« Ceci n'est pas un cercle ». Remarques historiques et philosophiques sur les raisonnements par l'absurde

David Rabouin
SPHERE, UMR 7219, CNRS-Univ. Paris Cité & ERC Philiumm (Adg n°101020985)

Introduction

Longtemps, on a répété que ce qui distinguait les mathématiques qui se déploient dans la tradition « grecque », par différence avec ce qui existe dans les traditions « babylonienne », « chinoise » ou « indienne », était l'existence de démonstrations. Beaucoup a été fait ces dernières années pour déboulonner ce mythe, à la fois en rappelant que dans les traditions présentées comme « algorithmiques[1] », les acteurs peuvent éprouver le besoin de démontrer la correction des algorithmes ; mais aussi en insistant sur le fait que les normes attachées à ce qui fait preuve en mathématiques sont très variables à travers le temps et l'espace, de sorte que nous avons moins affaire à des séparations nettes qu'à un continuum de pratiques variées. Ainsi, il n'est pas clair qu'un ouvrage comme la Géométrie (1637) de Descartes, qui a pourtant changé la face des mathématiques, comporte quelque chose comme des « démonstrations » (on y trouve surtout la solution de certains problèmes comme le fameux « problème de Pappus »). De même, le grand texte où Leibniz introduit son calcul différentiel, la *Nova methodus pro maximis et minimis* (1684), ne comporte pas le début d'une preuve, pas plus que les *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* (1827) de Gauss – sauf si l'on accepte justement d'intégrer aux sens du mot « preuve » le fait de montrer par le calcul tel ou tel résultat.

Au titre des ouvrages qui ont contribué à cette révision historiographique, on peut mentionner le volume dirigé par Karine Chemla : *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions* (Cambridge University Press, 2012). Or un trait frappant de cet ouvrage, qui va m'intéresser plus particulièrement dans cet article, est qu'il n'y est pas question des preuves par l'absurde, alors même qu'il entend réviser l'historiographie des preuves dans l'Antiquité. Si ce trait est frappant, c'est que les preuves par l'absurde tiennent une place de première importance dans les mathématiques grecques anciennes. Comme l'avançait Michel Chasles dans son *Aperçu historique* :

> Euclide introduisit dans les élémens de Géométrie, la méthode appelée *Réduction à l'absurde*, qui consiste à prouver que toute supposition contraire à une proposition énoncée conduit à quelque contradiction ; méthode utile surtout dans les questions où l'infini se présentait sous la forme des irrationnelles, dont Archimède dans plusieurs de ses ouvrages, et Apollonius dans son 4e livre des coniques, ont fait un usage heureux[2].

[1] Voir notamment les commentaires de Karine Chemla dans *Les Neuf Chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Édition critique bilingue traduite, présentée et annotée par Karine Chemla et Guo Shuchun, Calligraphies originales de Toshiko Yasumoto, Paris, Dunod, 2004.

[2] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, Hayez, 1837, p. 9.

L'importance des preuves par l'absurde dans les mathématiques grecques anciennes peut s'apprécier à la fois quantitativement et qualitativement. Quantitativement, puisque près de la moitié des démonstrations du livre III des *Eléments* d'Euclide est produite *per absurdum*[3]. Plus généralement, les preuves par l'absurde tiennent une place très grande dans les mathématiques grecques classiques, jusqu'à occuper, comme le rappelle Chasles, l'intégralité du livre IV des *Coniques* d'Apollonius. Qualitativement, puisque ce type de preuve est au cœur des méthodes plus tard appelée « d'exhaustion », elles-mêmes voie royale pour la maîtrise des processus infinitaires dans ces mathématiques. Et c'est ici la référence à Archimède qui s'impose sous la plume de Chasles. Aussi ne paraît-il pas exagéré de parler à ce titre non seulement d'un joyau des mathématiques grecques, mais aussi d'un joyau qui leur appartenait en propre et qu'ils nous ont légué.

C'est un trésor dont les philosophes sont d'autant plus friands que les premières traces connues que nous ayons de ce raisonnement remontent aux *Eléates* et notamment à ces fameux « paradoxes » par lesquels Zénon entendait démontrer l'impossibilité du mouvement[4]. Ainsi s'y manifeste pleinement cette interaction si forte des mathématiques et de la philosophie, qu'il ne faut pas surestimer, mais qu'il ne faut pas sous-estimer non plus[5]. Or pour cette raison même, ce joyau est aujourd'hui un peu embarrassant, dans son écrin de discussions philosophiques que les mathématiciens préfèreraient parfois tenir à l'écart. Comme une bague de grand-mère qu'on garderait jalousement au fond du coffre parce qu'on sait qu'elle est précieuse, mais qu'on hésiterait à mettre au doigt. C'est cet embarras dont je voudrais faire le motif d'un cheminement historico-philosophique en compagnie de l'absurde en mathématiques.

Dans la première partie de cette étude, je repartirai de ces discussions philosophiques et insisterai sur la manière dont elles influencent notre regard sur les preuves par l'absurde jusqu'à aujourd'hui. Puis j'expliquerai pourquoi ce regard projette sur l'histoire des éléments qui ne semblent pourtant pas pouvoir tenir ensemble. Sur cette base, je me tournerai alors vers la période où nous possédons les critiques les plus claires sur les raisonnements par l'absurde, l'âge classique, pour en élucider quelques ressorts méconnus. Ceci me permettra pour finir de revenir aux géomètres grecs anciens en indiquant la manière dont on réévalue aujourd'hui leur rapport aux représentations mathématiques, précisément en insistant sur ce qui se joue dans les démonstrations par l'absurde.

1. Trois motifs de rejet des preuves par l'absurde

J'ai dit que le raisonnement par l'absurde était aujourd'hui un héritage un peu embarrassant, pourquoi ? Principalement pour trois raisons qui ne sont pas sans lien les unes avec les autres. 1) La première est que nous ne pouvons pas ignorer les critiques dont il a été l'objet du fait de son caractère « indirect ». Il suppose, en effet, un détour qui

[3] B. Vitrac, « Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide : inventaire, formulation, usages », conférence disponible en ligne (consulté le 15 avril 2023) : https://hal.science/hal-00496748v2/file/Les_dA_monstrations_par_l_absurde.pdf.

[4] Comme l'on sait, la version la plus ancienne de ces paradoxes nous est préservée au livre VI de la *Physique* d'Aristote. Du point de vue qui nous occupe ici, il serait plus correct de dire que Zénon n'entendait pas formuler quelque « paradoxe » lié au mouvement, mais souhaitait prouver l'immobilité de l'être, mise en avant par Parménide, et qu'il le fit en supposant que quelque chose n'était pas immobile et que cela conduisait à des absurdités.

