INTRODUCTION A LA PREUVE EN MATHEMATIQUE : LA MEDIATION D'ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES

Maria Alessandra Mariotti – Université de Sienne - Italie

Resumé. Ma contribution portera sur le potentiel didactique offert par l'utilisation d'un environnement de Géométrie Dynamique en ce qui concerne l'initiation des étudiants à la pratique de la preuve dans les classes de Mathématique. La théorie de la médiation sémiotique offrira le cadre théorique pour décrire et expliquer le rôle de contextes informatiques dans la promotion du sens de la preuve des étudiants. Des exemples seront présentés, illustrant différents aspects du processus de médiation sémiotique, tel qu'il peut se dérouler dans la résolution de tâches spécifiques.

Introduction

Mon objectif n'est pas de donner un aperçu de la riche recherche sur la preuve en relation avec l'utilisation des technologies, mais d'illustrer les potentiels d'un type spécifique d'environnement d'apprentissage centré sur la Géométrie Dynamique pour favoriser un sens mathématique de la preuve et, plus largement, une perspective théorique.

Depuis quelque temps, le problème de la preuve et en particulier de la démonstration est devenu l'un des thèmes vivants de la didactique des mathématiques et, à ce titre, un thème aussi de mes études, et par conséquent le sujet de ma réflexion personnelle : mes idées sur la « preuve » ont changé pendant ces années, enrichies par les discussions et les résultats que la recherche internationale nous a offerts. Il est devenu de plus en plus clair à quel point il est difficile de renfermer l'idée de preuve mathématique dans une « définition » (un autre rêve de nous mathématiciens !) mais aussi de la renfermer dans un discours qui la décrit. De plus en plus et de mieux en mieux, on m'a montré le caractère humain, vivant, et donc insaisissable de quelque chose qui n'a de sens qu'en référence à une théorie, mais qui est pratique dans son essence.

Néanmoins, je suis convaincue que la preuve en général et l'aspect théorique des mathématiques en particulier, ne peuvent être négligés, considérés comme inessentiels dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Il n'est pas possible d'enseigner et d'apprendre les mathématiques en laissant les démonstrations à l'extérieur de la salle de classe.

Le but de cette contribution n'est pas tant de motiver cette affirmation, que bien que forte, pour beaucoup (enseignants, mathématiciens et professeurs de mathématiques...) peut sembler partageable, c'est plutôt de montrer des moyens possibles de résoudre le problème didactique qui se pose lorsqu'on a l'intention d'apporter des démonstrations en classe.

Ce que je présente ici sont quelques résultats d'expériences d'enseignement qui étudient l'utilisation des Environnements de Géométrie Dynamique pour initier les élèves du secondaire à la preuve et à la démonstration et, plus généralement, conçues avec l'objet/ le but du développement du sens mathématique de la preuve et du signifié spécifique de la démonstration. Ces expériences ont été réalisées par l'auteur, en collaboration avec un groupe d'enseignants. Certaines d'entre elles ont duré des années

et ont impliqué différentes classes pendant toute une année scolaire (Mariotti, 2000, 2001a ; Cerulli et Mariotti, 2002).

Le cadre théorique dans lequel je vais placer ma contribution est la théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) qui offre un modèle pour décrire le processus d'enseignement et apprentissage centré sur l'utilisation d'outils ; l'élément clé sur lequel repose le processus de médiation sémiotique concerne d'une part, le lien entre l'usage d'un outil et les significations émergeant de cette utilisation dans les activités en classe et d'autre part, les notions mathématiques, qui sont l'objectif de l'enseignement. La discussion sur l'utilisation des outils informatiques dans la perspective de la médiation sémiotique repose sur les composantes suivantes :

- Analyse historique-épistémologique. Les notions mathématiques que nous avons l'intention de traiter.
- Analyse cognitive. L'utilisation d'un artefact selon l'accomplissement de certaines tâches, contribuant à l'émergence de significations, mais aussi la création d'un environnement significatif dans lequel le discours interpersonnel peut évoluer.
- Analyse didactique. La conception de l'intégration d'un artefact dans les activités de la classe. Strictement liée à l'analyse cognitive, l'analyse didactique vise à mettre en place la séquence d'enseignement.

Dans ce qui suit nous irons nous placer par rapport à la preuve et en particulier expliciter quelle signification mathématique constitue l'objectif didactique considéré dans notre étude, tels que l'idée de théorème en tant que système d'un énoncé, d'une preuve et d'une théorie dans laquelle une telle preuve prend du sens. Ensuite, l'introduction de la TMS nous donne le moyen d'interpréter le fonctionnement d'un environnement de Géométrie Dynamique en termes de potentiel sémiotique par rapport à la notion de théorème et cohéremment de décrire des expériences planifiées et vécues en classe.

Le point de vue historique- épistémologique : la notion de Théorème

Les racines profondes de la preuve dans les Mathématiques résident dans les éléments d'Euclide et dans la « manière d'exposer » particulière utilisée dans le célèbre traité (Heath, 1956, vol. I p. 115-116). La manière dont l'exposition proposée par Euclide a eu à cœur à la fois le contenu et la destination : le mode d'exposition renvoie à un « style de rationalité » particulier que certains historiens définissent précisément comme « euclidien ». La nature du style vient du fait qu'il est possible de concevoir la manière d'exposer des éléments comme une sorte d'idée régulatrice de l'organisation de la science, capable de produire des images de la science qui la rendent reconnaissable et plausible au sein d'une communauté. Que l'euclidien soit un style était connu des anciens : l'organisation en définitions, axiomes, démonstrations de théorèmes était devenue le « bon sens » d'une science qui se veut rigoureuse.

