LE RAPPORT ENTRE DISTANCE ET LONGUEUR : ENJEU DE VOCABULAIRE OU ENJEU DE RAISONNEMENT ?

Aurélie CHESNAIS, Véronique CERCLE, Céline CONSTANTIN, Nathalie DAVAL, Aurélien DESTRIBATS, Sophie DUTAUT, Julie LEFORT, Nazha LAHMOUCHE, Jérémie LEFAUCHEUR, Louise NYSSEN

Résumé. L'atelier visait à mettre en évidence que l'articulation entre les notions de longueur et de distance ne se réduit pas à une « question de vocabulaire », mais suppose un réel travail de raisonnement, source de difficultés pour les élèves et probablement sous-estimé par les enseignants. Nous donnons des exemples de travail possible autour de cette articulation, et montrons qu'il est porteur d'enjeux d'apprentissages cruciaux sur le raisonnement, sur le langage mathématique, mais aussi sur les objets de la géométrie.

Introduction

Notre groupe a travaillé pendant plusieurs années sur les enjeux didactiques et les difficultés de la géométrie repérée, ce qui nous a amenés à nous interroger sur la notion de distance et sur le rôle du langage dans l'activité mathématique et dans l'apprentissage. L'objectif de l'atelier était de montrer comment un regard sur le langage donne un autre point de vue sur le rapport entre le travail du raisonnement mathématique, la compréhension des objets mathématiques, et le rôle du langage mathématique dans le raisonnement et dans l'apprentissage.

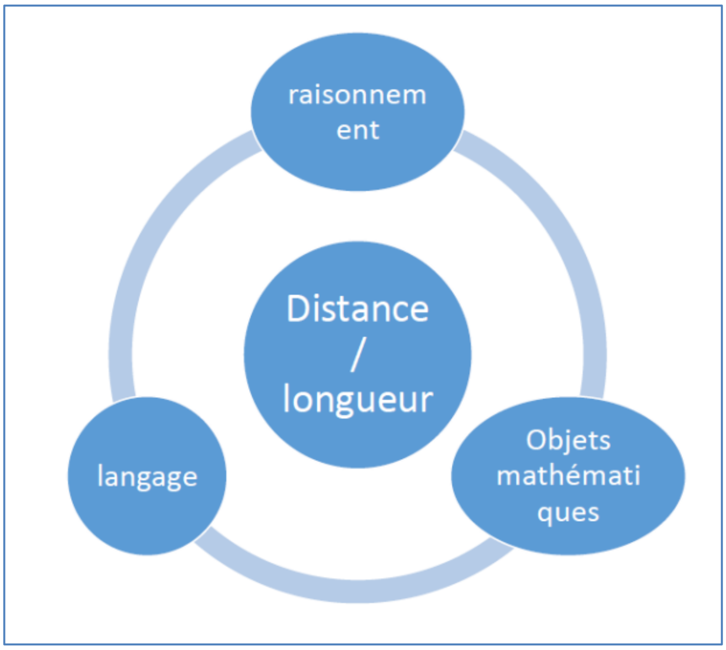


Figure 1– Enjeux de l'atelier

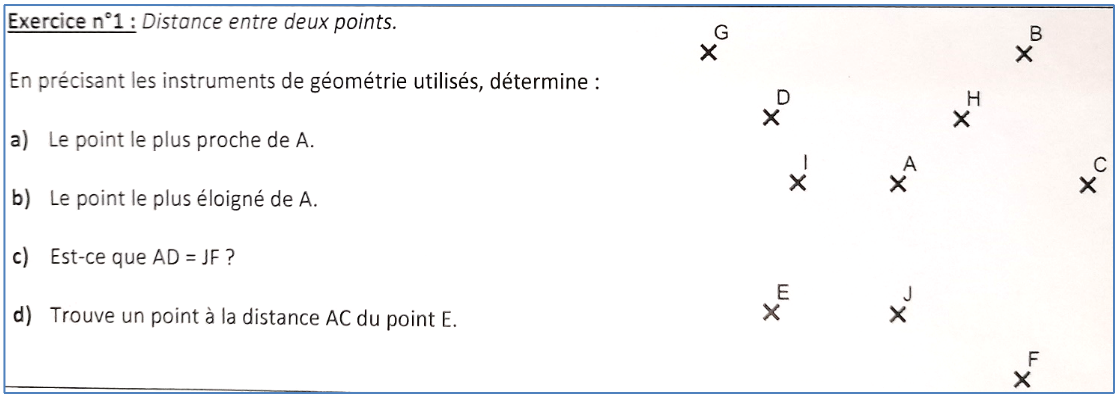
Notre attention s'est portée sur les notions de distance et longueur. En effet, nous pensons que, si pour beaucoup l'emploi de l'un ou de l'autre se résume à une « question de vocabulaire », cela cache en réalité de véritables enjeux mathématiques et didactiques importants, au début du secondaire et jusqu'au lycée.

Notre atelier s'est organisé autour de trois exemples, dans le but de mettre en lumière que le rapport entre distance et longueur est bien porteur d'enjeux multiples autour du raisonnement, du langage et des objets mathématiques : le premier exemple porte sur la notion de distance entre deux points en sixième, le deuxième sur le rapport entre distance et cercles en sixième, le troisième sur les notions de coordonnées, distance et longueur en seconde. Chaque exemple est l'occasion d'illustrer à la fois les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves et les opportunités de les mettre en travail.

La conclusion sera l'occasion de revenir sur les enjeux de formation dévoilés par ce travail : ces enjeux d'enseignement sont souvent transparents pour les étudiants futurs professeurs et la formation doit leur permettre d'en prendre conscience.

Exemple 1 – Distance entre deux points en sixième

Un exercice sur la notion de distance


Exercice n°1 : *Distance entre deux points.*

En précisant les instruments de géométrie utilisés, détermine :

a) Le point le plus proche de A.

b) Le point le plus éloigné de A.

c) Est-ce que AD = JF ?

d) Trouve un point à la distance AC du point E.

Figure 2– Enoncé d'un exercice en sixième sur la distance entre deux points

Cet exercice s'inscrit dans la progression de la classe de sixième comme travail sur la notion de distance, en amont du travail sur la notion de cercle. La notion de distance entre deux points apparaît en effet dans les programmes, dans les « Repères de progressivité » : « Les longueurs : En 6e, le travail sur les longueurs permet […] d'établir la notion de distance entre deux points […]. ».

Nous nous sommes en particulier focalisés, lors de l'atelier, sur la question d) dans laquelle il s'agit de trouver un point à distance donnée d'un autre point.

Le travail des participants à l'atelier a tourné autour des questions suivantes : Quelle est la réponse attendue à la question d) ? Suppose-t-elle un raisonnement ? Quels types d'objets met-elle en jeu ? Quels sont les enjeux langagiers associés et difficultés attendues ?

La discussion a fait apparaître que la réponse attendue est le point *D*, ce que les élèves peuvent établir à l'aide du compas ou avec la règle (en supposant qu'un travail a été fait avant pour que les élèves ne se contentent pas d'une réponse fondée sur une simple estimation visuelle).

En considérant que les élèves doivent mettre en travail la notion de distance entre deux points (et qu'elle n'est pas encore maîtrisée), il apparait qu'établir cette réponse suppose de la part des élèves un raisonnement reposant sur la mobilisation de la définition de la distance entre deux points comme étant la longueur du segment qui joint ces deux points. Elle suppose ainsi d'établir l'équivalence suivante : « Le point *D* est à la distance *AC* du point *E* » est équivalent à « Le segment [*DE*] a la même longueur que le segment [*AC*] » qui fait intervenir l'énoncé tiers : « la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points ».