[5] Pour un exemple de démonstration par l'absurde chez Platon, voir J.-L. Gardies, *Le raisonnement par l'absurde*, Paris, PUF, 1991, p. 151-153.

ne va pas de soi : passer, pour établir la vérité d'une proposition, par sa négation (dont on entreprend d'établir l'absurdité)[6]. 2) La seconde raison, un peu différente mais liée, est que les démonstrations par l'absurde ne nous font pas comprendre *pourquoi* les choses sont telles qu'elles le concluent[7]. Que le contraire d'une proposition soit absurde ne paraît pas pouvoir m'*expliquer* pourquoi la proposition de départ était vraie, même si elle peut éventuellement m'en convaincre[8]. 3) Finalement, les raisonnements par l'absurde ont ceci de singulier, comme leur nom le rappelle, qu'ils nous demandent de prendre comme hypothèse de départ quelque chose d'impossible. Parfois nous ne le savons pas encore et la situation peut sembler moins choquante. Mais souvent, nous le savons déjà et une interrogation ne peut manquer d'émerger alors : est-ce que nous ne plaçons pas ainsi en dehors du monde mathématique, dans un royaume absurde dont les lois ne sauraient être les mêmes que celle du monde (supposé cohérent) des mathématiques ? N'y a-t-il pas d'ailleurs un danger à faire ainsi entrer le contradictoire dans nos raisonnements, à ouvrir la porte vers ce monde hors de la raison et du sens ?

Pour ne pas rester trop dans l'abstraction et montrer que ces réticences ne sont pas cantonnées à des options philosophiques qui pourraient paraître exotiques aux mathématiciens, commençons par prendre un exemple simple d'un tel raisonnement dans les mathématiques actuelles. Soit donc à démontrer que le centre d'un *p*-groupe ne peut être réduit à l'unité[9]. Par définition d'un *p*-groupe, l'ordre de ce groupe (le cardinal de l'ensemble sous-jacent) est une certaine puissance d'un nombre premier p et par le théorème de Lagrange, toutes ses classes de conjugaisons (dont le centre du groupe) devront être des diviseurs de cet ordre. Si le centre est réduit à l'unité, donc de cardinal 1, on obtient la formule des classes suivantes – où p^n à gauche est l'ordre de notre *p*-groupe et où les p^i à droite les cardinaux des classes de conjugaison (en nombre fini) :

$$p^n = 1 + p^r + p^s + p^t + \ldots + p^u$$

Mais une telle égalité est évidemment absurde puisque p divise le membre de gauche sans diviser le membre de droite. Donc le centre ne peut être réduit à l'unité.

J'ai choisi ce premier exemple à la fois parce qu'il s'agit d'une propriété qui n'est pas nécessairement « évidente » pour tous les lecteurs et qu'on se trouve donc embarqué à écrire une formule qui a priori renvoie bien à quelque chose (les classes de conjugaison d'un groupe). Elle joue donc le rôle d'une représentation, qui a tous les airs d'une représentation ordinaire, mais qui s'avère, au bout de la preuve, ne représenter… « rien ».

---

[6] Sous sa forme canonique, un raisonnement par l'absurde commence par supposer la négation de la proposition à démontrer et en dérive une contradiction, ce qui indique que cette négation est fausse. Pour pouvoir conclure, il faut donc accepter que la fausseté de la négation d'une proposition est logiquement équivalente à la vérité de la proposition (loi de la double négation) ou encore qu'une proposition ne peut être que vraie ou fausse (loi du tiers exclu). Ces deux principes sont contestés par les intuitionnistes, ainsi que par différentes formes de constructivisme. De ce qu'on a établi l'absurdité de la négation d'une proposition, avancent-ils, on ne peut pas conclure qu'on a établi que cette proposition était *donc* vraie. Il se pourrait que cette alternative soit mal posée ou qu'elle n'ait pas de sens.

[7] Ainsi des auteurs comme Bolzano et Frege, qui n'ont pas de problème avec le tiers exclu, refuse-t-il les preuves par l'absurde non parce qu'elles seraient invalides, mais parce qu'elles sont incapables de donner la raison (*Grund*) de ce qu'elles démontrent, cf. P. Mancosu, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, New York, Oxford University Press, 1996, chap. 4.3.

[8] Comme l'avance une lettre (vraisemblablement fictive, mais éditée dès le XVIIème s.) du Chevalier de Méré à Pascal : « Croyez-vous que ce soit connaître une chose que de savoir seulement ce qu'elle n'est pas ? » (*Lettres de Monsieur le chevalier de Méré. Première partie*, Paris, chez Claude Barbin, 1682, lettre XIX, p. 110-126).

[9] Le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in G$ tels que pour tout élément du groupe $x \in G$, on ait $yx = xy$.

Par la suite, je reviendrai sur le rôle de ces représentations « absurdes », qui ont été surtout étudiées du point de vue des diagrammes géométriques, alors que les mêmes résultats s'appliquent aisément aux formules symboliques[10].

Des démonstrations de ce type se trouvent bien évidemment en mathématiques dès les cas les plus élémentaires, par exemple lorsque l'on entreprend de démontrer que deux nombres réels a et b non nuls (plus généralement deux éléments inversibles d'un corps) ne peuvent être tels que l'on ait $ab = 0$. Pour cela, on suppose que $ab = 0$ avec a et b non nuls, puis on divise le produit ab (qui vaut 0 par hypothèse) par b supposé non nul, ce qui nous donne $a = 0$. Ceci contredit l'hypothèse (a et b non nuls), qui s'avère donc impossible à soutenir.

Présentant cet exemple à une étudiante à l'université (familière des démonstrations mathématiques sans être étudiante en mathématiques elle-même), Antonini et Mariotti ont recueilli les réactions suivantes : a). Pour effectuer une démonstration de ce type, je dois faire un détour par un monde absurde où une proposition que je sais vraie est niée ; tout se passe comme si les éléments a et b pouvaient voyager du monde réel au monde absurde ; b). une difficulté est que nous ne savons pas si les lois de la logique sont les mêmes dans le « monde absurde », si ce voyage des éléments est possible[11]. Le détour par le monde absurde paraît donc particulièrement périlleux. Il semble reposer sur une *croyance* que nous avons du mal à justifier (pourquoi les lois de la logique vaudraient-elles encore dans ce monde illogique ?).

Nous retrouvons ici le ressort des critiques 1 et 3. La démonstration indirecte nous force à passer par un monde qui a la caractéristique paradoxale d'être à la fois « absurde », « atopique » (*atopon* est le mot que les géomètres grecs utilisaient régulièrement pour qualifier l'absurdité d'un résultat), et de se comporter pourtant comme une simple image en miroir, symétrique de notre monde « réel ». Mais un monde « atopique » est littéralement « sans lieu », il ne représente « rien » et ne saurait s'obtenir comme simple image en miroir de ce qui « a lieu ».

Une formulation philosophique de ce malaise a très bien été exprimée par Wittgenstein dans ses *Remarques sur les fondements des mathématiques* :

> La difficulté que l'on ressent en mathématique avec la *reductio ad absurdum* est la suivante : que se passe-t-il avec cette preuve ? Quelque chose de mathématiquement absurde, et donc de non-mathématique ? Comment peut-on tout simplement accepter – a-t-on envie de demander – quelque chose de mathématiquement absurde ? Que je puisse accepter ce qui est physiquement faux et le réduire *ad absurdum* ne me donne aucune difficulté. Mais comment penser l'impensable, pour ainsi dire ? (L. Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*[12])

On pourrait également rappeler ici la formule célèbre du mathématicien Hardy affirmant que le raisonnement par l'absurde est bien plus subtil que tous les coups d'un jeu d'échec puisqu'en introduisant une contradiction au départ du raisonnement il semble être prêt à

[10] On trouvera en annexe un exemple type de démonstration par l'absurde dans la géométrie grecque ancienne.