Dans ce cadre, une unité profonde lie l'organisation de l'exposition du savoir et sa compréhension, rendant l'organisation elle-même fonctionnelle à la compréhension du contenu, une compréhension qui est inextricablement liée au lien d'acceptabilité et de reconnaissance au sein d'une communauté scientifique.

Il nous semble que ces aspects font partie des aspects unanimement reconnus comme caractéristiques d'un corpus théorique et se retrouvent dans de nombreuses discussions concernant la nature et la fonction de la preuve (Hanna, 1983, 1990 ; Balacheff, 2019).

Tout ceci nous amène à souligner, comme caractéristique de la connaissance mathématique et de ses méthodes, une continuité profonde entre la construction de la connaissance et la systématisation de celle-ci dans un corpus théorique ; entre les aspects typiques de la connaissance en tant que produit culturel, comme la demande d'être compréhensible, et d'être accepté par la communauté de référence. Par conséquent, pour bien comprendre le sens des mathématiques, il n'est pas possible d'isoler la *démonstration* de l'ensemble des éléments par rapport auxquels la méthode de validation prend du sens. S'il est vrai que chaque élément de connaissance peut être associé à un énoncé, c'est sa démonstration qui établit son acceptabilité, mais une démonstration ne l'est que par rapport à une théorie qui établit des principes et des règles d'inférence partagés.

Tout théorème mathématique est caractérisé par un *énoncé* et une *démonstration*, mais la relation entre la proposition et la preuve que la valide prend le sens de la relation entre *énoncé* et *démonstration* seulement dans un *contexte théorique* particulier, c'est-à-dire un système de principes et de règles d'inférence partagés qui rendent acceptable la preuve (Mariotti 2003).

L'analyse historique-épistémologique met en évidence des aspects importants de ce lien complexe et montre comment il a évolué au cours des siècles. Mais la centralité de la théorie de référence comme élément crucial n'a pas disparu.

Le fait que dans la pratique scolaire la théorie de référence reste souvent implicite conduit à oublier ou du moins à sous-évaluer son rôle dans la construction du sens de la démonstration. Pour cette raison, du point de vue didactique, il semble nécessaire de ne pas isoler la notion de démonstration, de ne pas considérer une démonstration en soi, mais plutôt de se référer à un « théorème mathématique » en tant que système composé *d'un énoncé, d'une démonstration et d'une théorie de référence* (Mariotti et *al.*, 1997, 1, p. 182).

Le Problème didactique

La discussion précédente, et en particulier la caractérisation du théorème mathématique, nous permet de reformuler le problème didactique de manière mieux articulée. Pour l'introduction des étudiants à une perspective théorique, il y a trois aspects clés à traiter, interconnectés les uns avec les autres : l'idée d'énoncé, l'idée de démonstration et l'idée de théorie. La démonstration d'un énoncé particulier prend du sens à partir de la théorie par rapport à laquelle il est tel, de sorte que la construction du sens *de la démonstration ne peut être séparée de la construction du sens de la théorie.*

La Théorie de la Médiation Sémiotique

La Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008; Mariotti, 2009 ; Mariotti, 2010; Mariotti & Maracci, 2010; Mariotti, 2011) combine une perspective sémiotique et une perspective éducative et développe la notion de médiation sémiotique de Vygotskij (Vygotskij, 1978), considérant le rôle crucial de la *médiation humaine* (Kozulin, 2003, p.19) dans le processus d'enseignement-apprentissage.

Interpréter le processus d'enseignement-apprentissage d'un point de vue sémiotique, c'est reconnaître le rôle central des signes et décrire le processus d'enseignement-apprentissage comme un processus d'évolution (transformation dans une direction donnée) des signes. En particulier, TMS se concentre sur la production de signes, car ils trouvent leur origine dans l'utilisation d'un artefact, en relation avec les significations

personnelles qui en découlent, et sur le processus de transformation de ces signes par l'interaction sociale ; une telle transformation peut être appliquée à des connaissances mathématiques spécifiques et aux signes qui y sont liés, ainsi l'évolution des signes peut être considérée comme une indication d'un changement dans la relation entre le sujet et la connaissance mathématique, et finalement comme une preuve d'apprentissage.

Lors de l'utilisation d'un artefact pour accomplir une tâche, les significations personnelles des élèves émergent. De telles significations peuvent être liées à des significations mathématiques, mais l'établissement d'une telle relation spontanée pour un expert, n'est pas un processus spontané pour les étudiants. Néanmoins, il peut s'agir d'un objectif éducatif explicite pour l'enseignant, qui peut *intentionnellement* orienter ses propres actions pour promouvoir l'évolution des significations personnelles vers les significations mathématiques. L'évolution peut se produire par l'interaction sociale, de sorte que dans un contexte de classe de mathématiques, les signes produits par les élèves et exprimant la relation entre l'artefact et la tâche dans laquelle il est utilisé, peuvent évoluer en signes exprimant la relation entre l'artefact et les Mathématiques (figure 1).