Notons que ce raisonnement suppose également d'identifier des relations entre des objets de dimension 1 (des segments et leur longueur) et des objets de dimension 0 (des points et la distance entre eux), s'inscrivant ainsi dans un enjeu didactique important en sixième, lié à la déconstruction dimensionnelle des figures. Il nous semble en effet indispensable de considérer que la conception des figures géométriques comme ensembles de points et, de fait, la notion de point elle-même, dans ce type de tâche, n'est pas tout à fait disponible en début de sixième. Elle constitue même un enjeu du cycle 3 au lycée puisque la conception d'une ligne comme un ensemble de points ne peut être achevée qu'avec la mise en bijection de la ligne avec *IR*, en seconde (*cf.* notamment Chesnais et Mathé, 2018, repris également dans Cerclé et al., 2020).

Nous nous sommes ensuite intéressés à la formulation de la réponse, en appui sur des productions d'élèves.

Analyse de quelques productions d'élèves : difficultés langagières

La formulation de la justification (qui était systématiquement demandée aux élèves) de la question d) supposerait *a priori* de répondre en termes de distance entre deux points. Toutefois, au-delà du fait que cette formulation porte sur des éléments de dimension 0 et la notion de distance qui est en cours d'acquisition, elle suppose de fait une construction grammaticale qui rende compte du statut logique des objets : le fait que la distance est une relation entre objets quand la longueur est une propriété d'objet. La réponse suppose de fait de rendre compte d'une relation entre 4 objets : les points *A*, *D*, *C* et *E* dont Vergnaud (1981) pointait la grande difficulté.

Plusieurs formulations correctes et « équivalentes » du point de vue mathématique :

- $DE = AC$ (qui peut s'interpréter comme : la longueur du segment [*DE*] égale la longueur du segment [*AC*] ou la distance entre les points *D* et *E* égale la distance entre les points *A* et *C*).
- La distance de *D* à *E* est égale à la distance de *A* à *C*.
- Le point *D* est à la même distance du point *E* que *A* de *C*.

On notera que les deuxième et troisième formulations supposent des constructions grammaticales relativement complexes en français, du fait qu'elles supposent la prise en charge de relations entre objets (Auger et Chesnais, 2022). La première en revanche est très élémentaire, mais fait appel à une notation qui est en cours d'acquisition chez les élèves ; de plus, elle présente l'intérêt, mais aussi la difficulté, de référer pour les mathématiciens à la fois à la longueur d'un segment et à la distance entre ses extrémités, et elle permet précisément d'éviter de formuler les choses en langage verbal (avec les mots), notamment qui évite l'utilisation du mot « distance » (Chevallard et Johsua, 2003).

L'analyse de productions d'élèves, proposées aux participants, a permis de mettre en évidence plusieurs faits intéressants. Tout d'abord, le fait que les élèves qui produisent une phrase correcte sont ceux qui la formulent en termes de longueur et de segments (*cf.* figure 3).

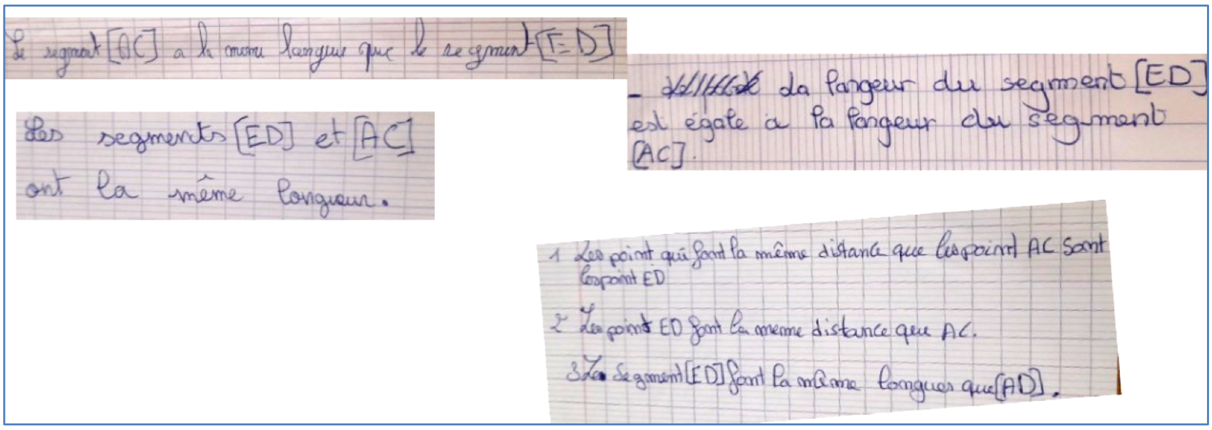


Figure 3 – Productions d'élèves avec une phrase correcte

L'analyse des autres productions d'élèves (cf. figure 4) montre que toute la difficulté de formuler la justification en termes de distance entre des points, à la fois du point de vue de la désignation des objets en lien avec leur notation et de la correction grammaticale de la phrase (sans compter la question de l'orthographe). Certaines erreurs (cf. figure 4) nous paraissent particulièrement révélatrices d'une difficulté à manipuler la notion de distance et en même temps du lien qui est en cours d'élaboration avec la notion de longueur. Nous interprétons notamment ainsi les confusions entre points et segments, mais aussi la confusion entre « a » et « à » ou encore entre les verbes avoir et être comme résultant du fait qu'un segment « a » une certaine longueur (le verbe avoir traduit une propriété de l'objet), quand deux points « sont » « à » une certaine distance l'un de l'autre. On note enfin des difficultés dans les usages des connecteurs « de »[1] et « que » dans l'expression de la relation.

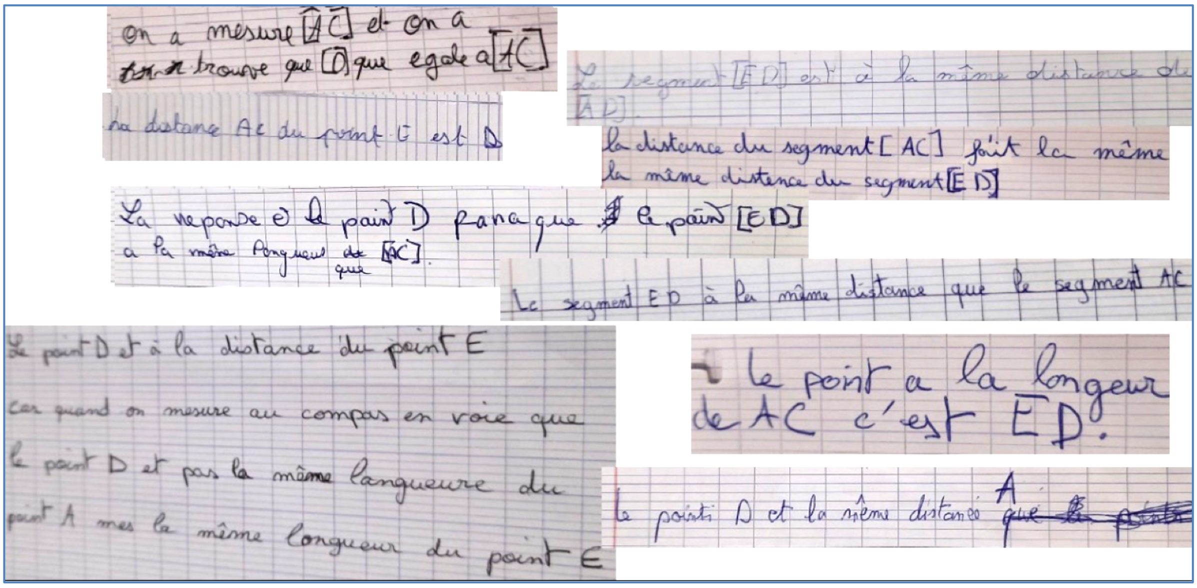


Figure 4 – Productions d'élèves de 6ème contenant une ou plusieurs incorrections

[1] Les difficultés liées aux usages de la préposition « de » ont été documentées plus largement et en lien avec d'autres relations dans Auger et Chesnais (2022).