[11] Antonini, S., Mariotti, M.A. "Indirect proof: what is specific to this way of proving?", ZDM Mathematics Education 40, p. 401–412 (2008).

[12] Je traduis à partir de L. Wittgenstein *Remarks On The Foundation Of Mathematics* (with the German original text), New-York, MacMillan, 1956 IV, 28. D'une manière générale, les références en langue étrangère données dans cet article sans mention de traduction sont traduites par moi.

sacrifier non pas telle ou telle pièce, mais… le jeu lui-même[13] ! C'est assurément ce que Wittgenstein éprouvait en avançant que présenter une absurdité mathématique revient à se placer d'emblée dans un monde « non-mathématique ». Et comment pourrait-on garantir que les lois de ce monde non-mathématique sont les mêmes que celle du monde mathématique ? Quel est le point de vue de surplomb qui autorise de tenir ainsi sous le regard ce qui a lieu et ce qui n'a pas lieu, ce qui est cohérent et ce qui est absurde ?

La critique 2 (sur le caractère non explicatif des preuves par l'absurde) est très courante parmi les philosophes et les mathématiciens, j'y reviendrai dans les prochaines sections. Mais elle est également présente dans les réponses des étudiants interrogés par Antonini et Mariotti. Ainsi l'un d'entre eux juge la preuve par contradiction artificielle parce que sa conclusion n'est pas liée à l'hypothèse (elle peut donc *a fortiori* encore moins lui servir d'explication !)[14]. Un autre étudiant fait remarquer que les preuves par l'absurde ne sont pas éclairantes parce qu'elles supposent de connaître à l'avance le résultat à démontrer (plutôt que de le produire sous nos yeux comme un fait nouveau)[15].

2. Une tension

Si j'ai rappelé ces trois critiques pour commencer, c'est qu'elles sont source de grandes tensions dans notre approche (rétrospective) de l'histoire des mathématiques. En effet, les différentes formes de sensibilités « constructivistes » ont eu tendance à avancer qu'il y avait eu un décrochage en mathématiques à partir du moment où l'on s'était autorisé à faire des raisonnements purement « symboliques » ou « aveugles » (en particulier lorsqu'ils touchent au maniement de classes infinies d'objets). Tel serait le péché originel par lequel on aurait commencé à s'autoriser à « penser l'impensable », pour reprendre la formule de Wittgenstein. Si *a* désigne un cercle et *P* la propriété d'être carré, rien ne m'empêche d'écrire la suite de symboles *P(a)* et de la manipuler, même si *P(a)* ne représente justement… rien. Et ainsi avec n'importe quel objet et n'importe quelle propriété mathématique. Tandis qu'une partie importante des mathématiques du XIXème siècle s'était développée en critiquant le recours à l'intuition, il fut alors rétorqué par différents courants que, quel que soit le bienfondé de ces critiques, il ne fallait pas éliminer trop vite l'idée qu'une existence, en mathématiques comme ailleurs, doit s'attester dans une intuition ou une construction. Si seuls quelques mathématiciens franchirent le pas de n'accepter *que* les raisonnements appuyés sur des intuitions et/ou des constructions, nombreux sont ceux qui furent et restent sensibles à l'idée qu'il ne faut pas abuser des manipulations « aveugles ».

Il est très intéressant de remarquer, sous ce point de vue, qu'« intuitionnistes » et « formalistes » partagent finalement une certaine vue de l'histoire des mathématiques – la différence étant plutôt que les uns valorisent ce que les autres déplorent. On peut s'aider, pour la caractériser, du portrait qu'a tracé M. Detlefsen dans son article pour le *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*[16]. Il y propose trois traits

---

[13] « *Reductio ad absurdum*, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game » (G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (1940), reed. Cambridge University Press, 2012, p. 94).

[14] *Art. cit.*, p. 409.

[15] *Art. cit.*, p. 411.

[16] Michael Detlefsen, « Formalism », dans Stewart Shapiro (ed.), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005, p. 236-317.

distinctifs du formalisme[17] : 1. Le rejet du modèle causal de la preuve (et du rôle de la construction) ; 2. Le rejet du modèle « présentiste » de la rigueur ; 3. La défense d'un rôle non représentationnel du langage (avec un rôle important de la naissance de l'algèbre symbolique)[18]. On voit qu'il suffit de d'échanger « rejet » et « défense » pour obtenir en miroir une position de type « intuitionniste » ou, plus généralement « constructiviste ». Le point clef est que tous ces acteurs, au-delà de leur opposition, semblent donc s'accorder sur le fait qu'il y a eu, autour de ces trois critères, une évolution importante des mathématiques « modernes », celles qui se développent dans la continuité de l'invention de l'algèbre symbolique (qu'on fait ordinairement remonter à Viète à la fin du XVIème s., puis surtout à Descartes et ses successeurs)[19].

C'est assurément une vision d'assez loin, mais dont je pense qu'elle résonne avec les conceptions de nombre de lectrices et lecteurs. Elle pourra nous suffire pour indiquer une première difficulté évidente. De fait, la sensibilité constructiviste rejette les démonstrations par l'absurde pour des raisons très profondément liées aux critères que j'ai rappelés dans la première section de cet article : ce sont des démonstrations qui ne construisent pas leur objet, qui ne sont pas explicatives et qui reposent sur le fait que nous manipulons « aveuglément » des représentations sans nous occuper de savoir ce qu'elles représentent (sans quoi nous ne pourrions manquer de voir qu'elles ne représentent justement « rien »). Or ces démonstrations, on l'a vu, pullulent dans les mathématiques grecques *anciennes*. Les uns et les autres se retrouvent donc à tenir une position particulièrement précaire : d'un côté, ils considèrent qu'un changement important s'est produit avec le développement de mathématiques symboliques (ou « formelles »), qu'ils contrastent avec un modèle ancien (« présentiste », comme dit Detlefsen). D'un autre côté, il est clair que le type même de démonstration qui semble *violer* le plus clairement ces critères est *surreprésenté* dans les mathématiques grecques anciennes.

Ajoutons un peu au mystère : en fait, le raisonnement est abondamment *critiqué* à l'époque moderne. Les critères que nous avons isolés comme fondant une critique des raisonnements indirects tiennent notamment une place importante chez un auteur comme Descartes. Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, par exemple, il s'en prend très vivement aux démonstrations qu'il a trouvées dans les livres de mathématiques de son temps et qui « ne semblent pas montrer à l'esprit pourquoi ces choses sont ainsi, et comment on les trouve »[20]. Sans surprise, il témoigne à plusieurs reprises d'une réticence à l'égard de « la façon de démontrer qui réduit à l'impossible, et qui est la moins estimée et la moins ingénieuse de toutes celles dont on se sert en mathématique. »[21] Interrogé par Mersenne sur le fait qu'une ligne infinie devrait avoir six fois plus de pieds que de toises

[17] *Art. cit.*, p. 236-237. Toute l'idée de l'article est de montrer que le formalisme moderne, celui défendu par Hilbert et son école, prend la suite d'une tradition qui s'inaugure au XVIIème s.

