-Line GARDES, IREM de Dijon, IREM de Lyon

**Résumé.** Dans cet article, nous présentons un travail de recherche en cours sur le raisonnement par l'absurde. Nous proposons deux formes de raisonnement par l'absurde que nous illustrons par des exemples. Nous présentons ensuite un questionnaire qui a été proposé à des élèves et des étudiants et nous analysons leurs réponses selon plusieurs critères (connaissance de la définition d'un raisonnement par l'absurde, connaissance d'exemples, mobilisation du raisonnement dans une démonstration, etc.). Les résultats mettent en évidence une non-maîtrise du raisonnement par l'absurde par les élèves et les étudiants mais également de nombreuses notions de logique.

Dans cet article, nous présentons un travail de recherche en cours sur le raisonnement par l'absurde mené par un sous-groupe de la C2i Lycée. A partir de travaux de mathématiciens et philosophes (Gardies, 1991 ; Lombardi, 1997 ; Lombard, 1997), nous avons identifié de multiples intérêts du raisonnement par l'absurde, tant pour son efficacité dans certaines démonstrations que pour son apport dans la compréhension de concepts logiques. Du point de vue didactique, il nous a semblé intéressant de questionner la pertinence ainsi que la place et le rôle du raisonnement par l'absurde, en tant qu'outil de preuve d'une part, et en tant qu'objet d'apprentissage de la logique d'autre part (Bernard et *al.*, 2018).

Dans une première étude (Gardes & Gardes, 2019), nous avons proposé une analyse d'extraits de manuels scolaires du lycée sur la place et le rôle attribués au raisonnement par l'absurde. Trois éléments essentiels ressortent de cette analyse.

Premièrement, les définitions proposées par les manuels du raisonnement par l'absurde sont énoncées pour des propositions « quelconques », sans distinguer le cas d'une proposition élémentaire et d'une proposition composée, en particulier implicative. Ces définitions sont rarement opérationnelles, et parfois mal articulées avec l'exemple proposé, c'est-à-dire qu'il est difficile de les appliquer. Par exemple, le manuel *Le Livre scolaire* de la classe de Terminale donne la définition suivante :

### Principe

On s'intéresse à deux propositions A et B et on veut démontrer que A implique B (autrement dit, si A est vraie, alors B l'est aussi).

Le **raisonnement par l'absurde** consiste à supposer que A est vraie et que B est fausse. On aboutit alors à une contradiction, ce qui entraîne que B doit être nécessairement vraie.

Figure 1. Le livre scolaire 2020 Terminale p.23

Les deux exemples qui suivent cette définition sont : démontrer que «  $\sqrt{2}$  est irrationnel » et démontrer que «  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal ». Les auteurs se rendent compte que leur

définition n'est pas opérationnelle pour leur premier exemple puisqu'ils rajoutent dans un encadré « l'implication est cachée ici. On peut reformuler la proposition ainsi : Soit  $x$  un réel positif. Si  $x^2 = 2$ , alors  $x$  est irrationnel ». Pour le deuxième exemple, dont la démonstration est détaillée, ils effectuent un raisonnement par l'absurde classique concernant une proposition élémentaire, sans faire référence à la définition donnée quelques lignes plus haut.

Deuxièmement, le vocabulaire de logique n'est pas toujours utilisé à bon escient (par exemple, *contraire* à la place de *négation*) et il est d'une grande diversité (*proposition*, *affirmation*, *énoncé*, *résultat* sont employés comme des synonymes dans certains manuels). De plus, de nombreux implicites ont pu être relevés ; par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation* ; on dit qu'il faut étudier «  $P$  et non  $Q$  » sans dire que c'est la négation de «  $P$  implique  $Q$  ». Dans l'extrait ci-dessous, le mot *contraire* est employé à la place du mot *négation*. La notion d'*absurdité* n'est pas précisée.

**Raisonner par l'absurde**

- On suppose que le contraire de ce que l'on veut démontrer est vrai.
- On utilise cette hypothèse et des définitions et/ou des propriétés du cours pour faire des déductions jusqu'à arriver à une absurdité.
- La supposition de départ conduisant à une absurdité, elle ne peut être que fausse, donc son contraire est vrai.

Figure 2. Collection Barbazo Seconde, p.31

Troisièmement, nous avons pu mettre en évidence une grande diversité dans la complexité et la pertinence des exemples choisis. Certains ne semblent pas éclairants sur l'utilité d'un raisonnement par l'absurde et d'autres peu pertinents, notamment lorsqu'un autre type de raisonnement (direct, par contraposition ou par équivalence) permet une démonstration plus accessible. Dans l'exemple ci-dessous, un raisonnement direct utilisant les mêmes arguments démontre que, pour tout réel  $x$ ,  $e^x$  est positif.

On veut démontrer la propriété mathématique suivante notée  $P$  :

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ .

On veut utiliser un raisonnement par l'absurde. Écrire la propriété contraire de  $P$ .

**1**

Soit  $a$  un réel. En utilisant l'égalité  $a = 2 \times \frac{a}{2}$ , exprimer  $e^a$  en fonction de  $e^{\frac{a}{2}}$ .

**2**

Montrer qu'il existe une contradiction entre les résultats des questions 1 et 2.

**3**

**Raisonnement par l'absurde**

Pour démontrer qu'une proposition  $P$  est vraie, on suppose que la proposition  $\bar{P}$  (proposition contraire de  $P$ ) est vraie et on montre qu'elle conduit à une contradiction.

Figure 3. Collection Barbazo Première 2019, p.183

Suite à ces analyses, nous avons mis en évidence plusieurs points de vigilance pour l'enseignement de ce raisonnement en classe : vocabulaire à utiliser, séparation des cas proposition élémentaire, proposition composée, articulation de la définition et des exemples, etc. Nous avons également fait quelques propositions pour l'enseignement du raisonnement par l'absurde au lycée et au début de l'université.