Ce travail montre que la notion de distance – et y compris la capacité à la manipuler langagièrement – constitue un enjeu d'apprentissage en soi, au regard des enjeux d'apprentissage de la géométrie au début du collège. Cela montre également les difficultés d'apprentissage à prendre en charge par l'enseignement et ce, malgré le fait que la notion de distance soit présente dans les programmes depuis le cours moyen (et qu'elle ait aussi une acception courante dont on peut supposer que les élèves sont familiers, mais c'est là aussi une source de difficulté potentielle (*ibid.*).

Or une étude de manuels de sixième montre que la distance entre deux points est traitée comme un objet supposé être déjà maîtrisé par les élèves. Un seul manuel sur les six consultés introduit explicitement cet objet et en donne une définition. Notons que nous avions déjà montré dans des travaux précédents que la notion de distance n'est pas non plus questionnée en général dans le travail sur la droite graduée (Chesnais et *al.*, 2017 ; Chesnais et Destribats, 2019) : notamment lien entre abscisse et distance à l'origine, entre distance entre points et distance entre nombres.

Cet enjeu est enfin d'autant plus crucial qu'il apparaît comme outil (au sens de Douady, 1984) dans de nombreuses tâches et en lien avec de nombreuses autres notions et ce, tout au long de la scolarité. Nous donnons dans la suite deux exemples en sixième et un exemple en seconde.

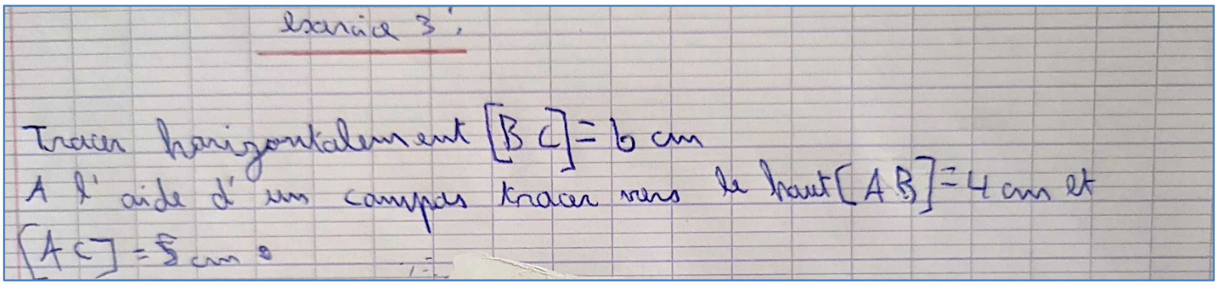
La construction du triangle à partir des longueurs des côtés

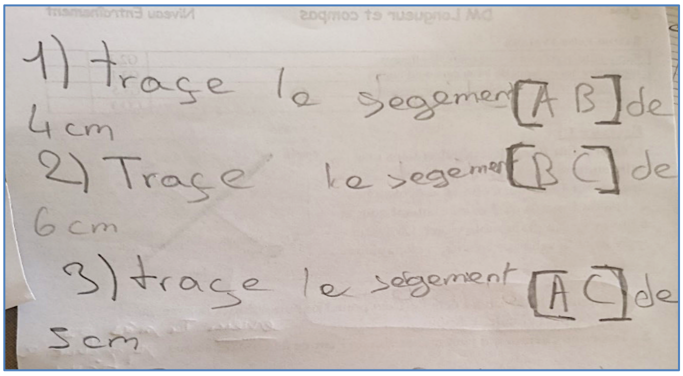
Cette construction, en utilisant le compas, est travaillée dès le cours moyen. Sa justification s'appuie sur la définition du cercle comme ensemble de points à distance donnée d'un point donné. Le fait d'en faire prendre conscience aux élèves (au-delà d'une « méthode pour construire un triangle »), est donné en exemple, dans les programmes du collège, de travail sur le raisonnement :

> Le raisonnement : À partir du CM2, on amène les élèves à dépasser la dimension perceptive et instrumentée pour raisonner uniquement sur les propriétés et les relations. Par exemple, l'usage de la règle et du compas pour tracer un triangle, connaissant la longueur de ses côtés, mobilise la connaissance des propriétés du triangle et de la définition du cercle. […] (MENESR, 2015, p. 212).

Là encore, le rapport entre longueur de segments et distance entre points joue un rôle essentiel puisque le raisonnement attendu suppose d'identifier que construire un segment de telle longueur revient à placer un point à cette distance d'un autre, puis de chercher à placer un point à distance donnée de deux points donnés (obtenu donc comme l'intersection de deux arcs de) cercles) comme extrémité commune de deux segments de longueurs données.

Il nous semble ainsi que l'absence de prise en charge de ce lien en tant qu'enjeu d'apprentissage pourrait contribuer à expliquer les difficultés rencontrées par les élèves à comprendre la construction (et notamment à mobiliser le compas). On voit ainsi par exemple en figure 5 des productions d'élèves de 6ème dans lesquelles les élèves restent sur la construction d'un triangle comme construction de trois segments, sans passer à la construction des points-sommets, et ce, même s'ils évoquent l'utilisation du compas.





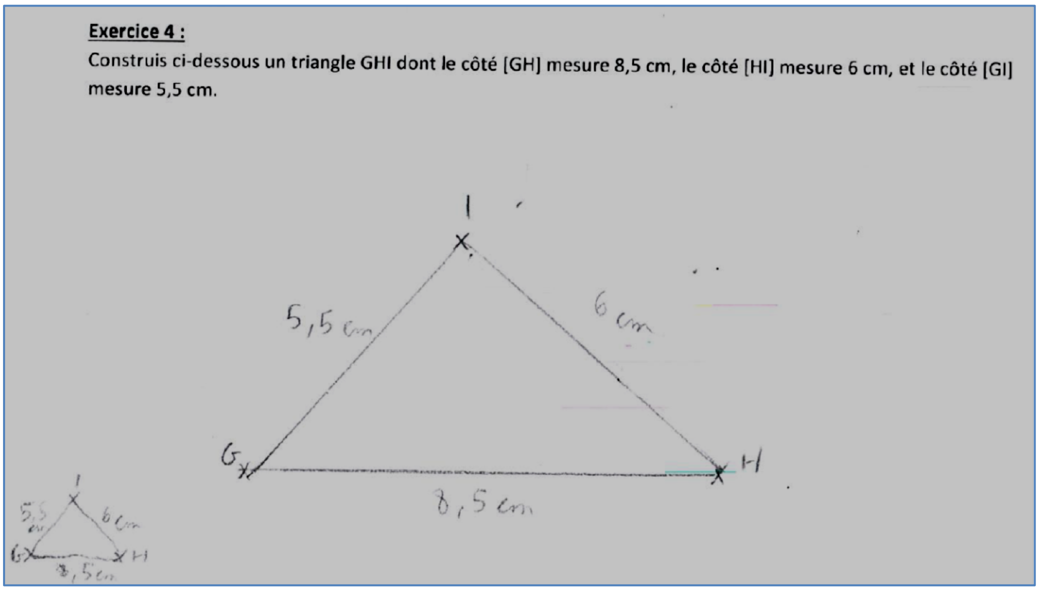


Figure 5 – Productions d'élèves sur la construction d'un triangle à partir des longueurs des côtés

Par exemple, pour la troisième production même si cela n'est pas très visible sur l'image scannée, l'élève a fait plusieurs tentatives de tracés de segments d'extrémité G : l'élève a procédé par approximation. Pourtant dans un autre exercice, on voit que cet élève connait le lien entre le rayon d'un cercle et le fait qu'un point appartenant au cercle est à une distance du centre égale au rayon (voir figure 6).

4. A propos de la figure précédente, Bilal dit que « sans mesurer, on peut savoir que D et C sont à la même distance de M ». es-tu d'accord avec Bilal ? Explique pourquoi.