L'organisation et la promotion de ce processus sémiotique ont été au centre de nos études, basées sur des expériences pédagogiques à long terme (voir, par exemple, Mariotti et al, 1997 ; Bartolini Bussi, 1996 ; Bartolini Bussi et coll., 1998 ; Mariotti, 2000 ; Mariotti & Cerulli, 2001) à partir duquel le cadre théorique est né et s'est développé, autour de deux éléments clés : la notion de potentiel sémiotique d'un artefact et la notion de cycle didactique (pour une discussion complète, voir Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

Comme indiqué ci-dessus, l'utilisation d'un artefact pour accomplir une tâche particulière peut évoquer (Hoyles, 1993) des connaissances mathématiques spécifiques. En fait, au-delà du sens immédiat de son utilisation, les experts – mathématiciens, et en particulier les enseignants – peuvent reconnaître des notions mathématiques dans la résolution d'un problème spécifique avec l'artefact. Par exemple, la notation positionnelle et la notation polynomiale des nombres peuvent être évoquées par un abacus et par son utilisation dans le comptage ou l'addition ; de même, comme nous le verrons dans ce qui suit, la construction d'une figure stable dans un système de géométrie dynamique peut évoquer la géométrie classique « règle et compas ». Dans le cadre de la TMS, la définition suivante vise à expliciter la double relation qui peut lier un artefact à la sphère des individus et à celle de la culture, aux significations personnelles et mathématiques. En même temps, une telle définition vise à attirer l'attention sur la nécessité d'une distinction claire entre les significations liées à l'utilisation d'un artefact, en particulier celles liées à l'individu accomplissant une tâche, et les significations liées au contenu mathématique en tant que réalisation culturelle.

Une double relation peut se produire entre un artefact et d'une part les significations personnelles émergeant de son utilisation pour accomplir une tâche (activité instrumentée), et d'autre part les significations mathématiques évoquées par son utilisation et reconnaissables comme mathématiques par un expert.

Nous appellerons ce double lien sémiotique le *potentiel sémiotique* d'un artefact. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 754)

La notion de potentiel sémiotique capture l'idée qu'un artefact peut être utilisé pas seulement par l'élève pour accomplir une tâche, mais aussi comme véhicule d'apprentissage, en d'autres termes, il peut être utilisé par l'enseignant comme *un outil de médiation sémiotique*. Une fois son utilisation introduite dans les activités en classe, l'enseignant peut exploiter son potentiel sémiotique pour favoriser l'apprentissage des Mathématiques par les élèves. L'analyse du potentiel sémiotique doit être considérée comme une phase a priori qui constitue le cœur de la conception de la séquence d'enseignement.

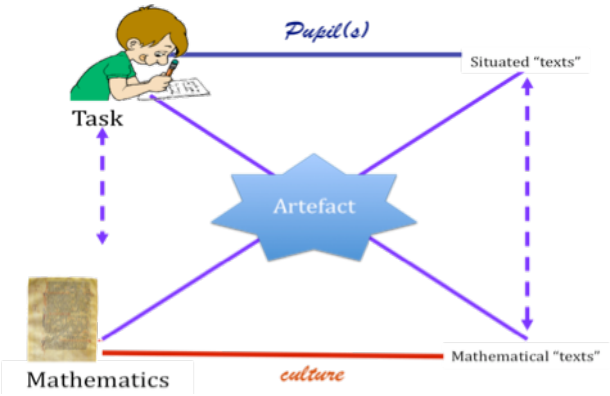

Figure 1– Le modèle TMS pour le processus d'apprentissage et enseignement

L'approche instrumentale (Rabardel, 1995) telle que développée par certains auteurs (Trouche, 2005 ; Artigue, 2002 ; Lagrange, 2000) offre un cadre efficace pour une analyse a priori de l'utilisation de l'artefact avec différentes tâches et fournit la base d'une analyse cognitive et épistémologique qui contribue à l'identification des significations potentielles qui pourraient émerger au cours des activités des élèves et les significations mathématiques associées.

L'exploitation du potentiel sémiotique de l'artefact implique pour l'expert (par exemple, l'enseignant) une prise de conscience de son potentiel en termes de significations mathématiques évoquées et de significations personnelles émergentes pendant l'activité en classe. D'une part, l'enseignant doit concevoir des situations didactiques où les élèves sont confrontés à des tâches qui sont censées mobiliser des schémas spécifiques d'utilisation et, par conséquent, des situations dans lesquelles ils sont censés générer des significations personnelles. D'autre part, l'enseignant doit orchestrer les interactions sociales dans le but de faire en sorte que les significations personnelles, qui ont émergé au cours des activités centrées sur les artefacts, se développent dans les significations mathématiques qui constituent les objectifs de l'enseignement.

Dans le cadre de la TMS, je décrirai comment un Système de Géométrie Dynamique (SGD) offre un contexte favorable pour une approche de la preuve ; en particulier, comment certains de ses éléments peuvent fonctionner en tant qu'outils de médiation sémiotique pour développer des significations mathématiques liées à la démonstration : notamment, comme discuté ci-dessus, les significations liées à la notion de théorème en tant que système d'énoncé, démonstration et théorie.

Déterminer le potentiel sémiotique d'un artefact donné, demande d'identifier une tâche, identifier les significations personnelles qui peuvent émerger pour chaque élève de l'utilisation de l'artefact pour accomplir cette tâche et après cela, les relier aux significations mathématiques qui sont l'objectif de l'intervention didactique.