Nous avons poursuivi cette recherche avec une seconde étude portant, cette fois, sur les connaissances d'élèves en 2019 (classe de Terminale scientifique du lycée) et d'étudiants (en classe préparatoire aux grandes écoles et en première année de licence) sur le raisonnement par l'absurde. C'est l'objet de ce présent article. Dans une première partie, nous rappelons les différentes formes du raisonnement par l'absurde. Dans une

seconde partie, nous présentons la conception du questionnaire proposé aux élèves et étudiants. Dans une troisième partie, nous détaillons l'analyse des productions d'élèves et étudiants selon plusieurs critères : connaissance de la définition d'un raisonnement par l'absurde, connaissance d'exemples, mobilisation du raisonnement, *etc.* En conclusion, nous résumons les résultats obtenus dans ces premières analyses sur l'état des connaissances des élèves et des étudiants sur le raisonnement par l'absurde.

## Le raisonnement par l'absurde : principe et exemples<sup>1</sup>

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que sa négation est fausse.

Ce raisonnement repose sur :

- le principe du tiers exclu : une proposition ou sa négation est vraie ;
- le principe de non-contradiction : la conjonction d'une proposition et de sa négation est une proposition fausse.

Ainsi, pour démontrer qu'une proposition  $A$  est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer que sa négation ( $\text{non } A$ ) est fausse.

L'analyse des nombreux exemples de raisonnement par l'absurde nous a amenés à distinguer deux cas qui permettent de mettre en évidence deux formes de contradiction (Bernard et *al.*, 2018) :

- (1)  $[(\text{non } A) \Rightarrow C]$  vraie et  $C$  fausse ou autrement dit  $[(\text{non } A) \Rightarrow C]$  et  $\text{non } C$
- (2)  $[(\text{non } A) \Rightarrow (C \text{ et } (\text{non } C))]$  vraie ou autrement dit  $[(\text{non } A) \Rightarrow (C \text{ et } (\text{non } C))]$ .

Nous allons illustrer chacun des deux cas selon que la proposition  $A$  est élémentaire ou non.

### *Cas où la proposition est élémentaire*

*Exemple 1 - Cas (1) : l'ensemble des nombres premiers est infini*

*Démonstration* – On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers.

On les note  $p_1, p_2, \dots, p_n$  et on considère l'entier  $N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ . Par définition  $N \geq 2$ , il admet donc un diviseur premier appartenant à l'ensemble  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Soit  $p_i$  ce diviseur premier ( $1 \leq i \leq n$ ). Alors,  $p_i$  divise  $N$  et  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ , donc la différence de ces deux nombres qui est 1. On en déduit que  $p_i = 1$  et que 1 est un nombre premier.

On a bien le schéma (1) avec :  $A$  est la proposition [l'ensemble des nombres premiers est infini] et  $C$  la proposition [1 est un nombre premier].

*Exemple 2 - Cas (2) :  $\sqrt{2}$  est irrationnel*

*Démonstration* – On suppose que  $\sqrt{2}$  est rationnel.

Il existe  $p$  et  $q$  deux entiers tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  et  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

Ainsi  $p^2 = 2q^2$ ,  $p^2$  est alors divisible par 2 et par suite  $p$  est pair.

<sup>1</sup> Cette partie est reprise du texte produit pour les actes de la CORFEM 2019 (Gardes & Gardes, 2019).

Il existe un entier  $r$  tel que  $p = 2r$ . On en déduit que  $q^2 = 2r^2$ , ce qui implique que  $q$  est pair.

Ainsi  $p$  et  $q$  ne sont pas premiers entre eux, étant pairs tous les deux.

On a bien le schéma (2) avec :  $A$  est la proposition [ $\sqrt{2}$  est irrationnel] et  $C$  la proposition [ $p$  et  $q$  premiers entre eux].

### ***Cas où la proposition est une implication***

On rappelle que l'on veut démontrer une proposition de la forme  $P \rightarrow Q$ . La négation de  $P \rightarrow Q$  étant  $[P \text{ et } (\text{non } Q)]$ , on obtient les deux cas suivants, cas particuliers de (1) et (2) :

(1bis)  $[(P \text{ et } (\text{non } Q)) \rightarrow C]$  vraie et  $C$  fausse

(2bis)  $[(P \text{ et } (\text{non } Q)) \rightarrow (C \text{ et non } C)]$  vraie

*Exemple 3 - Cas (1bis) :*

*Quels que soient les entiers relatifs  $a$  et  $b$ ,  $a+b\sqrt{2} = 0 \rightarrow b = 0$*

*Démonstration* – On suppose qu'il existe  $a$  et  $b$  entiers relatifs tels que  $a+b\sqrt{2} = 0$  et  $b \neq 0$ .

Ainsi  $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$  et est alors rationnel. Cette proposition est fausse.

On a bien le schéma (1bis) avec :  $P$  est [il existe  $a$  et  $b$  entiers relatifs tels que  $a+b\sqrt{2} = 0$ ],  $Q$  la proposition [ $b = 0$ ] et  $C$  la proposition [ $\sqrt{2}$  est rationnel].

*Exemple 4 - Cas (2bis) :*

*Dans l'ensemble des suites réelles, si  $u_0 > 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$  alors  $(u_n)$  diverge.*

*Démonstration* – On suppose qu'il existe une suite  $(u_n)$  vérifiant  $u_0 > 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$  et  $(u_n)$  converge (vers une limite notée  $L$ ).

Comme  $u_{n+1} = u_n^2$  pour tout  $n$ , on en déduit  $L^2 = L$ , c'est-à-dire  $L = 0$  ou  $L = 1$ . Ainsi on obtient  $L \leq 1$ .

D'autre part, la suite  $(u_n)$  est minorée par 1 (démonstration par récurrence immédiate) et est croissante. Sa limite vérifie  $L \geq u_0 > 1$ . On aboutit aux deux propositions : [ $L \leq 1$ ] et [ $L > 1$ ]. Donc la suite  $(u_n)$  diverge.