Oui car D et C sont tout les deux sur le cercle de centre M donc il sont à la même distance

Figure 6 – Production d'un élève dans un exercice de preuve à propos du cercle en 6ème

Nous conjecturons que la difficulté de cet élève vient plutôt de l'absence de mobilisation du pas déductif suivant qui justifie l'utilisation du compas :

GI = 5,5 cm donc I est à 5,5 cm du point G

On reconnaît là l'utilisation de la définition de la distance entre deux points comme énoncé-tiers : « la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points ».

Un échange oral en classe

Nous avons proposé aux participants d'analyser des extraits de transcription d'un échange oral en collectif, dans une autre classe de sixième, dans le cadre d'une tâche similaire, dans laquelle on demande ensuite aux élèves de « trouver tous les points qui sont à la distance EM d'un point E, sans mesurer ». Ces extraits correspondent au début de la phase de mise en commun, après que les élèves ont travaillé sur la tâche individuellement. L'enseignante montre au tableau la production d'une élève qui a tracé des segments joignant E et d'autres points.

P Tu vas expliquer. Vous arrivez à voir ? la première partie, qu'est-ce que tu as tracé ici ?
E1 J'ai pris ma règle et j'ai regardé tous les points qui étaient à 4 cm.
P Tu as regardé, mais qu'est-ce que tu as tracé ?
E J'ai tracé la distance.
P Elle a tracé la distance, est-ce que vous êtes d'accord ? Est-ce qu'on peut tracer une distance ?
Es Non.
Hamza Moi je pense que ça sert à rien.
P Est-ce qu'on trace une distance ?
Es Non.
P Qu'est-ce qu'on trace ?
E Un rayon.
E Segment.
P […] Est-ce qu'on peut dire qu'on a tracé des distances ? Comment on peut corriger ?
Sam Non parce que la distance, c'est l'écartement [fait le signe des guillemets] enfin c'est la longueur qu'il y a entre les deux points.
P C'est la longueur. De quoi ?
E Z et F.
E C'est la longueur du segment.
P C'est la longueur du segment par exemple ZJ.

Cet échange révèle à nouveau les enjeux conceptuels : comprendre qu'une distance est une propriété d'un couple de points, qui correspond à la longueur du segment qui joint ces deux points. Ces enjeux conceptuels sont associés à des enjeux langagiers : on retrouve d'une part la question de la désignation des segments et des longueurs en fonction des points, ainsi que le fait que l'on ne peut pas « tracer » une distance et qu'on ne parle pas de la « longueur entre des points ».

Exemple 2 – Travailler le rapport entre distance entre deux points et cercle en sixième

Un énoncé en sixième

Voici l'énoncé que nous avons proposé dans une classe de sixième ainsi que la figure obtenue par un élève. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés, lors de l'atelier, à la question e.

<u>Énoncé</u>

a) Tracer un segment [AB] de longueur 5,5 cm.

b) Tracer le cercle (C_1) de centre A et de rayon 4 cm.

c) Tracer le cercle (C_2) de centre B et de rayon 3 cm.

d) Nommer D et E les points d'intersection des deux cercles.

e) Quelle est la longueur AD ? Justifier votre réponse.

f) Quelle est la longueur BE ? Justifier votre réponse.

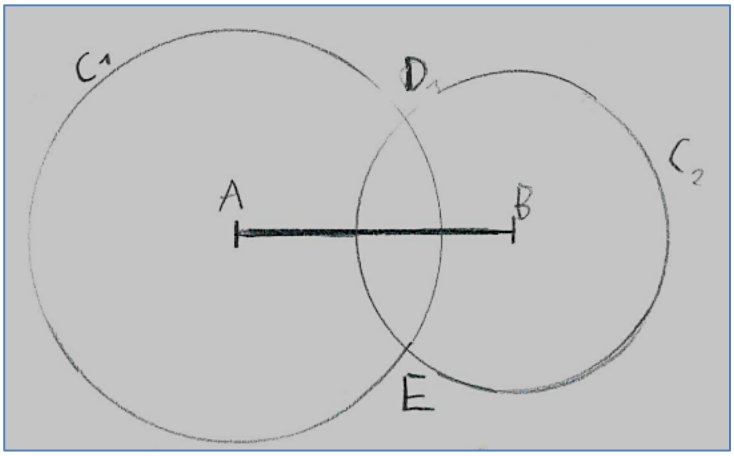


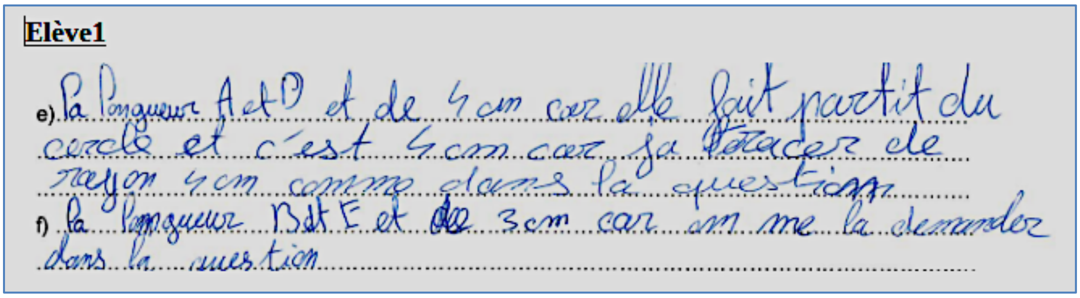
Figure 7– Enoncé de l'exercice et figure produite par un élève de 6ème

Il a été proposé aux participants à l'atelier d'analyser la tâche en cherchant la réponse attendue, se demandant si elle supposait un « raisonnement » (en laissant les participants interpréter à leur façon cette question), ainsi que le type d'objets qu'elle mettait en jeu, les enjeux langagiers associés et les difficultés attendues.

La discussion avec les participants a permis de mettre en évidence que répondre à la question e) supposait un raisonnement (au sens de la production d'un pas de déduction) pour un élève de sixième et que deux raisonnements différents (type 1 et type 2) étaient possibles.

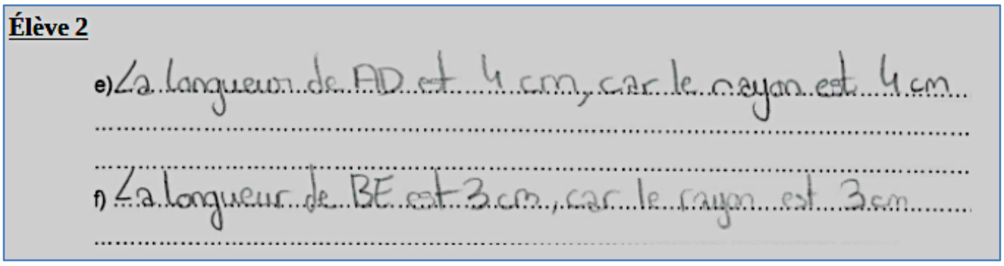
Le raisonnement de type 1 suppose deux pas de déduction. Le premier pas établit, à partir de l'appartenance de D au cercle C_1, que le segment $[AD]$ est un rayon du cercle en s'appuyant sur la définition du rayon d'un cercle, en tant que segment. Le deuxième pas consiste ensuite à appliquer la propriété selon laquelle tous les rayons-segments du cercle ont pour longueur le rayon-mesure[2] du cercle, soit ici 4 cm. Ce raisonnement porte sur des longueurs de segments.

Les productions d'élèves suivantes (figure 8) relèvent de ce raisonnement de type 1, et on peut identifier certaines difficultés liées à sa formulation. Par exemple les expressions « la longueur *A* et *D* » ou « la longueur de *AD* » montrent encore une fois que l'utilisation des notations en même temps que la différenciation et le lien entre les objets segment, points et longueur est en cours d'acquisition.