Les constructions géométriques

Partons du cœur de l'analyse qui réside dans la relation, immédiatement évoquée dans l'esprit de tout mathématicien, entre les figures réalisées dans un SGD, et la notion mathématique de construction géométrique. Une telle relation peut être élaborée du point de vue de la médiation sémiotique à travers une analyse épistémologique et cognitive,

conduisant à l'identification du potentiel sémiotique de l'artefact 'SGD' par rapport à la signification du théorème.

En géométrie euclidienne, traditionnellement appelée « géométrie de règle et de boussole », les problèmes de construction ont une position centrale. La nature théorique d'une construction géométrique est clairement énoncée, et ce en dépit de son objectif pratique apparent, c'est-à-dire le dessin qui peut être produit sur une feuille de papier suivant la procédure de résolution (Mariotti, 2007). Comme le souligne clairement Vinner :

> The ancient Greek undertook a challenge which in a way represents some of the most Caractéristiques typiques des mathématiques pures en tant que discipline abstraite. Il n'est lié à aucun besoin pratique. (Vinner, 1999, p. 77)

Une construction géométrique consiste en une procédure qui, grâce à l'utilisation d'outils spécifiques et au respect de règles établies, produit un dessin. Une construction doit être considérée comme correcte si les outils ont été utilisés en respectant les règles établies. Certes, au-delà de toute réalisation concrète possible, qui peut être obtenue sur une feuille de papier à l'aide des outils techniques disponibles, une construction géométrique a une signification théorique, qui dépasse tous les objectifs pratiques apparents.

L'histoire des « problèmes impossibles » classiques, qui a tant engagé les mathématiciens grecs, clarifie le sens purement théorique du problème de construction (Henry, 1993). Les outils et les règles correspondent aux axiomes d'une théorie, de sorte que chaque construction correspond à un théorème spécifique ; le théorème établit les relations entre les éléments d'une figure géométrique, qui est représentée par le dessin produit par la construction, et *valide* ainsi la construction elle-même. La relation entre construction et théorème qui fournit une validation est très complexe, comme en témoigne la discussion qui date de l'antiquité entre problèmes et théorèmes (Heath, 1956, pp. 124-31).

Certes, la relation entre construction et théorème qui est valable par rapport à une théorie n'est pas immédiate, elle ne l'est pas spécialement pour les élèves (Mariotti, 1996), mais une organisation appropriée de l'environnement d'apprentissage permet d'activer un processus de médiation sémiotique basé sur des outils spécifiques (artefacts) d'un système de géométrie dynamique

D'une part, certaines des primitives et leur utilisation correspondent aux objets et propriétés de base de la géométrie euclidienne : en particulier, l'utilisation de la ligne droite et du cercle sont des allusions cohérentes au compas et à la règle.

D'autre part, la dynamique de manipulation des figures d'un SGD, en maintenant les propriétés construites par déplacement, respecte le critère de validation spécifique au sein du système de propriétés de la géométrie euclidienne.

En s'appuyant sur ces deux aspects qui relient un environnement GD et la Géométrie (comprise comme un système théorique), il est possible de construire une correspondance entre les constructions et les théorèmes, mais plus spécifiquement entre le critère de validation au sein du système GD et les critères de validation théorique.

En fait, l'utilisation de la règle et du compas génère un ensemble d'axiomes définissant le système théorique des éléments d'Euclide, donc tout problème de construction à résoudre dans la géométrie euclidienne – disons une construction géométrique – conduit à un théorème qui valide la procédure de construction qui le résout.

L'apparition des SGD a déclenché un nouvel intérêt pour les constructions géométriques. L'utilisation d'outils virtuels permet de simuler l'utilisation de la règle et de la boussole de la géométrie classique : des lignes et des cercles se croisant, dessinés au fil des siècles sur le sable, le papyrus ou le papier, sont maintenant reproduits sur un écran d'ordinateur. Tout SGD offre quelque chose de nouveau dans le monde classique des figures papier et crayon : les dessins à l'écran peuvent être exploités, en utilisant la « modalité de déplacement ». Cette modalité permet la transformation des figures d'écran, en changeant les points de départ de la construction, mais en conservant toutes les propriétés définies par la procédure de construction. En conséquence, la stabilité des propriétés caractéristiques de la figure dessinée par rapport au déplacement constitue le test naturel/standard d'exactitude pour toute tâche de construction dans un SGD.

De plus, considérons un SGD comme Cabri ou GeoGebra : les éléments de toutes les figures dynamiques sont liés selon la hiérarchie des propriétés déterminée par le processus de construction qui les ont produites. Une telle hiérarchie de propriétés correspond à une relation de dépendance logique entre elles, tandis qu'un sous-ensemble des outils disponibles dans un menu Cabri peut être lié à son ensemble correspondant d'outils de construction en géométrie euclidienne (Laborde & Laborde, 1991). Cette correspondance permet de mettre le contrôle par « glissement » en relation avec « théorèmes et définition » dans le système de géométrie euclidienne (Mariotti, 2000 ; Jones, 2000).[1]

En résumé, en ce qui concerne les outils disponibles dans un SGD, une double relation est reconnaissable. D'une part, les outils sont liés à la tâche de construction qui peut être résolue par leur utilisation, résultant dans l'apparition d'une figure dynamique, et à la stabilité d'une telle figure par déplacement ; d'autre part dans un SGD, des outils spécifiques peuvent être liés aux axiomes géométriques et aux théorèmes qui peuvent être utilisés pour valider la solution du problème de construction correspondant dans la théorie de la géométrie.