[18] Detlefsen propose deux autres traits distinctifs, qui vont moins m'intéresser ici : le primat de l'arithmétique sur la géométrie et le « créativisme », c'est-à-dire le fait que le mathématicien se présente comme libre de créer des instruments symboliques propres à l'extension de son savoir, même si ces instruments ne correspondent pas immédiatement à des « contenus ».

[19] Detlefsen considère que le tournant a eu lieu au XVIIème s. avec des auteurs comme Leibniz et Berkeley. On sait qu'on doit d'ailleurs au premier l'expression « connaissance aveugle », comme reposant sur l'usage de symboles et dont les deux exemples paradigmatiques sont à ses yeux l'arithmétique et l'algèbre (*Meditationes de cognitione, veritate, et ideis*, *Acta Eruditorum*, Novembre 1684, trad. fr. P. Schrecker : G. W. Leibniz, *Opuscules philosophiques choisis*, Paris, Vrin, 2001, p. 12-29).

[20] René Descartes, *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit en la recherche de la vérité*, trad et notes Jean-Luc Marion, notes mathématiques Pierre Costabel, La Haye, Martinus Nijhoff, 1977, p. 13.

[21] Descartes à Mersenne, Janvier 1638 (*Oeuvres de Descartes*, publiées par C. Adam et P. Tannery, nouvelle présentation en coédition avec le CNRS, Paris, Vrin, 1964-1974, vol. I, p. 490).

(on aurait donc un infini plus grand qu'un autre), il répond : « quelle raison avons-nous de juger si un infini peut être plus grand que l'autre, ou non ? vu qu'il cesserait d'être infini, si nous le pouvions comprendre » (15 avril 1630, AT I, 147). Comme il avait déclaré juste avant qu'il n'y avait rien d'absurde à penser que le nombre infini de pieds soit six fois plus grand que le nombre infini de toises, il semble donc rejeter l'usage du tiers exclu dans les questions qui touchent à l'infini.

Rien de surprenant dans ces conditions à voir certains commentateurs, comme Jules Vuillemin ou Yvon Belaval[22], proposer de faire de Descartes le prototype des penseurs « intuitionnistes ». Pourquoi pas ? Mais à condition, à nouveau, de remettre très profondément en question le cadre historique qui sous-tendait le tableau peint par Detlefsen. Car s'il est un point qui est hors de doute, c'est que Descartes critique ici les démonstrations *des Anciens* et qu'il le fait au nom de l'algèbre *des Modernes*. Bien plus, il fait valoir un nouveau modèle, « analytique », dont il fait reproche aux Grecs de l'avoir caché et dont il pense, après Viète, que la « nouvelle algèbre » a précisément permis de le relever. Le raisonnement symbolique, loin de permettre une approche aveugle dans laquelle la *reductio ad absurdum* serait naturelle, est ici… le principal vecteur de sa critique !

Tout ceci ne fait que renforcer l'impression que nous manquons d'une histoire qui irait regarder avec un peu de précision la manière dont mathématiciens et philosophes se sont rapportés aux preuves par l'absurde à travers les âges. Symétriquement, mettre l'accent sur les preuves par l'absurde permet de remettre en question certains cadres historiographiques très répandus, mais dont nous commençons à percevoir la fragilité. Ce n'est pas le lieu d'entreprendre ici une telle étude, mais je voudrais au moins insister sur deux éléments que nous avons croisés dans notre première approche du problème. Tout d'abord, il semble qu'une certaine critique des raisonnements par l'absurde se mettent en place à l'âge classique et ce phénomène est particulièrement remarquable puisqu'il s'agit précisément de la période où l'on *sort* du modèle aristotélicien de la preuve (comme devant nécessairement exhiber la « cause ») et où se développe (avec Viète et Descartes, puis Leibniz notamment) une mathématique symbolique de plus en plus développée. L'autre point sur lequel je voudrais insister et qui prolonge le précédent est que cette histoire nous dit quelque chose sur la manière dont les anciens Grecs se rapportaient aux objets mathématiques. En particulier, elle remet fortement en cause l'idée qu'ils se reposaient sur « l'intuition » d'objets qu'on sait « construire », par différence avec ce qui se serait ouvert avec le développement de mathématiques modernes, réputées « symboliques ». Ce sont les deux points que je vais aborder dans les sections suivantes.

3. Le regard des « Anciens » et celui des « Modernes » sur les preuves par l'absurde

La période sur laquelle nous possédons les études les plus poussées sur la réception des raisonnements par l'absurde est assurément la période moderne (au sens que donnent les historiens à ce terme). Il est facile de constater que les critiques que j'ai rappelées dans la première section s'y trouvent clairement formulées. Aux déclarations déjà mentionnées de Descartes, on pourra ajouter sa saillie ironique en direction de Roberval : « je ne trouve

[22] Y. Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Paris, Gallimard, 1960 ; J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, PUF, 1962 ; J.-L. Gardies, *op. cit.* p. 160.

rien de raisonnable en tout ce qu'il dit, comme lorsqu'il estime la façon de conclure *ad absurdum* plus subtile que l'autre. C'est chose absurde »[23].

Une telle vue est notamment développée longuement dans un passage souvent cité de la *Logique de Port Royal* (1662) au nom de la différence entre convaincre l'esprit (niveau de la certitude) et l'éclairer (niveau de l'évidence) :

> Ces sortes de démonstrations qui montrent qu'une chose est telle, non par ses principes, mais par quelque absurdité qui s'ensuivroit si elle étoit autrement, sont très ordinaires dans Euclide. Cependant il est visible qu'elles peuvent convaincre l'esprit, mais qu'elles ne l'éclairent point, ce qui doit être le principal fruit de la science. Car notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est ; ce qui ne s'apprend point par une démonstration qui réduit à l'impossible.[24]

De telles positions sont présentées par plusieurs auteurs de l'époque, notamment sous l'influence de Descartes[25], mais pas seulement. Ainsi le Jésuite Honoré Fabri publie-t-il en 1669 une *Synopsis Geometrica* où il proclame dès la première page que rien n'éloigne plus les jeunes gens de la géométrie que la présence de raisonnement indirect, concluant *per impossibile* (raisonnements dont il entreprend donc de se passer)[26]. La même année, un autre jésuite, Gilles François de Gottignies publie ses *Elementa Geometriae Planae* dans lesquels il explique en ouverture que sa méthode diffère de celle d'Euclide précisément en ce qu'elle se veut « affirmative », de sorte que le lecteur puisse voir non seulement que certaines propositions sont vraies, mais *pourquoi* elles le sont – méthode qu'il contraste sans surprise avec l'approche « négative » dont fait usage Euclide à de nombreuses occasions[27]. A partir de là, il est possible de tirer un fil qui conduit à des auteurs comme Kant et, à partir de lui, à nombre de critiques plus récentes[28]. Mais ceci ouvre une question rarement posée : ces critiques qui sont très répandues chez les Modernes et qui courent jusqu'à nos jours, en trouve-t-on trace dans les périodes antérieures ?