On a bien le schéma (2bis) avec :  $P$  est [ $u_0 > 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$ ] et  $Q$  la proposition [ $(u_n)$  diverge] et  $C$  la proposition [ $L > 1$ ].

Notre étude de ces deux formes du raisonnement par l'absurde et des exemples qui les illustrent montre la richesse de ce raisonnement, comme outil de preuve d'une part, et comme objet d'apprentissage de la logique d'autre part. Ainsi, le raisonnement par l'absurde est particulièrement adapté pour démontrer des propositions élémentaires écrites sous forme négative. Par exemple, pour démontrer  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel (cf. exemple 2 ci-dessus). Notons que les domaines mathématiques dans lesquels le raisonnement par l'absurde est largement utilisé sont l'arithmétique et la géométrie euclidienne non repérée, mais il est pertinent aussi pour l'étude des fonctions et de l'ensemble des nombres réels, et particulièrement adapté pour les problèmes concernant l'infini. Pour l'apprentissage de la logique et du raisonnement, le raisonnement par l'absurde présente de nombreux points d'intérêt. Premièrement, il mobilise de nombreux

concepts de logique : proposition, négation d'une proposition, connecteurs (et, ou), quantificateurs (quel que soit, il existe), etc. Deuxièmement, il nécessite de travailler sur une hypothèse fautive (la négation de la proposition à démontrer). Troisièmement, il permet d'aborder une proposition sous des points de vue opposés, ce qui élargit l'exploration et donc la connaissance de cette proposition.

Dans le cadre de notre recherche, après avoir analysé les programmes et des documents institutionnels ainsi que des manuels scolaires et des sujets de bac (Gardes & Gardes, 2019), nous nous sommes intéressés aux connaissances effectives des élèves et des étudiants sur le raisonnement par l'absurde. Pour cela, nous avons conçu un questionnaire pour des élèves de Terminale et des étudiants de début de l'université. Lors de l'atelier proposé à la CORFEM 2022, nous avons proposé aux participants d'analyser des extraits de productions d'élèves de Terminale S et d'étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles.

### Présentation du questionnaire proposé aux élèves et aux étudiants

Le questionnaire comporte six questions :

**Q1.** Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?

**Q2.** Connaissiez-vous des exemples de démonstration utilisant un raisonnement par l'absurde ? Si oui, pouvez-vous en citer ?

**Q3.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n^2$ . On admet que la suite  $(u_n)$  est croissante. Démontrez par l'absurde que la suite  $(u_n)$  n'admet pas de limite finie.

**Q4.** Voici une démonstration.

\* Selon vous, utilise-t-elle un raisonnement par l'absurde ? Justifiez.

\* Est-elle convaincante ? Pourquoi ? Si non, comment la modifieriez-vous ?

On veut démontrer que quel que soit  $n$  entier,  $(n^2 \text{ pair})$  implique  $(n \text{ pair})$ .

On suppose que  $n^2$  pair et  $n$  impair.

Comme  $n$  est impair, il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ . Donc  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ . On en déduit que  $n^2$  est un nombre impair. Contradiction.

**Q5.** Mêmes questions avec la démonstration suivante :

On veut démontrer par l'absurde que zéro n'a pas d'inverse dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que 0 a un inverse dans  $\mathbb{R}$ . On le note  $a$ .

Par définition de l'inverse,  $0 \times a = 1$ .

Or on sait que pour tout réel  $x$ ,  $0 \times x = 0$ .

On en déduit que  $0 = 1$ . Ce qui est faux.

**Q6. Mêmes questions avec la démonstration suivante :**

On admet qu'il existe une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$  et telle que pour tout  $x$  réel,  $f(x) \neq 0$ .

On veut démontrer que cette fonction  $f$  est unique.

On suppose qu'il existe une fonction dérivable  $g$  telle que  $g' = g$  et  $g(0) = 1$ .

Comme  $f$  ne s'annule pas, on pose  $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ . On a alors pour tout réel  $x$  :

$$k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0$$

La fonction  $k$  est donc une fonction constante sur  $\mathbb{R}$ .

Or  $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$  donc pour tout  $x$  réel,  $k(x) = 1$ .

On a donc pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = g(x)$  c'est-à-dire  $f = g$ .

La *première question* avait pour objectif de recueillir les définitions d'un raisonnement par l'absurde données par des élèves et des étudiants et d'en examiner le caractère opérationnel. Nous avons choisi cette forme de question (explication à un pair) afin d'éviter de recueillir la définition éventuelle du cours de mathématiques ou de philosophie. Nous cherchions en effet à recueillir une définition personnelle qui nous renseigne bien davantage sur la compréhension de l'élève à propos du raisonnement par l'absurde. En appui sur nos travaux précédents sur le raisonnement par récurrence (Gardes et al., 2016) et sur l'analyse de la place et du rôle du raisonnement par l'absurde dans les manuels scolaires (Bernard et al., 2018 ; Gardes & Gardes, 2019), nous avons fait l'hypothèse que le vocabulaire de logique ne serait pas mobilisé par les élèves et les étudiants dans leurs définitions et qu'ils mettraient davantage en avant la structure du raisonnement. Le but d'un raisonnement par l'absurde (prouver la vérité d'une proposition) ne nous paraissait pas forcément identifié par les élèves et les étudiants.

La *deuxième question* visait à recueillir des exemples, connus des élèves et des étudiants, de propositions se démontrant avec un raisonnement par l'absurde. Nous avons fait l'hypothèse que les exemples figurant dans les programmes seraient les plus cités, notamment l'irrationalité de racine de 2, l'unicité de la division euclidienne, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, l'unicité de la fonction *exp*.