Par conséquent, le potentiel sémiotique d'un SGD est reconnaissable, résidant dans la double relation qu'il a avec la signification de figure dynamique, telle qu'elle émerge de l'utilisation de ses outils de dessin virtuels pour résoudre des problèmes de construction contrôlés par le test de déplacement, et la signification théorique de la construction géométrique telle qu'elle est définie dans la géométrie euclidienne par rapport à un ensemble d'axiomes donné.

Exploiter le potentiel sémiotique de l'artefact SGD devient donc l'hypothèse pédagogique clé inspirant la conception d'une séquence d'enseignement qui, selon l'itération de la structure d'un cycle didactique, consiste en des activités impliquant l'utilisation de l'artefact et des activités sémiotiques visant à l'élaboration individuelle et sociale des signes.

L'utilisation de l'artefact était centrée sur une *tâche de construction* qu'il exigeait des élèves de :

1) produire une figure dynamique avec des propriétés données, une figure qui devait être stable par déplacement ;

[1] En fait, un SGD fournit un ensemble plus large d'outils, y compris, par exemple, la « mesure d'un angle », la « rotation d'un angle » et autres. Cela implique que l'ensemble des constructions possibles ne coïncide pas avec celle qui ne peut être atteinte qu'avec la règle et le compas, voir (Stylianides & Stylianides, 2005) pour une discussion complète.

2) rédiger la description de la procédure utilisée pour l'obtenir et produire une validation 'géométrique' de la construction réalisée.

La tâche de construction consistait en deux demandes, la première correspondant à agir avec l'artefact, la seconde à produire un texte écrit faisant référence à de telles actions. Notez que la production d'un texte écrit consistait à la fois à décrire et à valider la procédure effectuée. La demande de *validation* de la solution avait du sens par rapport à l'environnement dynamique, correspondant à la nécessité d'expliquer et de mieux comprendre la raison pour laquelle la figure à l'écran réussissait le test de déplacement.

Le processus de médiation sémiotique qui démarrait dans la production sémiotique des élèves – les textes qui accompagnaient la construction dans le SGD – se déroulait par des interactions sociales orchestrées par l'enseignant dans de véritables discussions mathématiques (Bartolini Bussi, 1998 ; Mariotti, 2001). Alors qu'au tout début, le terme construction n'avait de sens que par rapport à l'utilisation d'outils virtuels particuliers et à la réussite du test de déplacement, plus tard, le sens avait lentement évolué, acquérant le sens théorique de la construction géométrique.

Une telle évolution pouvait être accomplie, sous la direction de l'enseignant exploitant la correspondance entre les axiomes euclidiens et les outils spécifiques du SGD et leurs modes d'utilisation. À partir d'un menu vide, le choix des outils appropriés pour commencer était discuté ainsi que la correspondance avec un ensemble *d'axiomes de construction* constituant le premier noyau de la théorie de la géométrie auquel toute validation pouvait se référer. Ensuite, tant que de nouvelles constructions étaient produites, les théorèmes correspondants étaient validés et ajoutés à la théorie. Les élèves pouvaient expérimenter et participer à deux processus parallèles d'évolution : d'une part, l'agrandissement du menu du SGD et, d'autre part, le développement correspondant d'une théorie de la géométrie.

Nous pouvons affirmer que les élèves ont été initiés à la culture des théorèmes, parce qu'ils n'ont pas seulement produit de nouveaux énoncés et leurs preuves, mais ils ont également eu l'occasion de prendre conscience de la théorie dans laquelle les preuves avaient un sens, et de la façon dont une telle théorie se développait.

Les résultats de plusieurs expériences d'enseignement à long terme attestent de l'émergence de significations intermédiaires, enracinées dans le champ sémantique de l'artefact, et de leur évolution en significations mathématiques, cohérentes avec la géométrie euclidienne. En particulier, l'expérience en classe a mis en évidence comment les significations émergeant de l'utilisation d'outils dans le monde contraint du SGD étaient efficaces pour développer et entrelacer le sens de la preuve et le sens de la théorie. L'utilisation d'un certain outil médie le sens de l'application d'un axiome ou d'un théorème, tandis que l'idée du menu dans le SGD, c'est-à-dire l'ensemble des outils disponibles, médie le sens de la théorie. La *conventionnalité* et la *nature évolutive* d'une théorie ont clairement émergé lors de discussions collectives où les élèves ont expérimenté à la fois l'établissement et le développement d'une théorie de la géométrie en exploitant la possibilité de personnaliser le menu en sélectionnant les outils à utiliser.

En résumé, un DGE offre un contexte riche et puissant pour initier les étudiants à une perspective théorique, dans la mesure où son utilisation et son fonctionnement dans la résolution de tâches spécifiques de construction fournissent un environnement pour des expériences phénoménologiques se référant aux significations mathématiques des :

- théorèmes géométriques qui valident une construction géométrique spécifique,
- actions métathéoriques liées au développement de la théorie par l'ajout de nouveaux théorèmes.

Les expériences en classe, réalisées à travers plusieurs expériences d'enseignement à long terme, ont confirmé à la fois le déploiement du potentiel sémiotique et l'évolution d'un sens entrelacé de la preuve et du sens de la théorie. Différents aspects d'une telle évolution sont présentés et discutés dans plusieurs articles (Mariotti, 2000, 2001, 2007, 2009), je ne donne ici que quelques exemples tirés de la riche collection de données collectées dans les expériences d'enseignement. Les extraits suivants fournissent des instantanés du long chemin d'évolution de la signification théorique de la construction et de sa relation avec la signification mathématique du théorème.