Elève1

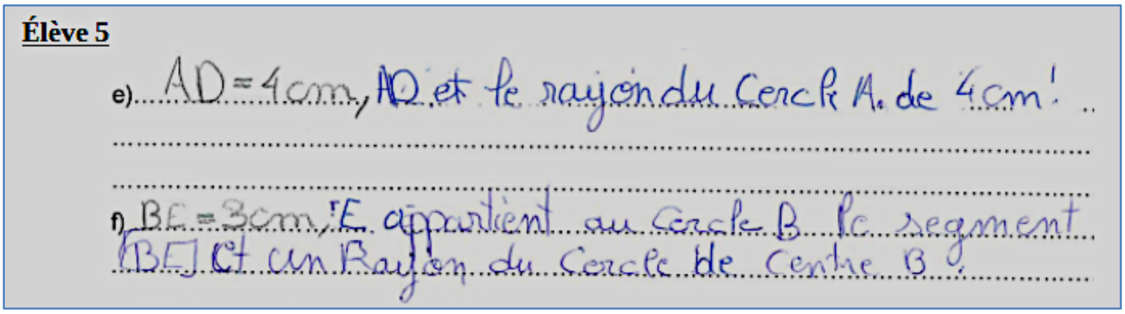
e) la longueur A et D et de 4 cm car elle fait partit du cercle et c'est 4 cm car ja tracer de rayon 4 cm comme dans la question

f) la longueur B et E et de 3 cm car on me la demander dans la question


Élève 2

e) La longueur de AD et 4 cm, car le rayon est 4 cm

f) La longueur de BE est 3 cm, car le rayon est 3 cm


Élève 5

e) AD = 4 cm, AD et le rayon du Cercle A de 4 cm !

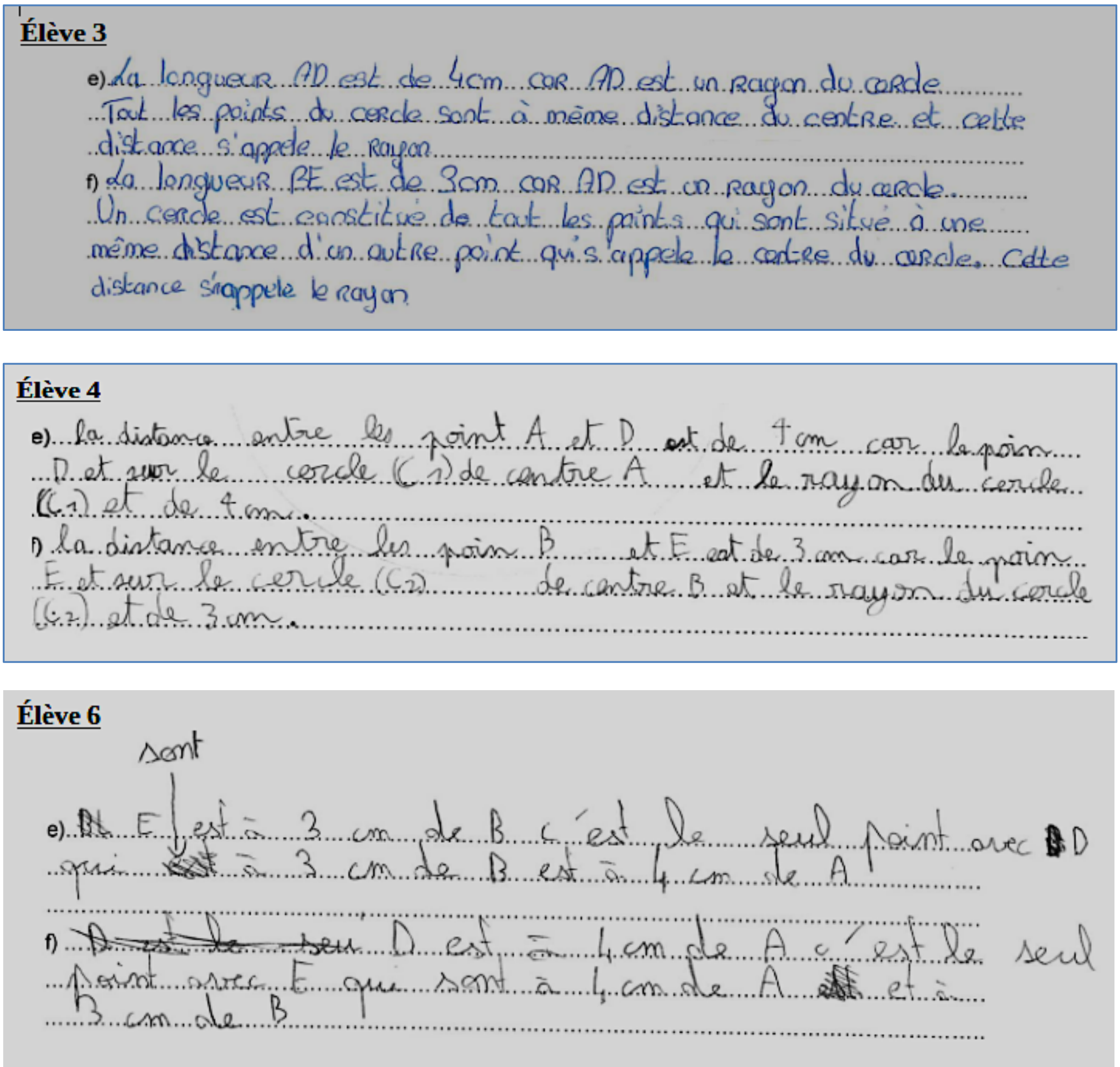
f) BE = 3 cm ; E appartient au Cercle B le segment [BE] et un Rayon du Cercle de Centre B.

Figure 8 – Productions d'élèves avec raisonnement de type 1 en réponse à la tâche de la figure 7

Le raisonnement de type 2 consiste à appliquer au point D appartenant au cercle C_1 la définition du cercle comme ensemble des points à distance donnée (le rayon-mesure) du centre. Ce raisonnement porte sur des distances entre des points.

Les productions suivantes (figure 9) relèvent de ce raisonnement de type 2.

[2] Nous reprenons ici la désignation différenciée des deux sens du mot rayon proposée par Mathé et ses collègues (Mathé, Maillot et Ribennes, 2020) : ils proposent de les désigner par « rayon-segment » et « rayon-mesure ».



Élève 3

e) La longueur AD est de 4cm car AD est un rayon du cercle. Tout les points du cercle sont à même distance du centre et cette distance s'appele le rayon

f) La longueur BE est de 3cm car AD est un rayon du cercle. Un cercle est constitué de tout les points qui sont situé à une même distance d'un autre point qui s'appele le centre du cercle. Cette distance s'appele le rayon

Élève 4

e) la distance entre les point A et D est de 4 cm car le poin D et sur le cercle (C1) de centre A et le rayon du cercle (C1) et de 4 cm.

f) la distance entre les poin B et E est de 3 cm car le poin E et sur le cercle (C2) de centre B et le rayon du cercle (C2) et de 3 cm.

Élève 6

e) ~~B~~ E sont est à 3 cm de B c'est le seul point avec ~~B~~ D qui ~~est~~ à 3 cm de B est à 4 cm de A

f) ~~D est le seu~~ D est à 4 cm de A c'est le seul point avec E qui sont à 4 cm de A ~~et~~ et à 3 cm de B

Figure 9 – Productions d'élèves avec raisonnement de type 2 en réponse à la tâche de la figure 7

Exemple 3 – Coordonnées, distances et longueurs en seconde

Un énoncé en seconde

Cet énoncé est issu du travail fait précédemment par le groupe IREM de Montpellier sur l'enseignement de la géométrie repérée (cf. Chesnais et *al.*, 2019 et Cerclé et *al.*, 2021).

Il s'agit de demander aux élèves de « Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x)=\sqrt{(25-x^2)}$ ». Après clarification du domaine de définition de la fonction et le placement de quelques points (à partir du calcul de l'image de quelques valeurs), les élèves obtiennent une figure du type suivant.