La *troisième question* demandait aux élèves et aux étudiants de produire une démonstration par l'absurde. L'objectif de cette question était de recueillir la manière dont ils mettaient en œuvre un raisonnement par l'absurde, tant sur le fond (contenu mathématique et règles de logique) que sur la forme (écriture de la démonstration). Nous voulions également étudier l'adéquation entre leur définition d'un raisonnement par l'absurde (question 1) et la mise en œuvre effective de celle-ci sur un exemple. En appui sur nos travaux précédents, nous avons fait l'hypothèse que la structure du raisonnement par l'absurde serait visible et prégnante dans les productions des élèves et des étudiants, sans toutefois s'appuyer sur les notions de logique nécessaires pour construire la démonstration. Par exemple, nous avons anticipé des difficultés pour repérer et écrire l'implication à démontrer et reconnaître la négation d'une implication. Notons qu'*a priori*

les connaissances en jeu étant des notions classiques sur les suites, elles ne devaient pas faire obstacle.

Les *questions 4 à 6* sont construites sous la même forme : une démonstration rédigée d'une proposition est proposée et il est demandé aux élèves et aux étudiants de repérer si la démonstration utilise un raisonnement par l'absurde ou non, et s'ils sont convaincus ou non de la démonstration proposée. Nous avons choisi des propositions classiques, dans le sens où elles sont présentées dans la plupart des manuels scolaires et donc *a priori* déjà vues ou connues des élèves et des étudiants. L'objectif était d'identifier sur quels critères les élèves et les étudiants repèrent un raisonnement par l'absurde dans une démonstration. Nous avons fait l'hypothèse que les élèves repèreraient un raisonnement par l'absurde grâce à la structure syntaxique (avec appui sur les mots « On suppose (non P) », « contradiction »), sans toujours prendre en compte l'aspect sémantique.

La démonstration de la question 4 porte sur la proposition suivante : quel que soit  $n$  entier,  $n^2$  pair implique  $n$  pair. Nous avons choisi cette proposition pour deux raisons : d'une part pour identifier comment les élèves et les étudiants repèrent un raisonnement par l'absurde dans le cas d'une proposition implicative, et d'autre part s'ils distinguent un raisonnement par l'absurde d'un raisonnement par contraposition. Nous avons fait l'hypothèse que les élèves et les étudiants n'identifieraient pas nécessairement que ce raisonnement pouvait se faire par contraposition. Nous avons également anticipé la difficulté pour les élèves et les étudiants d'écrire la négation de l'implication.

La démonstration de la question 5 porte sur la proposition suivante : 0 n'a pas d'inverse dans  $\mathbb{R}$ . Nous avons choisi cette proposition pour identifier comment les élèves et les étudiants repéraient un raisonnement par l'absurde dans le cas d'une proposition élémentaire.

La démonstration de la question 6 porte sur la proposition suivante : il existe une unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les trois propriétés suivantes :  $f' = f$  ;  $f(0) = 1$  et pour tout  $x$  réel,  $f(x) \neq 0$ . Nous avons choisi cette proposition pour identifier si les élèves et les étudiants repéraient que la démonstration n'utilisait pas un raisonnement par l'absurde. Nous avons fait l'hypothèse qu'ils s'arrêteraient à la structure du raisonnement par l'absurde (par le marqueur « on suppose que... ») et ne repèreraient pas qu'il manquait l'hypothèse «  $f$  différent de  $g$  » pour écrire cette démonstration avec un raisonnement par l'absurde.

La passation du questionnaire est individuelle, sur un feuillet dédié et d'une durée de 45 minutes à 1h. Le questionnaire a été passé auprès de 8 classes de Terminale S et de 5 classes préparatoires aux grandes écoles de différentes filières (ECS, PC, PTSI, MPSI, MP).

## **Analyse et résultats**

Nous exposons ici les premiers résultats des analyses des productions des élèves de Terminale S et des étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles, recueillis durant l'année scolaire 2018-2019. Notre analyse se porte plus en détails sur les questions 1, 4 et 5.

### **Résultats pour la question 1**

Nous avons classé les définitions proposées par les élèves et les étudiants en quatre catégories :

1. Les *réponses correctes* qui décrivent la structure du raisonnement : *on veut montrer  $P$ , on suppose non  $P$  et on arrive à une contradiction. Donc on a  $P$ .* La figure 4 est un exemple d'une réponse de cette catégorie. On remarque que la structure du raisonnement est détaillée et que deux formes de contradiction sont mentionnées. En revanche, le vocabulaire de logique est très peu utilisé, contrairement à la réponse de la figure 5, proposée par un étudiant en MP\*.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?

Le raisonnement par l'absurde c'est quand on admet quelque chose que l'on pense faux, et qu'on suit un raisonnement logique à partir de ce quelque chose jusqu'à arriver à une conclusion évidemment absurde (type  $1=2$ ) ou à une conclusion qui contredit le quelque chose que l'on a admis au début.

Figure 4. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses correctes »

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?

Pour démontrer une proposition, le raisonnement par l'absurde consiste à nier cette proposition afin d'en dégager une absurdité, c'est-à-dire quelque chose de trivialement faux.

En d'autres termes, cela revient à se poser la question suivante :  
 "Je souhaite démontrer cette assertion. Que se passerait-il donc si cette assertion était en réalité fautive ?". Et la réponse à cette question amène à une absurdité, c'est que l'assertion est vraie.

Figure 5. Réponse d'un élève de MP\* à la question 1, catégorie « réponses correctes »

2. Les *réponses qui portent uniquement sur la négation* sans détailler la structure du raisonnement, par exemple : démontrer  $P$  vraie revient à démontrer (*non  $P$* ) fautive. La figure 6 est un exemple emblématique des réponses que nous avons classées dans cette catégorie : il est juste évoqué la première étape du raisonnement par l'absurde (on cherche à montrer (*non  $P$* ) fautive) mais il n'est pas explicité comment le raisonnement par l'absurde permet d'y parvenir. Nous pouvons également constater que le vocabulaire de logique n'est pas bien mobilisé (prouver quelque chose, contraire, etc.).

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est un type de démonstration qui prouve quelque chose en montrant que son contraire est faux.