L'organisation du projet pédagogique

Il est facile de comprendre que l'établissement des règles est tout aussi important que le fait de les suivre. Voyons comment les règles de validation ont été définies et le signifié de *théori*e en tant que système de règles partagées établi.

Il y a deux niveaux de difficulté à affronter, qui présentent des problèmes différents, mais étroitement liés l'un à l'autre. D'une part, il faut introduire une nouvelle idée de validation qui ne repose plus sur l'acceptation immédiate et intuitive d'un fait, mais qui tienne compte d'un système de règles. D'autre part, ce système de règles doit être établi et clairement accepté et partagé par les élèves.

En général, au moment de l'introduction d'une axiomatique, ou des principes à partir desquels commencer nos déductions, nous sommes confrontés à une sorte de paradoxe : nous choisissons les axiomes en fonction d'un critère d'immédiateté intuitive qui les rend facilement acceptables comme vrais ; mais en même temps, une fois les axiomes établis, toute référence à l'intuition et aux critères de vérité évidente sera bannie. La confusion qui se crée entre ce qui est intuitivement vrai et ce qui est acceptable en termes de théorie est attestée par le comportement, souvent observé par les enseignants, des élèves qui, dans la démonstration d'un théorème, se réfèrent à des faits, ils disent « à des vérités », non encore démontrées et se justifient en déclarant : « c'est vrai ! ».

Voyons comment le projet s'est déroulé pour surmonter cette difficulté.

L'idée générale était d'utiliser l'environnement Cabri et d'initier progressivement les élèves à une géométrie déductive en construisant une correspondance entre la logique du logiciel et la théorie géométrique ; c'est-à-dire construire une relation dialectique entre les constructions de Cabri et les théorèmes de géométrie, basée sur la correspondance entre les commandes de Cabri et les propriétés acceptables en théorie. Mais comme je viens de le mentionner, le problème central est de négocier les règles d'acceptabilité d'une construction.

Cabri est un micromonde qui correspond à la géométrie euclidienne (géométrie « de la règle et du compas »). Le seul problème est qu'il ne s'agit pas d'un *micro* monde, mais plutôt d'un *macro* monde, autrement dit le logiciel tel qu'il est, est trop riche ; et surtout la validation d'une construction, en termes de théorèmes géométriques, présuppose ce contrôle sur le système géométrique qui est précisément le but ultime de l'éducation géométrique.

En fait, l'idée de base d'un micromonde est de fournir un environnement de résolution de problèmes dans lequel les élèves peuvent expérimenter les règles du système mathématique sous-jacent et, ce faisant, construire (dans leur propre esprit) leur propre système mathématique. Dans le cas de Cabri, la complexité du système mathématique sous-jacent est trop élevée, en réalité dans Cabri toute la géométrie euclidienne est

disponible en même temps (!), mais surtout, les relations entre les concepts de base disponibles à travers les primitives de Cabri (parallèle, perpendiculaire, milieu, bissectrice, etc.) restent largement cachées. En fait, les outils géométriques disponibles dans le « menu » standard de Cabri présentent une richesse en termes théoriques qui rend difficile l'établissement de la distinction entre ce qui est donné (axiomes) et ce qui doit être prouvé (théorèmes).

En ce sens, l'idée de base du projet, utiliser l'environnement Cabri comme médiation pour un environnement théorique, a été adaptée à nos objectifs. Pour surmonter les problèmes liés à l'ambiguïté entre axiomes et théorèmes, il a été décidé de ne pas utiliser le menu prêt à l'emploi de Cabri, correspondant à la géométrie euclidienne dans son ensemble, mais plutôt de construire avec les élèves, étape par étape, notre « menu ». Au début, un menu vide a été présenté et le choix des commandes à introduire a été discuté, correspondant à des affirmations spécifiques choisies comme faits de base à partir desquels commencer.

Par la suite, les commandes que nous décidons d'introduire seront discutées et négociées avec les élèves au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont faites et acceptées, correspondant à des théorèmes prouvés. De cette façon, nous avons essayé de faire participer les élèves à la construction d'une axiomatique ainsi que du « menu » correspondant dans l'environnement Cabri.

La progressivité avec laquelle les éléments de la théorie sont introduits a une contrepartie dans la transformation ultérieure du menu, qui acquiert de nouvelles primitives et est amélioré. L'accent mis sur la nécessité d'établir les règles et de les respecter est souligné par une certaine flagrante sensation avec laquelle une nouvelle primitive est ajoutée au « menu » et en même temps, un nouveau théorème est introduit. Comme pour un nouveau théorème, l'énoncé ainsi que sa « preuve » sont acceptés par la classe et transcrits dans un « Cahier de géométrie » personnel.

Les élèves connaissent la présence de primitives et savent aussi qu'il serait possible de les utiliser, mais la conscience des choix faits et la nécessité de les respecter, donnent un sens à la conventionnalité du système théorique qu'ils sont en train de construire et initient les enfants à la difficile distinction entre ce qui est vrai et ce qui est valide dans une théorie. Distinction qui, comme nous l'avons mentionné au début, constitue l'un des principales difficultés pour la compréhension du sens de la démonstration.