M. Detlefsen rappelle comme caractéristique du modèle « présentiste » de la rigueur le témoignage de Proclus sur le fait qu'Euclide a *d'abord* donné la construction du triangle équilatéral (dans la toute première proposition des *Éléments*) avant de détailler les propriétés du triangle, car on ne peut pas démontrer sur quelque chose dont on ne sait pas encore s'il existe[29]. Il rappelle également la lecture que le philosophe néoplatonicien

---

[23] Descartes à Mersenne, 27 juillet 1638 (op. cit. vol. II, p. 275). Et Descartes d'ajouter : « et elle n'a été pratiquée par Apollonius et Archimède, que lorsqu'ils n'en ont pu donner de meilleure. » On retrouve d'ailleurs la même idée dans le descriptif de Chasles que j'ai rappelé en ouverture. La *Logique de Port-Royal* avance également que « ces démonstrations ne sont recevables que quand on n'en peut donner d'autres et que c'est une faute de s'en servir pour prouver ce qui peut se prouver positivement » – faute qu'elle reproche d'ailleurs à Euclide (cité par Gardies, op. cit., p. 162).

[24] A. Arnauld et P. Nicole, La logique ou l'art de penser (1674), réédition Paris, Gallimard, 1992. Partie IV, chapitre 9, p. 309.

[25] E. Barbin, « La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques », Bulletin APMEP 366, 1988, p. 591–620, notamment en ce qui concerne Bernard Lamy (p. 11-12).

[26] H. Fabri, Synopsis Geometrica, Lugduni Gallorum, 1669.

[27] G. F. Gottignies, Elementa Geometriae Planae, Rome, Bernado, 1669, p. 5.

[28] C'est l'approche que suit Mancosu dans l'ouvrage cité, chap. 4.3. Même développement chez Gardies chap. 7. La position de Kant est intéressante car il tient à la fois que le raisonnement par l'absurde est un raisonnement faute de mieux, mais aussi qu'il est caractéristique des mathématiques, où il ne le rejette donc pas, par différence avec ce qui se passe dans la philosophie, où il n'est jamais légitime à ses yeux.

[29] Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, trad. G.R. Morrow, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970, p. 182-183, cité par M. Detlefsen, art. cit., p. 242-243. La traduction française

propose des trois premiers postulats d'Euclide, vus comme règles de construction permettant d'engager le travail géométrique[30]. De même, Proclus insiste-t-il sur le fait que les meilleures démonstrations sont celles qui montrent la genèse des résultats qu'elles établissent[31].

Mais ces remarques, souvent mentionnées, rendent d'autant plus significatif qu'on ne trouve pas chez Proclus nulle critique des raisonnements par l'absurde. Ceci provient notamment du fait que l'ordre démonstratif n'est pas uniquement lié à ses yeux à des normes de pureté théorique, mais doit aussi obéir à des contraintes plus pratiques de simplicité et de naturalité (le même type de critère qui sera repris, mais pour critiquer les raisonnements par l'absurde, par des auteurs comme Arnauld). Ayant lui-même proposé une démonstration directe de la proposition I, 19, voici la manière significative dont il entreprend de défendre l'approche d'Euclide :

> C'est assurément parce qu'il souhaitait éviter trop de complexité dans l'ordre des démonstrations que l'auteur des *Éléments* évita cette méthode de preuve, préférant procéder par division et réduction à l'impossible puisqu'il désirait établir la converse du théorème précédent (…). Il est préférable de prouver une converse par réduction à l'impossible tout en préservant la continuité que de rompre la continuité avec la démonstration qui précède. C'est pourquoi il démontre presque toujours une converse par réduction à l'impossible (Proclus, *op. cit.*, p. 251)

Plus généralement, il est remarquable qu'on ne trouve pas dans les mathématiques grecques anciennes de discussions comparables à celle des Modernes. Certes, Aristote dédie plusieurs passages aux raisonnements par l'absurde dans ses *Analytiques* en indiquant bien qu'à ses yeux les démonstrations « ostensives » leur sont supérieures[32]. Mais ces critiques d'un philosophe ne font que rendre plus frappant le fait que des mathématiciens comme Euclide, Archimède et Apollonius, non seulement restent silencieux sur la question, mais surtout utilisent très librement et très largement les raisonnements par l'absurde.

Une exception, sur laquelle ont récemment attiré l'attention Rosdhi Rashed et Athanase Papadopoulos dans leur édition de ses *Sphériques*, est Ménélaüs[33]. L'original grec ne nous est pas parvenu, mais il en existe des versions arabes qui nous donnent des indications précieuses à ce sujet. On y voit notamment Menelaüs insister sur le fait qu'il se démarque de ses prédécesseurs en ce qu'il n'a pas recours aux raisonnements par l'absurde :

> Comme nous avons montré les lemmes dont nous avions besoin, retournons maintenant à ce que Théodose voulait montrer ; nous le prouvons en recourant à une affirmation universelle, sans admettre en elle l'impossible. Nous montrerons ainsi son erreur et rectifierons ce qui a été corrompu. (*op. cit.*, p. 696)

---

de Proclus par Ver Eecke étant particulièrement défectueuse, je citerai à partir de l'édition anglaise de Morrow.

30 M. Detlefsen, art. cit., p. 245.

31 Orna Harari, « Les preuves démonstratives dans le commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide », dans A. Lernould (Ed.), Études sur le Commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide, Lille, Presses Universitaires du Septentrion, p. 197-214.

32 Voir en particulier *Seconds Analytiques* 86 b 27-87 a 30. Pour une étude du raisonnement par l'absurde chez Aristote, je renvoie aux chapitres 1 et 7 de J.-L. Gardies, *Le raisonnement par l'absurde*, Paris, PUF, 1991.

33 *Menelaus Spherics: Early Translation and al-Mahani / al-Harawis Version*, édité, traduit et annoté par Roshdi Rashed et Athanase Papadopoulos, De Gruyter, 2017.

Cette particularité du style de Ménélaüs n'avait pas échappé à certains lecteurs arabes comme Ibn Abī Jarrāda (13ème s.), qui commente ainsi, pour la critiquer, la tentative de reconstruction proposée par al-Harawī :

> J'ai dit que Menelaus avait exposé de nombres lemmes pour prouver cette proposition, mais al-Harawī a montré certains d'entre eux par une reductio ad absurdum ; et nous avons dit que ceci ne relève pas de la méthode de Ménélaüs. J'ai montré tout ce qui avait été exposé dans le cours de la preuve sans recours à la contradiction. (op. cit., p. 239)

Mais cet exemple ne fait que renforcer l'impression que nous avions : le refus des preuves par l'absurde s'effectue ici *par différence* avec une pratique ordinaire de la géométrie qu'il s'agit de mettre à distance[34]. C'est un point sur lequel insistait justement Proclus en rappelant que certains auteurs avaient bien cherché à éviter les raisonnements par l'absurde, mais que cette voie n'était *pas* celle qu'avait choisie Euclide (et à sa suite Archimède et Apollonius), pas plus qu'elle n'était celle que lui-même (Proclus) considérait comme meilleure :

> C'est une tâche difficile, dans toute science, de choisir et arranger proprement les éléments d'où sont tirées toutes les autres choses et en lesquels elles peuvent être résolues. Parmi ceux qui s'y sont essayés, certains ont rassemblé plus de théorèmes, d'autres moins ; certains ont utilisé des démonstrations plus courtes, d'autres ont étendu leur traitement tout au long ; certains ont évité les réductions à l'impossible, d'autres les proportions. (Proclus, *op. cit.*, p. 60)

Par contraste, on devrait se demander pourquoi la critique des raisonnements par l'absurde se développe à l'âge classique avec une telle vigueur. Ce n'est pas le lieu de produire ici une telle explication dans tous ses détails, mais l'on peut au moins indiquer quelques éléments qui ont été apportés par les historiens dans les dernières années et qui changent très profondément notre regard sur la question.