Figure 6. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui portent uniquement sur la négation »

3. Les réponses qui témoignent d'une compréhension partielle du raisonnement. Les réponses montrent que les élèves et les étudiants n'ont pas compris, outre la structure du raisonnement, le but du raisonnement (prouver qu'une proposition est vraie), comme en témoigne la réponse de la figure 7.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui aboutit à quelque chose de non cohérent. On cherche à mettre en évidence une incohérence.

Figure 7. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une compréhension partielle »

Le fait que l'on démontre que ( $\text{non } P$ ) est fausse pour en déduire que  $P$  est vraie n'est pas repéré dans un certain nombre de réponses. Le lien entre  $P$  et ( $\text{non } P$ ) n'est pas intégré comme l'atteste la figure 8.

Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde, c'est le fait de démontrer quelque chose de faux pour en déduire le vrai.

Figure 8. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une compréhension partielle »

Dans cette catégorie, nous relevons aussi des réponses où la confusion entre « raisonnement/démonstration » et « proposition » est présente. Cela amène les élèves à dire que la démonstration, lors d'un raisonnement par l'absurde, est fausse (figure 9), au lieu de dire que ( $\text{non } P$ ) est fausse.

**Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?**

Je lui que c'est un raisonnement qui permet de démontrer quelques choses (propriétés ...) en faisant une preuve que dès le départ, on sait que la preuve sera fausse. Pour raisonner par l'absurde, il faut essayer de démontrer l'inverse de ce qu'on veut réellement démontrer.

Figure 9. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une compréhension partielle »

4. Les réponses qui témoignent d'une totale incompréhension du raisonnement. Dans ce cas, les réponses ne mentionnent ni l'idée de négation, ni l'idée de contradiction comme le montre la réponse de la figure 10.

**Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?**

Le raisonnement par l'absurde est le principe d'utiliser ce qui a été trouvé auparavant pour montrer ce que l'on souhaite.

Figure 10. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une totale compréhension »

On repère aussi des réponses où des conditions au raisonnement sont ajoutées, par exemple « prouver par des choses simples » (figure 11) ou « utiliser des calculs pas compliqués », comme marqueurs du raisonnement par l'absurde.

**Question 1 – Vous devez expliquer à un camarade ce qu'est un raisonnement par l'absurde. Que lui dites-vous ?**

Un raisonnement par l'absurde est une chose qu'on doit prouver par des choses simples, évidentes et où le résultat est déjà connu au départ.

Figure 11. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d'une totale incompréhension »

Certaines incompréhensions du raisonnement proviennent de la confusion entre « démontrer une proposition fausse » et « résultat absurde », comme le montre la figure 12.

**Question 1** – Vous devez expliquer à un camarade ce qu’est un **raisonnement par l’absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est lorsque au début, nous savons pas si la conjecture ou hypothèse que on n'est est juste ou fausse. Il faut donc la démontrer pour obtenir un résultat qui sera ~~et~~ validé soit juste ou faux c'est à dire absurde.

Figure 12. Réponse d’un élève de Terminale S à la question 1, catégorie « réponses qui témoignent d’une totale incompréhension »

5. Les réponses qui qualifient le raisonnement par l’absurde de raisonnement absurde ou non logique. Elles expriment une association du qualificatif « absurde » au sens commun de « absurde » (i.e. contraire à la raison, à la logique). Les figures 13 et 14 montrent un exemple de réponses classées dans cette catégorie.

**Question 1** – Vous devez expliquer à un camarade ce qu’est un **raisonnement par l’absurde**. Que lui dites-vous ?

Un raisonnement par l'absurde est un raisonnement sans logique qui se contredit lui-même et/ou qui ne prouve pas ce qu'on et/ou cherche à prouver au départ.

Figure 13. Réponse d’un élève de Terminale S à la question 1, « catégorie raisonnement absurde »

**Question 1** – Vous devez expliquer à un camarade ce qu’est un **raisonnement par l’absurde**. Que lui dites-vous ?

Je lui dirai que l'on sait que quelque chose est faux, mais on ne admettra que il est vrai pour prouver l'authenticité d'une propriété. C'est absurde car on s'est déjà d'annonce que l'hypothèse de départ est fausse.

Figure 14. Réponse d’un élève de Terminale S à la question 1, « catégorie raisonnement absurde »

En Terminale S, la majorité des réponses relèvent des catégories 2 à 4, très peu d’élèves écrivent une définition correcte d’un raisonnement par l’absurde. Chez les étudiants, on trouve davantage de réponses relevant de la première catégorie. Cependant, à l’exception des étudiants de MP\*, les élèves et les étudiants ne mobilisent pas le vocabulaire approprié de la logique. Comme nous l’avons mis en évidence dans nos études précédentes sur l’analyse des manuels, le vocabulaire de logique n’est pas utilisé à bon escient (par exemple, *contraire* ou *inverse* à la place de *négation*) et de nombreuses confusions ont pu être relevées (par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation*). Ajoutons également que les élèves ont beaucoup de difficultés à expliciter le but d’un raisonnement par l’absurde (de nombreuses réponses disent qu’il sert à « démontrer un résultat faux »). Ceci est probablement dû au fait que la notion de *proposition* n’est pas dégagée et travaillée.

### **Résultats pour la question 2**

L'analyse des réponses à cette question a consisté à catégoriser l'exemple proposé (exemple issu des programmes ou autre exemple) et analyser la pertinence de leur proposition.

Les élèves de Terminale S donnent très peu d'exemples et lorsqu'ils en mentionnent, ces exemples sont pertinents et majoritairement issus de leurs cours de mathématiques et des programmes (par exemple unicité de la limite d'une suite, unicité de la fonction exponentielle). Les étudiants, en revanche, proposent presque tous des exemples classiques, corrects et pertinents. La démonstration de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  est très souvent mentionnée.