Dans le même temps, le système géométrique est construit progressivement, de sorte que la complexité augmente pas à pas : l'objectif est de fournir des niveaux successifs de complexité qui peuvent être maîtrisés par les élèves. Si le système complet est présent dès le début, il y a un risque que les élèves ne puissent pas contrôler toutes les relations en jeu, en particulier les relations entre ce qui *est donné* et ce qui *doit être démontré.*

Quelques exemples tirés des protocoles des élèves

Pour illustrer ce qui a été dit, nous allons présenter quelques protocoles. Ils concernent le même binôme d'élèves et les solutions proposées par eux sont liées à différentes tâches qui ont eu lieu dans le parcours éducatif. Dans la séquence des protocoles il est possible d'observer l'évolution de la perspective théorique, son lien avec le problème de construction et sa solution dans l'environnement de GD. Il est également possible de voir comment la clarification de la perspective théorique va de pair avec l'évolution de la forme expressive utilisée par les élèves.

Approche initiale

Comme expliqué ci-dessus, les élèves commençaient à travailler avec des menus Cabri vides qui étaient progressivement agrandis à la suite d'une discussion collective. Lorsqu'ils ont commencé à travailler sur la première tâche de construction, les menus avaient inclus les primitives du menu de création, et dans le menu de construction, les commandes étaient réduites à « Intersection d'objets », « Compas » et « Rapport d'angle[2] ». Du point de vue théorique, cette situation correspondait aux trois critères de congruence pour les triangles que les élèves avaient déjà incorporés dans leur système théorique et auxquels ils pouvaient se référer dans leurs démonstrations.

La tâche suivante est présentée aux élèves :

> Construire la bissectrice d'un angle. Décrivez et démontrez (justifiez géométriquement) votre solution.

Les élèves n'ont pas de difficultés à produire une construction, certains d'entre eux l'avaient déjà utilisée au collège. D'autre part, l'exécution de la procédure n'est que la première étape de la tâche. Des difficultés arrivent lorsque la procédure doit être décrite et surtout démontrée, ce qui veut dire justifiée selon les principes énoncés dans la théorie, c'est-à-dire se référant aux règles partagées et acceptées dans la salle de classe.

Alex et Gio (9th grade)

1ère tentative

> Nous avons pris deux points et nous avons fait passer une ligne à travers eux, puis nous avons pris un autre point *C*, qui n'appartient pas à la première ligne. Nous avons joint le point qui n'appartient pas à *r*1 avec une deuxième ligne, ce qui nous a permis de déterminer un angle.
>
> Nous avons transféré (ital. *abbiamo riportato*) un segment *AB*, appartenant à *r*1 et nous avons transféré le même segment sur *r*2 (*AB* = *AC*); nous avons dessiné deux cercles (centre, point) centre en *C* et point *A* et centre en *B* et point *A* (ital. *puntando in C e apertura AC e puntando in B con apertura AB*).
>
> Nous avons rejoint *A* et *D* (ligne passant par deux points). Nous avons pris l'intersection entre le cercle et la ligne, mais... [les élèves ont testé la construction avec le déplacement] RATÉ !

2ème tentative

> Nous avons dessiné un angle comme nous l'avions fait lors de la première tentative (figure 2). Nous avons dessiné un cercle (centre/point), en prenant un point appartenant à *r*1.
>
> Ce cercle nous a donné les segments *AB* et *AC* appartenant à *r*1 et *r*2, qui sont égaux parce qu'ils sont des rayons du même cercle. Nous avons dessiné deux cercles (centre *B* et *C* point *A*) en utilisant l'intersection de deux objets (des deux cercles) nous avons trouvé le point *D* que nous avons joint avec *A* déterminant la bissectrice de l'angle.

[2] La macro pour copier un angle ; elle était disponible dans une des premières versions de Cabri, utilisée à cette époque.

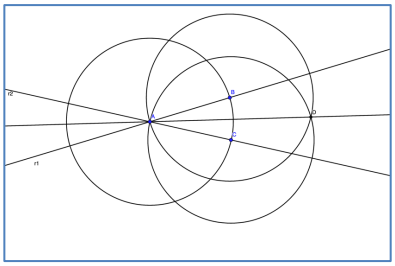

Figure 2 – La 2ème tentative

La solution est divisée en deux parties correspondant à des tentatives successives. Dans la première tentative, quelque chose s'est produit qui a conduit à l'échec de la construction ; malgré ce qu'ils avaient écrit, les élèves avaient rendu les deux segments *AB* et *AC* égaux « à l'œil ». Lorsque le binôme a réalisé que sa première tentative avait échoué, il a commencé une nouvelle tentative. Il est intéressant de noter que la première tentative a été considérée comme un échec parce qu'elle ne passait pas le test du déplacement. Cela signifiait que le test du déplacement avait été accepté comme moyen de vérification. Dans la deuxième partie, le texte de la description est plus précis, comme si, après le premier échec, les élèves avaient ressenti le besoin d'être plus attentifs à leur procédure de construction. En même temps, il présente une première trace rudimentaire d'une justification : « Ce cercle nous a donné deux segments *AB* et *CD* appartenant à *r*1 et *r*2, *qui sont égaux parce qu'ils sont des rayons du même cercle* ». Cette phrase, insérée dans la description de la procédure, ne peut être considérée comme une « preuve », néanmoins, elle montre que les élèves ont accepté la demande de justification et ont essayé d'utiliser les principes de validation provenant de la commande Cabri qu'ils ont utilisée.