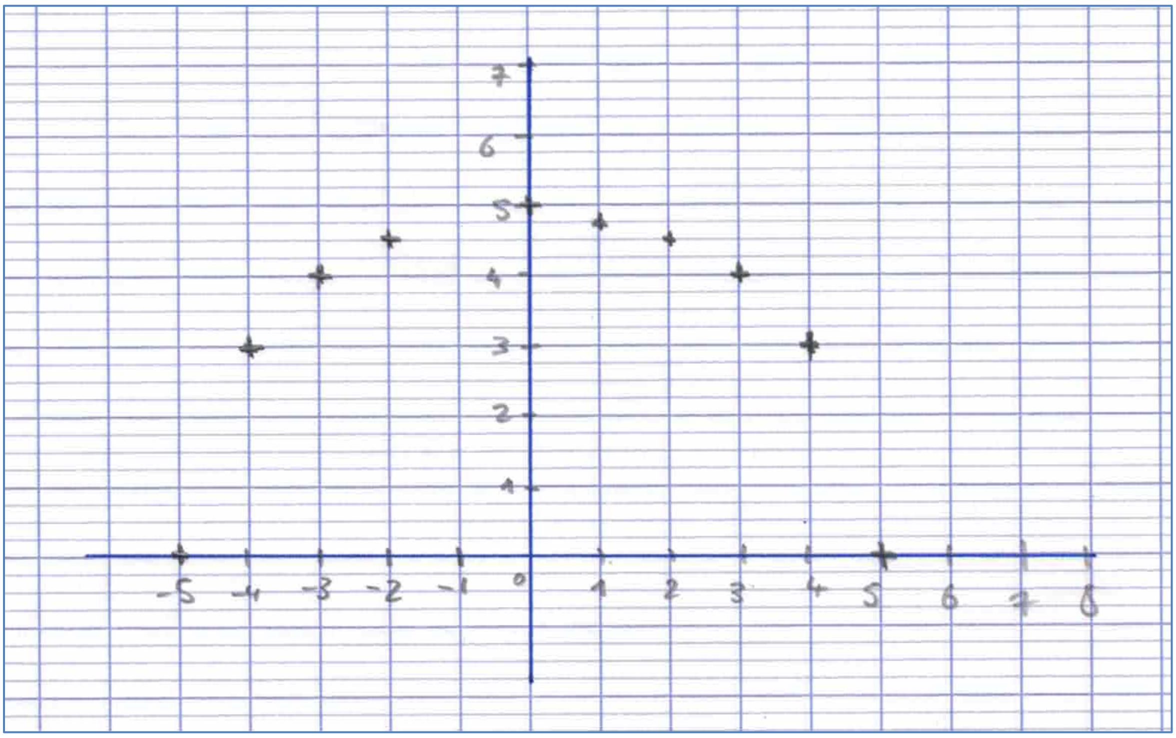


Figure 10 – Dessin produit par un élève en réponse à la tâche

La question qui est alors posée aux élèves est celle de démontrer s'il s'agit d'un demi-cercle ou non. Certains élèves arrivent à déterminer que, pour prouver qu'il s'agit d'un demi-cercle, il faut prouver que la distance de tous les points à l'origine du repère est constante. Un premier extrait vidéo permet de montrer aux participants à l'atelier que les élèves utilisent d'abord la règle (qu'ils font tourner pour mesurer les rayons), puis le compas. L'enseignante relance la recherche en demandant une preuve par le calcul, sachant qu'à ce stade de la progression, les élèves ne disposent pas encore de la formule donnant la distance entre deux points en fonction de leurs coordonnées[3].

Une deuxième vidéo nous permet d'illustrer les difficultés à déterminer la distance d'un des points à l'origine, dans ce cas précis, la longueur *OA*, où *A* a pour coordonnées (4 ; 3). En effet, deux coups de pouce successifs du professeur vont être nécessaires pour débloquer les élèves : tracer « *OA* », puis tracer « ça » où le « ça » est le segment reliant *A* et son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, que nous nommerons ici *H*). Les élèves reconnaissent alors les modalités d'application du théorème de Pythagore du fait qu'un triangle rectangle est rendu visible, mais elles butent sur l'identification des longueurs de ses côtés :

Mathilde	faut prendre Pythagore
Zélia	[elle montre le segment [*OH*]] là y a combien,… y a 4
Mathilde	non y a pas 4 [et elle prend sa règle pour mesurer]
Zélia	ah oui non, y a 3,2 au carré plus [elle mesure l'autre côté] 2,5 au carré

Les élèves continuent à raisonner sur leur dessin, d'abord en s'appuyant sur l'unité donnée par les carreaux de leur cahier, qui ont pour côté 0,8 cm, puis sur un mesurage à la règle.

[3] C'est un choix de l'enseignante de la classe. Il est possible aussi de faire travailler cette situation après avoir traité la formule. On pourra se reporter à Cerclé et *al.* (2021) pour une discussion autour des différents choix et des mises en œuvre possibles de cette situation.

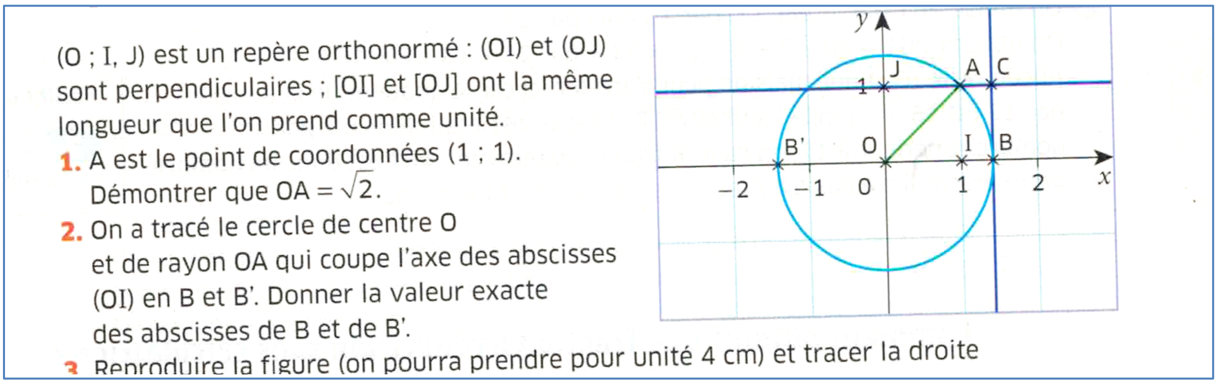
La troisième vidéo montre comment elles prennent conscience que, pour traiter la question, il faut raisonner sur la figure, et donc sur les mesures théoriques (Chesnais et Munier, 2016)[4] des objets représentés :

P	pourquoi vous avez pris 3,2 ? Cette longueur [le prof montre [*OH*]], elle fait combien ?
Mathilde	elle fait … 3,2
P	non.
Zélia	4 ? … 4 ?
P	pourquoi 4 ?
Mathilde	mais non 4 c'est …
Zélia	parce qu'il y a quatre unités
P	et là [le prof montre [*HA*]] il y a combien ?
Mathilde	3 […] 3 parce qu'on a calculé avant.

Ces trois extraits vidéo nous ont ainsi permis de mettre en évidence les deux pas déductifs en jeu ici. Le premier fait appel au rapport entre distance et longueur (*cf.* exemples en 6ème) : « la distance entre les points A et B est la longueur du segment $[AB]$ ». Il a nécessité une aide du professeur pour passer de la distance entre deux points à la longueur du segment, en suggérant d'introduire le segment en le traçant. Le second pas repose sur la propriété suivante, découlant de la définition de l'abscisse d'un point : « sur la (demi) droite graduée, si H a pour abscisse a (positif) alors $d(O\,;H) = OH = a$ ». Nous conjecturons par ailleurs que la connaissance du rapport entre longueur (ou distance) et abscisse d'un point n'est pas disponible, même si elle est mobilisable[5] avec l'aide du professeur.