### **Résultats pour la question 3**

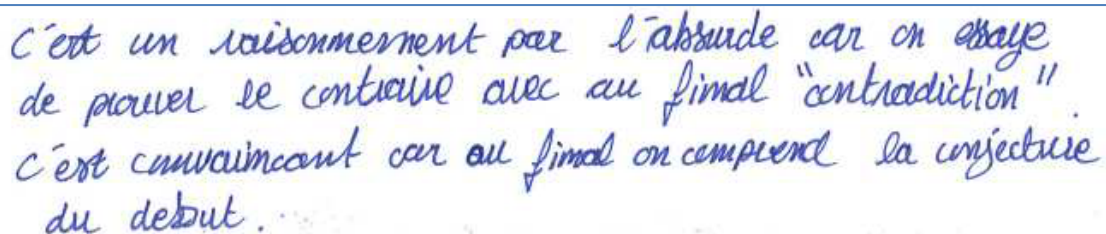
L'analyse s'est effectuée sur trois points : la justesse de leur raisonnement, l'utilisation des notions de logique (implication, négation) et l'articulation entre la mise en œuvre de leur démonstration et leur définition proposée à la question 1.

En Terminale S, cette question est peu effectuée et quand elle est abordée, les élèves commencent la démonstration par « si  $(u_n)$  a une limite finie  $l$  » et tentent de mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde, en s'appuyant sur sa structure. Les étudiants effectuent presque tous la question et abordent la démonstration de la même façon. Cependant, très peu d'élèves et d'étudiants arrivent au bout de la démonstration. Les difficultés relevées sont : l'écriture de l'implication à démontrer, l'écriture de la négation de l'implication et la traduction de «  $l$  est la limite de la suite ». Ces difficultés impliquent qu'ils ne peuvent pas mobiliser les hypothèses pour élaborer leurs démonstrations, qu'ils essaient de chercher d'autres contradictions (par exemple avec l'unicité de la limite ou la fonction carrée) sans y parvenir et donc échouent à mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

### **Résultats pour les questions 4 à 6**

Nous avons analysé ces trois questions avec deux critères communs : identification d'un raisonnement par l'absurde et justification apportée. Pour la question 4, nous avons ajouté un critère : la reconnaissance de la contraposition.

Pour la question 4, la majorité des élèves et des étudiants reconnaît un raisonnement par l'absurde. La justification apportée est très souvent liée à la structure du raisonnement : "on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer et on aboutit à une contradiction" (figure 15). On voit souvent les mots « on suppose ... » et « contradiction » soulignés ou surlignés (figure 17).



C'est un raisonnement par l'absurde car on essaye de prouver le contraire avec au final "contradiction".  
C'est convaincant car au final on comprend la conjecture du début.

Figure 15. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur la structure du raisonnement par l'absurde

Mais affirmer que l'on est bien en présence d'un raisonnement par l'absurde ne garantit pas la compréhension de la démonstration. La difficulté ici provient très souvent de l'implication : l'équivalence avec la contraposée ou la négation de l'implication ne sont pas acquises (figures 16 et 17).

- Oui, car elle part d'une telle fausse pour insérer la contradiction.  
 - Non, elle montre que si  $n$  est impair,  $n^2$  est impair, ce qui n'implique pas forcément que si  $n$  est pair  $n^2$  est pair ou l'inverse.  
 Il faudrait désormais montrer que si  $n$  est pair,  $n^2$  est pair.

Figure 16. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur la structure du raisonnement par l'absurde

**Question 4 - Voici une démonstration.**

- Selon vous, utilise-t-elle un raisonnement par l'absurde ? Justifiez.
- Est-elle convaincante ? Pourquoi ? Si non, comment la modifieriez-vous ?

On veut démontrer que quel que soit  $n$  entier, ( $n^2$  pair) implique ( $n$  pair).  
On suppose que  $n^2$  pair et  $n$  impair.  
 Comme  $n$  est impair, il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ . Donc  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ .  
 On en déduit que  $n^2$  est un nombre impair. Contradiction.  
 Donc que quel que soit  $n$  entier,  $n^2$  pair implique  $n$  pair.

Oui, elle utilise un raisonnement par l'absurde car si  $n^2$  pair implique  $n$  pair. Donc par l'absurde cela devient si  $n^2$  impair alors  $n$  impair.

Figure 17. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur la structure du raisonnement par l'absurde

Le quart des réponses restantes mentionnent qu'il ne s'agit pas d'un raisonnement par l'absurde et apportent majoritairement comme justification « l'implication n'est pas dans le bon sens » ou « on ne part pas de  $n^2$  pair » (figure 18). Ces justifications révèlent une difficulté des élèves et des étudiants à reconnaître la négation d'une implication.

- Ce n'est pas un raisonnement par l'absurde parce qu'on ne part pas de " $n^2$  pair" mais de " $n$  impair". On ne prouve pas.  
 - Pas convaincante

Figure 18. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4 avec justification sur l'implication

Notons que parmi les réponses « non », quelques étudiants apportent comme justification « non car c'est un raisonnement par contraposition » (figure 19). En effet, en vérifiant la négation, ils arrivent à repérer que la proposition  $n^2$  n'est pas utilisée. Les élèves de Terminale S ne semblent en revanche pas faire de distinction entre un raisonnement par l'absurde et un raisonnement par contraposition.

• Non: on veut montrer que  $A \Rightarrow B$ , on suppose que  $A$  et  $\bar{B}$  (soit  $A \Rightarrow \bar{B}$ ), et on arrive à une contradiction, mais cette contradiction porte sur le présupposé. C'est donc plutôt un raisonnement par contraposition (pour montrer que  $A \Rightarrow B$ , on montre  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ )

Figure 19. Réponse d'un élève de CPGE à la question 4 avec justification sur la contraposition

Une grosse surprise pour nous a été de constater qu'un nombre non négligeable d'élèves était incapable de repérer ce qui était démontré : si  $n$  impair alors  $n^2$  est impair (figure 20). C'est vrai que repérer l'objet d'une démonstration n'est pas un exercice habituel dans l'enseignement.