Comme y a insisté Paolo Mancosu, nous avons tendance à projeter le fait que les mathématiques connaissent des transformations très importantes au tournant du XVIème et du XVIIème s. (ce qui est indéniable), avec le fait que les questions philosophiques qui accompagnent cette pratique changent également profondément. Or ce n'est pas le cas. Un trait tout à fait étonnant d'une étude appuyée sur les sources est précisément de montrer que les discussions philosophiques restent ancrées dans certaines questions développées à la Renaissance, voire dans la scolastique tardive. Ceci remet déjà en question l'image habituelle que nous avons d'un humanisme renaissant qui se serait démarqué des obscurités de la scolastique d'influence aristotélicienne (image qui peut rester tout à fait vraie par ailleurs sans l'être dans le domaine de la philosophie des mathématiques).

Une des questions (au sens scolastique de la *quaestio*) qui eut une influence considérable à ce sujet est celle de la « certitude » des mathématiques. Il s'agit d'une question technique qui consiste à savoir si les mathématiques peuvent être considérées comme la plus certaine des sciences. En contexte aristotélicien, ceci est rapporté à un type d'explication qui fournirait à la fois l'établissement de certains faits (*to oti*, le « quoi »), mais aussi l'explication de ces faits (*to dioti*, le « pourquoi »). Un des auteurs qui fit le plus pour la diffusion de cette question est Alessandro Piccolomini qui publie en 1547 un petit traité sur le sujet où il entend montrer que les mathématiques ne remplissent pas

[34] Bien plus, il paraît lié à un domaine particulier, la géométrie sphérique, où l'on cherche à éviter les raisonnements indirects (Rashed y voit même une anticipation des géométries non-euclidiennes, cf. *op. cit.*, p. V).

cette condition[35]. Cette critique eut une influence décisive dans la mesure où elle amena les auteurs qui voulaient défendre la certitude des mathématiques à donner aux preuves une fonction très fortement explicative (la présentation d'un « pourquoi »). Or pour nombre d'auteurs modernes, cette explication est fournie, sur le modèle avancé par Proclus, par le fait que ces preuves explicatives montrent à voir la *genèse* des faits qu'elles décrivent. Ultimement, elles devraient pouvoir s'appuyer sur des définitions elles-mêmes « génétiques » et déployer ainsi un savoir suivant pas à pas la construction progressive des objets et de la découverte de leurs propriétés caractéristiques. Ce modèle se retrouve très clairement dans les critiques de Descartes contre les démonstrations qui ne montrent pas « à l'esprit pourquoi ces choses sont ainsi, et comment on les trouve », mais il se trouve aussi, sous des formes diverses, chez Hobbes ou Spinoza[36]. Il est également présent chez des mathématiciens de première importance comme Leibniz ou Newton (qui en hérite de son maître Barrow)[37].

On voit qu'une norme dominante de raisonnement mathématique que Detlefsen appliquait aux anciens (le modèle « causal » de la preuve), par différence avec les Modernes, est en fait… typique de notre modernité. Or c'est elle qui commande clairement une méfiance à l'égard des preuves indirectes, qui ne sont ni génétiques ni explicatives. Ceci ne signifie évidemment pas que tous les mathématiciens modernes partagent ce point de vue. Pensons à Pascal, grand défenseur des raisonnements par l'absurde, ou à Leibniz, qui ne voit aucune incompatibilité entre les deux modèles, qu'il valorise à droit égal. Reste que se développe clairement à l'âge classique, et contre toute attente, un nouveau regard sur la preuve qui a la particularité de se placer dans un idéal d'origine clairement… aristotélicienne. Sans la saisie de cet étrange développement, où des auteurs anti-aristotéliciens se mettent à défendre une norme typiquement aristotélicienne, on ne peut guère comprendre, me semble-t-il, l'évolution des vues sur les raisonnements par l'absurde dans les périodes modernes et contemporaines.

4. Ce que les démonstrations par l'absurde nous disent des objets mathématiques et de leur représentation

Les conclusions de la section précédente invitent naturellement à inverser l'approche habituelle et à demander en retour ce que *l'acceptation* très répandue des preuves par l'absurde chez les géomètres anciens nous dit sur la manière dont ils se rapportaient à leur pratique et à leurs objets. Ici aussi, nous allons voir qu'une révision historiographique d'importance semble appelée par une telle étude. Si le tableau que j'ai commencé à dresser est correct, nous devons en effet nous départir du modèle « présentiste » attribué aux Anciens selon lequel un objet mathématique n'existe que s'il est donné « en présence » au praticien – modèle qui aurait volé en éclat avec l'acceptation de plus en plus répandue d'un usage « non représentationnel » du langage. De fait, les démonstrations par l'absurde ont précisément ceci de singulier qu'elles font appel à des

[35] A. Piccolomini, *Commentarium de Certitudine Mathematicarum Disciplinarum*, Rome, Antonium Bladum Asulanum, 1547.

[36] Sur la fortune de la *quaestio de certitudine*, voir P. Mancosu, *op. cit.*, chap. 1. Sur Spinoza dans ce contexte et plus généralement sur la fortune de la *quaestio*, je me permets de renvoyer à D. Rabouin, « Spinoza. Quelle norme mathématique ? », dans J.-P. Cléro (dir.), *Les chemins mathématiques vers le scepticisme*, Paris, Hermann, 2021, p. 27-50.

[37] Voir N. Guicciardini, *Isaac Newton on mathematical certainty and method,* Mit Press, 2009, p. 4. Sur la fortune de la question de la certitude au XVIIème s., voir plus également E. Sergio, *Verità matematiche e forme della natura da Galileo a Newton*, Rome, Aracne editrice, 2006.

représentations dont on montre justement qu'elles ne peuvent *pas* représenter des situations mathématiques acceptables. Elles jouent donc exactement le même rôle que le *P(a)* à qui j'avais demandé de représenter un « cercle carré » dans mes exemples précédents (ou de la formule qui représentait les classes de notre *p*-groupe).