Longueur, distance, abscisse

Notre conjecture est confirmée par cette production dans un devoir-maison donné quelque temps auparavant dans la même classe de seconde (figure 11).


(O ; I, J) est un repère orthonormé : (OI) et (OJ) sont perpendiculaires ; [OI] et [OJ] ont la même longueur que l'on prend comme unité.

1. A est le point de coordonnées (1 ; 1). Démontrer que $OA = \sqrt{2}$.
2. On a tracé le cercle de centre O et de rayon OA qui coupe l'axe des abscisses (OI) en B et B'. Donner la valeur exacte des abscisses de B et de B'.
3. Reproduire la figure (on pourra prendre pour unité 4 cm) et tracer la droite

Figure 11 – Enoncé du devoir-maison

Une (bonne) élève a produit la réponse suivante (figure 12).

[4] Chesnais et Munier proposent d'appeler « mesure empirique » une mesure obtenue par mesurage, à l'aide d'un instrument sur un dessin et « mesure théorique » la mesure exacte, que l'on peut déduire d'un énoncé ou d'un raisonnement (incluant éventuellement un calcul) sur les propriétés de la figure.

[5] Rappelons que Robert distingue une connaissance « disponible », lorsque l'élève est capable de la mobiliser spontanément dans une situation qui la requiert et une connaissance « mobilisable », lorsque l'élève peut l'utiliser si on le lui indique.

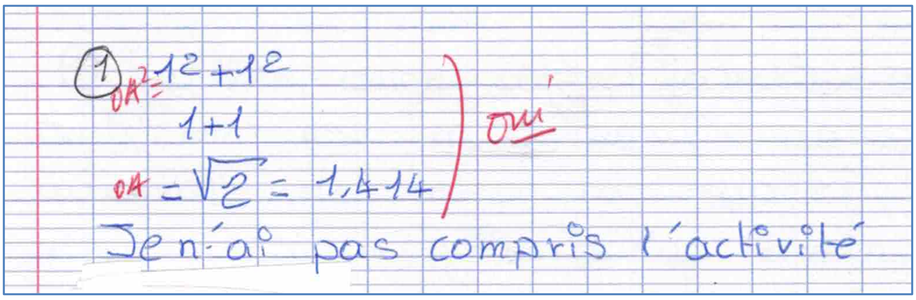

1 $OA^2 = 1^2 + 1^2$
$1 + 1$
$OA = \sqrt{2} = 1{,}414$
Oui
Je n'ai pas compris l'activité

Figure 12 – Production d'une bonne élève dans le devoir-maison

L'élève a bien su calculer la longueur OA. On peut conjecturer que, comme les élèves des vidéos précédentes, elle peut en déduire la longueur OB ([OB] étant un autre rayon du cercle), mais qu'elle ne fait pas le pas déductif qui permet de conclure quant à l'abscisse de B.

Notons que nos travaux précédents avaient déjà permis de mettre en évidence cette difficulté chez les élèves dans la conceptualisation de la notion d'abscisse (comme correspondant à une distance), ainsi que la sous-estimation de cet enjeu d'apprentissage, dans les programmes et les manuels au collège (Chesnais et Destribats, 2016, Cerclé et *al.*, 2020, 2021).

Des enjeux de formation

Des connaissances et un raisonnement transparents

Lors d'une séance de formation de M1 MEEF Mathématiques (avec des étudiants se préparant à passer le CAPES de mathématiques), on a proposé aux étudiants d'analyser l'exercice suivant (figure 13) en y cherchant quels pouvaient être les enjeux d'apprentissage en les reliant aussi à des enjeux plus globaux de l'enseignement de la géométrie au collège, ainsi que les réponses possibles des élèves et leurs difficultés éventuelles.

Partie n°1

Sur le nuage de points ci-dessus,

a) Trouver la distance entre les points Z et C.

b) Repasser en rouge les points situés à la distance ZC du point Z.

c) Placer 10 points à la distance ZC du point Z (il n'est pas nécessaire de les nommer).

Figure 13 – Situation du nuage de points

Un étudiant dit :

> Par exemple, la question a, je pense ils vont quand même le faire, ils vont prendre *Z* et *C*, ils vont mesurer avec la règle, ah ça fait 4 cm. Ça je pense globalement que ce sera réussi, parce qu'en sixième, le segment…

Cette intervention révèle bien que, pour l'étudiant, le lien entre distance, longueur et segment est totalement évident, et qu'il considère que cela doit l'être, y compris pour un élève de sixième ; cela ne constitue donc pas pour lui un enjeu d'apprentissage. Par ailleurs, le même étudiant a été filmé en classe (dans le cadre d'un stage) sur la situation du demi-cercle (*cf.* notre exemple 3 ci-dessus). La vidéo montre que, face aux difficultés rencontrées par les élèves pour identifier les distances en jeu, pour lui, là encore, il est évident que la longueur *OH* est x : il n'explicite pas qu'il y a un passage de l'abscisse de *H* à la distance entre *O* et *H*, puis à la longueur *OH*. Ce pas déductif est transparent. Notons qu'il traite aussi comme étant évident le fait que la longueur *HA* est $f(x)$.

Nous soutenons qu'il y a donc là, autour du lien entre distance et longueur, des enjeux de formation relevant des contenus mathématiques eux-mêmes et des connaissances didactiques associées en ce qui concerne les trois pôles suivants : le raisonnement déductif, le langage et les objets mathématiques eux-mêmes.

Les enjeux langagiers autour de distance / longueur

Du point de vue des enjeux langagiers, il s'agit de favoriser un processus de « dénaturalisation »[6] des connaissances et du langage mathématiques nécessaires à

[6] Robert et *al*. (2012) qualifient par ce terme le fait de « faire prendre conscience que ce qui est devenu naturel pour l'enseignant, qui lui paraît évident, ne l'est pas (encore) pour les élèves » (p. 79), ce caractère évident rendant souvent transparents ou invisibles certains enjeux d'apprentissages pour les enseignants, sources alors de difficultés pour les élèves (p. 12).

l'activité d'enseignant. Pour ce qui concerne le langage, il s'agit de faire prendre conscience aux étudiants de la complexité des formes langagières mathématiques expertes, ainsi que du rôle qu'elle peut jouer (comme difficulté et comme levier) dans l'apprentissage, enfin de l'importance du travail langagier dans l'apprentissage des mathématiques (Chesnais, *à paraître*).

Dans le cas du rapport entre distance et longueur, plus précisément, on peut ainsi pointer la nécessité d'identifier des enjeux liés à l'analyse logique du langage, c'est-à-dire à la prise en charge dans le langage du statut logique des énoncés, du nombre et de la nature des objets en jeu dans un énoncé, des propriétés de ces objets et de leurs relations entre eux (Vergnaud, 1990, Durand-Guerrier, 2013, Barrier, Durand-Guerrier et Mesnil, 2018, Barrier, Chesnais et Hache, 2014). Il s'agit notamment, du point de vue du langage, de dépasser la question du lexique pour s'intéresser aux constructions syntaxiques, comme les usages de la préposition « de » (Auger et Chesnais, 2022).

La question de l'« erreur de catégorie »[7] en particulier, est intéressante : par exemple, pour ce qui nous intéresse ici, parler de longueur d'un point (ou d'un couple de points) ou de distance d'un segment. Ces erreurs témoignent d'une étape de l'apprentissage : les élèves commencent à utiliser de nouveaux mots mais sans en maîtriser encore les usages. Explorer ces usages constitue un des éléments essentiels du processus de « secondarisation des discours »[8], c'est-à-dire du processus d'évolution des discours qui accompagne l'apprentissage.

Les enjeux didactiques autour du raisonnement

Un travail en formation d'enseignants autour du raisonnement semble indispensable pour permettre, là encore, aux étudiants, de dépasser leur propre maîtrise des raisonnements dans le cadre de leur propre activité mathématique pour aller vers une « dénaturalisation », incluant une prise de conscience et de distance, nécessaire à l'enseignement.