Cette démonstration ne me semble pas utiliser à proprement parler un raisonnement par l'absurde, puisque, pour démontrer que  $n^2$  pair implique  $n$  pair, elle ne fait que prouver le contraire, c'est-à-dire que  $n^2$  impair implique  $n$  impair, supposant au départ une propriété dont elle ne montre pas totalement l'absurdité.

Figure 20. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 4, ne repérant pas ce qui est démontré

Pour la question 5, la quasi-totalité des élèves et des étudiants reconnaissent un raisonnement par l'absurde et les justifications s'appuient sur la structure du raisonnement. La majorité des justifications des élèves de TS mentionnent uniquement le fait de supposer (*non P*) : « on suppose l'inverse de ce qu'on veut démontrer » (figure 21). Cela est cohérent avec les définitions proposées à la question 1 qui relèvent de la catégorie 2 (voir résultats de la question 1).

- Raisonnement par l'absurde puisque l'on suppose l'inverse de ce que l'on veut démontrer  
- Convaincante à mon avis puisque utilisant des propriétés connues

Figure 21. Réponse d'un élève de Terminale S à la question 5 avec justification sur la structure (présence de *non P*)

Les justifications des étudiants mentionnent en plus la notion de contradiction : « on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer et on aboutit à une contradiction »

(figure 22), mais toujours sans l'utilisation du vocabulaire de logique. Ceci est également cohérent avec les définitions proposées à la question 1 qui relèvent davantage de la catégorie 1 (voir résultats de la question 1).

C'est un raisonnement par l'absurde car on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer pour arriver à une contradiction. Cette démonstration est convaincante pour moi car elle suit une logique.

Figure 22. Réponse d'un élève de CPGE à la question 5 avec justification sur la structure (présence de non  $P$  et d'une contradiction)

Notons également que plusieurs élèves et étudiants trouvent la démonstration convaincante et justifient avec des arguments de clarté, de précision, de logique ou de simplicité (figure 23). Peu d'arguments mathématiques sont avancés.

- Oui car on a montré que ~~ce n'est pas~~  $P$  est fautive en montrant que " $P$  est vraie" est faux.  
- Oui elle est convaincante de par sa structure ("Or", "Donc") et dans le fond, elle s'appuie sur une propriété banale des nombres, logique.

Figure 23. Réponse d'un élève de CPGE à la question 5 avec justification sur la clarté, précision, logique, simplicité

En analysant conjointement les réponses aux questions 4 et 5, nous avons relevé que les élèves et les étudiants reconnaissent mieux un raisonnement par l'absurde dans la démonstration de la vérité d'une proposition simple (question 5) que dans celle d'une proposition implicative (question 4). La difficulté se situe autour de la connaissance de la négation (figure 24) : ils ne parviennent pas à reconnaître la négation d'une proposition implicative et ne repèrent donc pas que le raisonnement pose ( $\text{non } P$ ) au départ, un critère qu'ils utilisent pour déterminer s'il s'agit d'un raisonnement par l'absurde ou non.

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Question 4 | <p>Ce n'est pas un raisonnement par l'absurde car ici on démontre que <math>(n^2 \text{ impair}) \Rightarrow (n \text{ impair})</math>.<br/> Faux que le raisonnement soit : il aurait fallu montrer que <math>(n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ impair})</math>.</p> |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|            |                                                                                                                                                                                  |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Question 5 | C'est un raisonnement par l'absurde car il suppose dès le début le contraire de ce qu'il veut démontrer à savoir que $O$ a un successeur.<br>Cette démonstration est circulaire. |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figure 24. Réponse d'un élève de Terminale S aux questions 4 et 5, sur la reconnaissance d'un raisonnement par l'absurde

Pour la question 6, la majorité des élèves et des étudiants pensent qu'il ne s'agit pas d'un raisonnement par l'absurde. Les justifications portent majoritairement sur la structure du raisonnement par l'absurde, comme pour les questions 4 et 5 : « il n'y a pas de contradiction », « on ne part pas de l'hypothèse inverse » (figure 25). De même, ceux qui pensent que c'est un raisonnement par l'absurde le justifient avec des explications portant sur la structure (figure 26).

Non ça n'est pas un raisonnement par l'absurde car on n'a pas montré qu'il y avait une contradiction.

non → ce n'est pas raisonnement par l'absurde.  
utilisation proposition de base ; non pas de son contraire.

Figure 25. Réponse de deux élèves de Terminale S à la question 6, justification sur la structure (supposer (non  $P$ ), avoir une contradiction)

- Ou, c'est un raisonnement par l'absurde car on suppose quelque chose et on cherche à montrer une contradiction.

Figure 26. Réponse d'un élève de CPGE à la question 6, justification sur la structure (supposer (non  $P$ ), avoir une contradiction)

Quelques élèves et étudiants évoquent un raisonnement direct (figure 27) et d'autres mentionnent qu'il faudrait ajouter «  $f \neq g$  » pour avoir un raisonnement par l'absurde (figure 28). La plupart sont convaincus par la démonstration, les justifications sont très diverses et on retrouve les critères de clarté, de précision, de logique ou de simplicité, avancés aussi pour la question 5.

Ce n'est pas un raisonnement par l'absurde, l'unicité de cette fonction est montrée de manière directe : soit deux fonctions  $f$  et  $g$  admettant des hypothèses  $f=g$  alors  $f=g$  (il n'y a pas de contradiction)

Figure 27. Réponse d'un élève de CPGE à la question 6, justification sur le type de raisonnement (direct)

Cette démonstration n'utilise pas un raisonnement par l'absurde, car elle n'aboutit pas à une contradiction, elle montre simplement que  $f=g$ . Elle reste convaincante, néanmoins, il faudrait ajouter au début que  $f$  et  $g$  sont différentes, ce qui nous permettrait, par le même raisonnement, d'obtenir une contradiction.