Pour mener cette réflexion, je m'appuierai sur deux études consacrées à la géométrie grecque ancienne et qui se sont l'une et l'autre trouvées confrontées très vite à cette question. La première est l'ouvrage de Reviel Netz intitulé *The shaping of deduction in Greek mathematics* (Cambridge, CUP, 1999). Dans ce livre, Netz insiste beaucoup à la fois sur le fait que les lettres qui entrent dans le discours géométrique grec ne fonctionnent justement pas comme des symboles (mais plutôt comme des index) et sur le fait que le texte, à la syntaxe très rigide, est inséparable d'un diagramme qui constitue l'objet propre du discours géométrique. Tout ceci semble d'abord conforter l'idée d'un raisonnement faisant peu appel à l'appareil symbolique et fortement appuyé sur la présence d'un diagramme donné à l'intuition. Or une telle assertion se heurte immédiatement à ce que Netz présente lui-même comme une forme d'impasse. À partir du moment où nous nous trouvons devant une preuve par l'absurde, nous rencontrons, en effet, un diagramme qui ne peut justement *pas* être « l'objet » (ou une configuration acceptable d'objets) du discours du mathématicien.

L'exemple qu'il donne est la proposition célèbre où Euclide démontre par l'absurde que deux cercles ne peuvent se couper en plus de deux points[38]. Pour cela, Euclide suppose par impossible que ce n'est pas le cas et qu'on peut se donner deux cercles s'intersectant en plus de deux points. Mais comme la preuve géométrique grecque a besoin d'un diagramme pour avancer, il doit bien alors proposer une représentation de ces « cercles ».

Nous ne possédons des *Éléments* que des copies tardives, mais les traditions manuscrites s'accordent pour proposer un diagramme du type suivant :

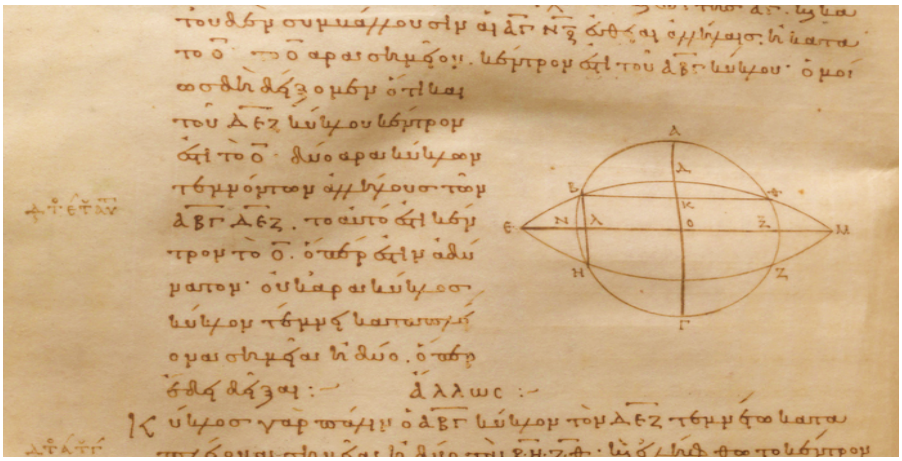

Figure 1 – MS D'Orville 301, fol. 53 (Bodleian Library)

On voit ici très clairement qu'il faut rompre le pacte référentiel ordinairement attaché aux représentations géométriques. Car s'il est une chose qui est immédiatement évidente aux lecteurs, c'est que l'un des objets représentés n'est pas, ne peut pas être un cercle – et ceci

[38] Voir Annexe.

est d'autant plus évident que les compas étaient justement utilisés dès les périodes anciennes pour représenter les cercles (comme en témoigne d'ailleurs l'illustration ci-dessus)[39]. Or il n'est pourtant pas possible de s'exclamer pour autant : « ceci n'est pas un cercle ! » sous peine de bloquer la preuve avant même qu'elle n'ait commencé.

Netz propose de voir ce procédé comme un détour par une fiction, un « faire semblant » (*make believe*). Il compare le « cercle » de la démonstration au carrosse de Cendrillon qui redevient citrouille quand le minuit de la fin de la preuve sonne[40]. Il y a là une piste très intéressante pour étudier le rôle des représentations en mathématiques. Mais, qu'on recoure au modèle de la fiction ou pas, une chose est sûre : il y a une ambiguïté à parler de « représentations » en mathématiques, qu'il s'agisse de formules symboliques ou de diagrammes, dans la mesure où nous recourrons très souvent à cette connaissance que Leibniz appelait justement « aveugle » (sans distinguer pour sa part entre les symboles algébriques, les mots du langage naturel ou les figures géométriques – tous exemples de ce qu'il appelait des « caractères »). Dans ce cas, le « faire semblant » autorise à utiliser des procédés ordinairement conçus comme représentationnels dans un cadre non-représentationnel – si du moins, on veut prendre au sérieux le fait que le diagramme qui illustre une démonstration par l'absurde ne représente littéralement, selon l'approche ordinaire des relations sémantiques, « rien ».

Cet échec des relations sémantiques dans le cas des preuves par l'absurde est au départ d'une autre étude sur la géométrique grecque (cette fois limitée à la géométrie plane euclidienne, présentée dans les livre I à IV des *Éléments*), celle de Ken Manders sur les diagrammes euclidiens[41]. La première section de l'article se demande si les diagrammes doivent être abordés comme des artéfacts qu'on contrôle ou au travers de relations sémantiques (des représentations qu'on interprète), l'auteur entreprenant précisément de favoriser la première approche aux dépens de la seconde, pourtant plus traditionnelle. Voici comme il introduit la sous-section qu'il dédie à ces questions :

> Les artéfacts utilisés dans la pratique, qui nous donnent prise sur notre vie sont parfois pensés en terme de sémantique – typiquement comme représentation de quelque chose dans la vraie vie. Il existe, bien sûr, un débat très ancien sur la question de savoir comment les diagrammes géométriques doivent être traités dans cette perspective.
>
> Nombre de difficultés anciennes sur la nature des objets géométriques et la connaissance que nous en avons proviennent de ce qu'on tient pour acquis le fait suivant : le texte géométrique serait vrai, au sens le plus ordinaire du terme, à propos du diagramme ou d'une contrepartie idéale du diagramme. Or, sans même toucher à ses difficultés, on voit qu'une authentique relation sémantique entre le diagramme géométrique et le texte est incompatible avec la réussite de l'usage des diagrammes dans les preuves par l'absurde : les contextes de *reductio ad absurdum* servent précisément à assembler un corps d'affirmations qui, de manière évidente, ne peuvent pas être vraies simultanément ; il en résulte qu'aucune situation géométrique ne pourra sérieusement illustrer le fait qu'elles le soient. (Manders 2008, p. 84).

Cette remarque, comme le précise Manders, n'a rien de spécifique aux diagrammes et vaut en fait, plus largement, pour toutes les représentations mathématiques au moyen desquelles on peut produire une *reductio ad absurdum*. C'est pourquoi j'ai commencé

[39] Dans les autres familles de diagrammes pour cette preuve, un des cercles est représenté non par une ogive, tracée avec un compas, mais par une forme elliptique – ce qui ne change rien au fait qu'elle n'apparaît donc pas comme un cercle.

[40] R. Netz, *op. cit.*, p. 55-56.