Il nous semble notamment nécessaire de travailler en formation la notion de démonstration mathématique comme fondée sur des pas déductifs. Nous nous intéressons ici plus spécifiquement à des pas déductifs qui s'appuient sur des « énoncés-tiers » (Duval, 1992-93) quantifiés universellement que l'on instancie à un cas particulier. Ici, l'énoncé tiers est « pour tous points X et Y, la distance entre les points X et Y est égale à la longueur du segment $[XY]$ ». Dans un tel énoncé, les lettres X et Y représentent des points quelconques (ce sont en réalité des variables libres mutifiées par le quantificateur), qu'on peut remplacer par les points A et B de l'exercice ou par d'autres points singuliers : ce changement de statut des lettres lors de la substitution est souvent transparent (d'autant plus lorsque les lettres utilisées pour l'énoncé tiers dans sa formulation générale sont les

[7] En appui sur le travail du philosophe Ryle, on appelle erreur de catégorie ce qui consiste à ranger un terme dans une catégorie qui ne lui correspond pas. (https://fr.wikipedia.org/wiki/Gilbert_Ryle, consulté le 2 janvier 2022).

[8] Cette notion vient des travaux de linguistes et didacticiens du français (Jaubert, Rebière et Bernié, 2012) et a été reprise ces dernières années en didactique des mathématiques par différents auteurs (Chesnais et Coulange, 2022). Les auteurs qualifient ainsi l'évolution de discours au cours du processus d'apprentissage vu comme insertion progressive dans une communauté discursive. Ils s'appuient pour cela sur la distinction faite par Bakhtine entre discours de genre premier et de genre second. Le processus identifie l'évolution du langage lors du processus d'apprentissage comme une évolution de discours fortement liés à l'action, au contexte de l'échange et à une appréhension « première » des objets à partir de connaissances précédentes voire de connaissances quotidiennes, vers des discours de « genre second », qui réélaborent l'action et les objets, les mettent à distance avec une forme de réflexivité selon des normes et conventions plus proches de celles de la discipline, correspondant ainsi à une appréhension « plus scientifique » des objets.

mêmes que celles du cas particulier auquel on l'instancie), et peut donc représenter un obstacle pour les élèves, invisible (ou non conscientisé) pour le professeur.

Ce travail de clarification permet d'insister à la fois sur la quantification universelle de l'énoncé-tiers (travail sur le statut logique des énoncés, sur les différentes façons de formuler ces énoncés-tiers), et sur l'instanciation de cet énoncé-tiers au cas particulier de l'exercice (travail sur la substitution).

Cette prise de distance doit permettre aux étudiants de devenir capables d'expliciter les raisonnements attendus par les élèves et d'analyser ceux – souvent imparfaits – produits par ceux-ci. Il s'agit également de leur faire prendre conscience que certains pas déductifs sont nécessaires à expliciter à un certain niveau, puis ne le sont plus à un niveau ultérieur. Le pas déductif articulant distance et longueur dans les raisonnements présentés dans l'atelier en est un bon exemple.

Les enjeux didactiques autour des objets mathématiques

Le travail mené lors de l'atelier a permis de mettre en évidence certains enjeux liés à l'apprentissage de la géométrie, en particulier la question de la « déconstruction dimensionnelle des figures » (Duval, 2005).

L'identification des enjeux d'apprentissage liés à la conception des figures géométriques comme ensembles de points, notamment du lien entre lignes – objets de dimension 1 – et points – objets de dimension 0 – au collège et jusqu'au début du lycée nous semble constituer un enjeu de formation majeur. Il s'agit notamment d'identifier les difficultés liées à la conception d'un cercle comme ensemble de points, mais aussi le fait qu'un segment est défini (et donc, désigné par) ses extrémités, de même qu'un polygone est désigné par ses sommets. Il s'agit également de faire le lien avec la maîtrise des nombres, dans le cadre du travail en géométrie repérée, d'abord avec la demi-droite graduée et l'introduction des décimaux et rationnels, puis le repère, enfin la droite numérique (droite comme ensemble continu de points, en bijection avec IR) au lycée.

Enfin, un autre aspect conceptuel des objets mathématiques qui peut également être travaillé à l'occasion du travail sur les notions de distance et longueur est la distinction entre les objets, les grandeurs et les mesures, qui est, elle aussi, associée à des enjeux de langage relevant des « erreurs de catégories ».

Conclusion

Nous espérons que l'atelier a permis de mettre en évidence le fait que la distinction et l'articulation entre distance et longueur constituent des enjeux didactiques importants au début du collège et même au-delà, en lien avec des enjeux de raisonnement, de langage et conceptuels.

Nous espérons par ailleurs avoir montré qu'une entrée par les questions de langage peut permettre de renouveler un certain regard sur ces enjeux, pour les formateurs comme pour les formés.

Nous considérons en effet que ces enjeux sont cruciaux en formation et permettent de (re-)travailler à la fois les contenus mathématiques eux-mêmes et les connaissances didactiques afférentes à ces contenus et nécessaires aux enseignants, comme en témoignent certaines productions d'étudiants-professeurs, que nous avons montrées en clôture de l'atelier et qui témoignent que certains d'entre eux produisent des erreurs proches de celles d'élèves de collège.

Références

Auger, N. et Chesnais, A. (2022). Enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques et plurilinguisme. In P. Escudé, C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.). *Plurilinguisme et mathématiques*. Editions Lambert Lucas.

Barrier, T. Chesnais, A. & Hache, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – revue de recherches en éducation*, 54,175-193.

Barrier T., Durand-Guerrier V. & Mesnil Z. (2019). « L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques », *Éducation et didactique*, 13-1, p. 61-81. URL: http://journals.openedition.org/educationdidactique/3793.

Cerclé, V., Chesnais, A. et Nyssen, L. (2020). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x, 113*, 59 à 88. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/113x4_1633083537539-pdf.

Cerclé, V, Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S., Gosselin, E., Leberre, J. et Nyssen, L. (2021). Le repérage au collège et au lycée : des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (deuxième partie), *Petit x, 115*, 29-63.

Chesnais, A., Destribats, A., Dutaut, S. & Herrmann, E. (2018). La géométrie dans le cadre repéré : une occasion de travailler les liens entre objets géométriques, grandeurs et nombres. *Atelier au XXIIIe colloque CORFEM*, Nîmes, 10-11 juin 2016. http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_01.pdf (consulté le 15/11/20).Chesnais, A. et Destribats, A. (2019). Construire le repère cartésien comme objet mathématique au collège. Atelier au colloque de la *COmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques* (Bordeaux, 2018).

Chesnais, A. (à paraître). Actions de formation concernant le rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.

Chesnais, A. & Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques, *Revue française de pédagogie, 214*, 85-121.

Chesnais, A. et Mathé, A.-C. (2018). Construire les objets élémentaires de la géométrie, de l'école au lycée : une cohérence possible ? *Conférence donnée au XXVème colloque de la COmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques (Bordeaux, 11 et 12 juin 2018).*

Chesnais, A. & Munier, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. In Mathé A.-C. et Mounié E. *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2014-2015*.

Chevallard, Y. et Johsua, M.-A. (2003). Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3/2*., p. 159-239.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des mathématiques, 7.2*, 5-32. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Durand-Guerrier, V. (2013). Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques. In Alain Bronner et al. (Ed.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 233-265). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives, 10*, 5-55.

Duval R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Jaubert M., Rebière M. & Bernié J.-P. (2012). « Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l’hypothèse énonciative » - in : forumlecture.ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf.

Mathé, A.-C., Maillot, V., Ribennes J. (2020). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2, *Grand N, 108*, p. 27-58.

MENESR. (2015). Programmes pour les cycles 2, 3 et 4. Ministères de l’éducation nationale, de l’enseignement supérieur et de la recherche.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Berne : P. Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3)*, 133-170.