Figure 28. Réponse d'un élève de CPGE à la question 6, justification sur l'ajout de  $f$  différent de  $g$

## Conclusion et perspectives

Nous pouvons conclure de ces premières analyses que les élèves et les étudiants ne comprennent pas réellement ce qu'est un raisonnement par l'absurde. En effet, dans les définitions proposées, on constate qu'ils essaient de décrire sa structure mais ils n'en comprennent pas les principes logiques (non-contradiction et tiers exclu) sur lesquels il s'appuie. On relève également une ambiguïté, pour plusieurs élèves de Terminale S, sur la signification du mot « absurde ». Ils avancent alors qu'un raisonnement ne peut pas être par l'absurde s'il est logique.

Comme nous l'avons déjà mis en évidence pour le raisonnement par récurrence (Gardes et *al.*, 2016), pour reconnaître un raisonnement par l'absurde, les élèves et les étudiants cherchent à identifier les différentes étapes de sa structure, c'est-à-dire la négation de la proposition à démontrer, la contradiction et la conclusion. Certains, dans le cas d'une implication (voir question 4), ne parviennent pas à repérer ce qui est démontré.

Le vocabulaire de logique est rarement mobilisé par les élèves et les étudiants. Dans les définitions proposées, le terme *proposition* est peu utilisé. A sa place, on trouve *hypothèse*, *quelque chose*, *ce qu'on veut démontrer*. De même, le terme *négation* est rarement employé, ils utilisent les termes *contraire* et *inverse*. Ces résultats ne sont pas surprenants, ce sont aussi ces termes que l'on retrouve dans de nombreux manuels scolaires (Gardes et *al.*, 2016 ; Gardes & Gardes, 2019). Nous pouvons souligner à nouveau l'importance d'utiliser le vocabulaire adéquat (*i.e. proposition, négation et contradiction*) dans le processus de conceptualisation, d'autant plus que ce vocabulaire est au programme (Grenier, 2015).

Les réponses des élèves et des étudiants mettent également en évidence une non-maîtrise des notions de logique. En effet, on peut relever des confusions entre la valeur

de vérité d'une proposition et sa négation, par exemple *proposition fausse* semble être associée à *négation*. La notion de contradiction, qui n'est jamais explicitée dans les manuels scolaires, ne semble pas comprise par de nombreux élèves et étudiants, certains l'associent à un raisonnement faux.

La négation d'une proposition implicative n'est pas connue de nombreux élèves et étudiants (Ben Kilani, 2005 ; Deloustal-Jorand, 2004 ; Durand-Guerrier, 1999 ; Mesnil, 2014), ce qui les empêche de comprendre et reconnaître un raisonnement par l'absurde dans une démonstration mais également de le distinguer d'un raisonnement par contraposition. En effet, comme ils s'appuient sur le repérage de la structure du raisonnement par l'absurde, ils cherchent la négation de la proposition à démontrer, ne la repèrent pas et donc concluent que ce n'est pas un raisonnement par l'absurde. Cette difficulté pourrait être renforcée par les contenus des manuels scolaires qui proposent majoritairement des définitions du raisonnement par l'absurde pour des propositions « quelconques », sans distinguer le cas d'une proposition élémentaire et d'une proposition implicative.

Les connaissances sur le raisonnement par l'absurde entre les élèves de Terminale S et les étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles ne sont pas très différentes. On peut néanmoins relever que les étudiants ont une idée un peu plus précise de la structure d'un raisonnement par l'absurde, sans toutefois parvenir à le formaliser avec des notions et du vocabulaire de logique. Ils connaissent tous des exemples pertinents se démontrant avec un raisonnement par l'absurde et certains parviennent à distinguer un raisonnement par l'absurde d'un raisonnement par contraposition grâce à leur maîtrise de la négation d'une implication.

Des analyses complémentaires sont toujours en cours, notamment l'analyse des questions 2, 3 et 4 à 6. Pour la question 2, nous cherchons à lister et quantifier les exemples proposés par les élèves et les étudiants. Pour la question 3, nous cherchons à analyser plus finement les démonstrations produites par les élèves et leur articulation avec les définitions données à la question 1. Pour les questions 4 à 6, nous cherchons à catégoriser les justifications données par les élèves et les étudiants pour reconnaître un raisonnement par l'absurde et pour le trouver convaincant. Ce travail permettrait, d'une part d'affiner nos premiers résultats qualitatifs et d'autre part d'apporter des données quantitatives, notre échantillon étant assez important (8 classes de TS et 5 CPGE).

Notons que les points de vigilance et les propositions pour l'enseignement que nous avons faites en 2019 suite à l'analyse des manuels scolaires (Gardes & Gardes, 2019) prennent davantage de sens. Il serait ainsi intéressant de les mettre en place réellement dans des séquences d'enseignement et d'étudier les apprentissages des élèves et des étudiants.

## Bibliographie

- Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Université Claude Bernard Lyon 1.
- Bernard, D., Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2018). Le raisonnement par l'absurde. Une étude didactique pour le lycée. *Petit x*, 108, 5-40.
- Deloustal-Jorrand, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Etude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des*

*ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Université Joseph Fourier Grenoble.

- Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, 50, 57-79.
- Gardes, D., & Gardes, M.L. (2019). Le raisonnement par l'absurde à la transition lycée-université. *XXVIe Colloque de la CORFEM*, Strasbourg, France.
- Gardes, D., Gardes, M.-L., & Grenier, D. (2016). Etat des connaissances des élèves de terminale S sur le raisonnement par récurrence. *Petit x*, 100, 67-98.
- Gardies, J. L. (1991). *Le raisonnement par l'absurde*. Paris: PUF.
- Grenier, D. (2015). De la nécessité de définir les notions de logique au lycée. *Repères IREM*, 100, 65-83.
- Lombard, P. (1996). A propos du raisonnement par l'absurde. *Bulletin APMEP*, 405, 445-455.
- Lombardi, H. (1997). Le raisonnement par l'absurde. *Repères IREM*, 29, 27-42.
- Mesnil, Z. (2014). Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation. *XXIe Colloque de la CORFEM*. Grenoble, France.