[41] K. Manders, « The Euclidean diagram », dans P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford, OUP, 2008, p. 80-133.

par donner l'exemple d'une formule algébrique, qui pose exactement les mêmes questions. Par principe, un raisonnement par l'absurde conjoint un ensemble d'énoncés qui ne peuvent pas être vrais en même temps. Du point de vue de la sémantique standard, on dira donc qu'un tel ensemble d'énoncés n'a pas de « modèle » ou que son « modèle » est vide, ce qui revient à dire qu'il ne représente « rien ». Tandis que cette approche ne nous choque pas quand il s'agit du langage (je peux bien parler de l'actuel roi de France et dire qu'il est chauve, même si rien de tout cela n'existe), elle devient beaucoup plus problématique dès lors que nous mobilisons ce qui nous apparaît comme des « représentations » – ce qui est typiquement le cas des diagrammes.

Ainsi les preuves par l'absurde nous donnent accès à des représentations qui ne représentent pas – ou tout du moins pas ce qu'elles prétendent représenter. Si nous voulons les interpréter dans les termes de la sémantique ordinaire, nous devons dire qu'elles ne représentent « rien ». Une différence importante avec « l'actuel roi de France » est que dans le cas des représentations mathématiques, nous ne pouvons pas imaginer un autre monde où la situation représentée serait vraie. Un monde où deux cercles euclidiens s'intersectent en plus de deux points est n'est pas un autre monde mathématique, c'est un monde « non-mathématique », pour reprendre l'expression de Wittgenstein.

Or se saisir de ce problème, c'est précisément ouvrir une perspective complètement nouvelle sur l'usage des diagrammes qui se révèlent alors être des artéfacts *avec lesquels* on raisonne, plutôt que *à propos desquels* on raisonne. L'objectif que se donne Manders est alors d'expliciter ce rôle des diagrammes comme porteurs d'inférence. S'il ne parle pas de fictions, comme Netz, il rejoint néanmoins en ce point un aspect très important des théories récentes de la fiction, comme celle qu'a développée Kendall Walton[42]. On y met, en effet, l'accent sur le fait que le mécanisme du « faire semblant » recourt très souvent à des auxiliaires (*prop*) – comme le balai que l'enfant enfourche en faisant « comme si » il s'agissait d'un cheval. Il ne s'agit pas tant de nier le fait que certains aspects de ces auxiliaires doivent être représentationnels et que n'importe quel objet ne peut certainement pas donner prise au « faire semblant » dans n'importe quelle condition (il faut, par exemple, prendre un objet qui, comme le balai et le cheval puisse être « enfourché »), mais plutôt d'insister sur le fait que la relation sémantique ordinaire, qui suppose une évaluation globale de la cohérence des données, n'a pas besoin d'être satisfaite ici. Ces auxiliaires sont des outils *avec* lesquels nos preuves racontent leurs histoires – plutôt que *ce sur quoi* porte l'histoire elle-même.

Quoi qu'il en soit de ces pistes très intéressantes à poursuivre pour mieux percer les ressorts de nos raisonnements, un point ne peut manquer de nous arrêter : chez Netz comme chez Manders, il apparaît que les raisonnements par l'absurde anciens nous mettent immédiatement face à des formes de connaissances « aveugles » et cela bien avant qu'on ait fait usage du symbolisme moderne. C'est d'ailleurs exactement ce que rappelait Leibniz, lorsqu'il introduisit l'idée de connaissance aveugle en prenant comme premier exemple celui d'un diagramme géométrique (en l'occurrence le célèbre « chiliogone », dont on avait déjà fait usage Descartes). C'est donc à tort que nous croyons que quelque chose a changé sous ce point de vue avec l'intervention des symbolismes au sens étroit qu'a pris ce terme par la suite.

[42] K. Walton, Mimesis as Make-Believe: On the Foundations of the Representational Arts, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.

Conclusion

J'espère avoir donné dans ce qui précède une motivation pour entreprendre une histoire des preuves par l'absurde, qui ne se contenterait pas, comme on le fait trop souvent, de répéter les critiques des auteurs classiques pour les rapporter à celle d'Aristote et conclure à un modèle « présentiste » de la preuve que notre modernité – qu'on s'en félicite ou qu'on le déplore – aurait progressivement chassé. C'est tout l'inverse qui semble vrai et une telle révision historiographique a beaucoup à nous apprendre à la fois sur les normes qui ont été attachées à la preuve depuis l'âge classique et sur la manière dont les mathématiciens grecs antiques se rapportaient à leurs objets. Si je n'ai fait qu'esquisser quelques traits que pourrait prendre une telle histoire, j'espère tout du moins avoir éveillé quelques questions qui pourraient heureusement nourrir dans le futur les discussions entre historiens, philosophes et didacticiens des mathématiques.

Annexe – Un exemple classique de démonstration par l'absurde dans la géométrie grecque ancienne, la proposition III, 10 des *Élements* (trad. fr. B. Vitrac)[43]

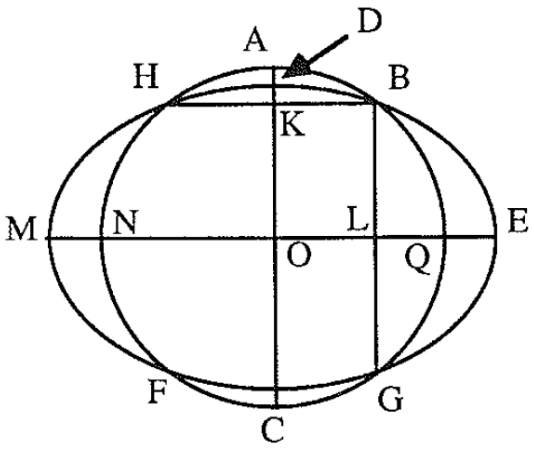

Figure 2 – Figure de la démonstration qu'un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points

Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points

Car si c'est possible que le cercle *ABC* coupe le cercle *DEF* en plus de deux points : *B, G, F, H,* et que *BH, BG,* étant jointes, soient coupées en deux parties égales aux points *K, L* ; et que *KC, LM*, ayant été menées à angles droits avec les [droites} *BH, BG* à partir des points *K, L*, soient conduites jusqu'aux points *A, E*. Or puisque dans le cercle *ABC* une certaine droite *AC* coupe en deux parties égales et à angles droits une certaine droite *BH,* le centre du cercle *ABC* est donc sur *AC* (III. l, Por.).

Ensuite, puisque dans le même cercle *ABC*, une certaine droite *NQ* coupe en deux parties égales et à angles droits une certaine droite *BG*, le centre du cercle *ABC* est donc sur *NQ*. Or il a aussi été démontré qu'il était sur *AC* et les droites *AC, NQ* ne se rencontrent en aucun point sinon *O*. Le point *O* est donc le centre du cercle *ABC*.

[43] Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments*, traduits du texte de Heiberg, Introduction générale Maurice Caveing, trad. et comm. Bernard Vitrac, Paris, PUF, 1990-2001, 4 vol., vol. 1., p. 412-413.

Alors semblablement nous démontrerons que le centre du cercle *DEF* aussi est *O*. Donc le même point *O* est le centre de deux cercles se coupant l'un l'autre, *ABC* et *DEF*. Ce qui est impossible (par Ill. 5).

Donc un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Ce qu'il fallait démontrer.