Au fur et à mesure que la séquence des activités progresse, la théorie s'élargit ; lentement de nouvelles constructions font désormais partie de la théorie. En général, au moment où les élèves rencontrent une nouvelle tâche de construction, la théorie contient quelques éléments supplémentaires. Par exemple, après la construction de la bissectrice d'angle, la perpendicularité a été introduite et la définition formulée comme suit :

Définition. *La droite t est perpendiculaire à la droite s si et seulement si t est la bissectrice d'un angle droit avec le sommet sur s.*

Ensuite, le théorème suivant pour le triangle isocèle a été démontré.

Théorème. *Dans tout triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base opposée.*

La tâche suivante a ensuite été posée aux élèves :

> Étant donné une droite *r* et un point *P* ne lui appartenant pas. Construire la ligne perpendiculaire à *r* passant par *P*.

Voici la solution donnée par le même couple d'élèves, Alex et Gio.

> *Alex et Gio (9th grade)*
>
> Nous avons pris une ligne *r*, en passant par les points *A* et *B*, puis nous avons pris un point *C* n'appartenant pas à *r*.

Ensuite, nous avons dessiné un cercle (centre, point) ayant *AC* comme rayon, puis nous l'avons tracé, en se concentrant sur *A*. Nous avons dessiné un cercle (centre, point) ayant un rayon *BA* et un centre *B*.

Nous avons ensuite déterminé les points *C* et *D* avec « intersection de deux objets » et nous avons joint *C* et *D*.

$CD \perp AB$

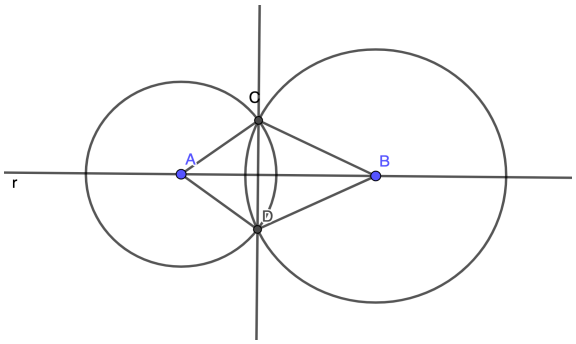

Figure 3 – La construction d'Alex et Gio

Démonstration
Considérons les triangles *ABC* et *ABD* qui sont égaux pour le 3ème critère →
AB en commun,
AC = *AD* parce qu'ils sont des rayons du même cercle
DB = *CB* car rayons du même cercle

Les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, donc les angles égaux $\angle ABC$ et *ABD* sont opposés aux côtés $\angle CA$ et *AD*. Les angles *CAB* et *BAD* sont opposés aux côtés *CB* et *BD*. Nous savons que les angles $\angle BCD$ et *BDC* sont égaux $\angle$ parce qu'ils sont à la base d'un triangle isocèle et que les angles $\angle ACD$ et $\angle ADC$ sont égaux.

Les triangles *DOA* et *AOC* [le *point O est marqué sur le dessin mais il n'a pas été explicitement défini*] sont égaux selon le 2ème critère, à savoir que les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, donc les angles *COA* et *DOA* sont égaux et les angles droits... Les angles *AOC* et *DBO* sont égaux car ils sont verticalement opposés.

Ce protocole, par rapport au précédent, montre que les élèves ont gagné un bon contrôle théorique dans la résolution de la tâche de construction : autant dans la conception de la procédure de construction, que dans sa validation. Ils sont capables d'utiliser les propriétés dérivées de l'usage des outils (le cercle et la ligne) mais aussi le théorème disponible dans la théorie.

Les élèves séparent clairement la description de la construction et sa justification. Et la preuve se réfère correctement à la théorie disponible. Ce n'est pas la construction la plus courante, et en fait, l'utilisation des deux points (*A* et *B*) déterminant la droite donnée *r*, produit deux cercles avec des rayons différents, ce qui rend la validation plus compliquée, nécessitant une analyse délicate de la figure surmontant les preuves intuitives. Néanmoins, Alex et Gio réussissent à trouver une justification, correctement liée au processus de construction, c'est-à-dire ne prenant en compte que les relations provenant de la construction et se référant à la théorie disponible.

Conclusions

L'approche didactique présentée ci-dessus s'inspire d'une analyse historico-épistémologique : dans les Éléments d'Euclide, il est possible de retrouver l'origine de la nature théorique des mathématiques, et en particulier le rôle clé joué par l'utilisation d'artefacts spécifiques dans la solution des tâches de construction. La perspective théorique obtenue dans la solution des problèmes de construction, peut fournir une clé pour accéder au sens général de la théorie.

Dans la solution d'une tâche de construction, l'utilisation d'artefacts spécifiques disponibles dans un EGD (par exemple les commandes spécifiques correspondant à l'utilisation de la règle et du compas) montre leur potentiel sémiotique par rapport au développement d'une approche théorique de la géométrie, amenant les élèves à résoudre des problèmes, énonçant des axiomes et prouvant des théorèmes, surmontant le sens pratique immédiat de la construction en tant que produit d'une image à l'écran, vers le sens théorique abstrait de la construction en tant que procédure pouvant être validée par des moyens théorétiques.

Fournir une justification de l'exactitude d'une construction est censé évoluer en fournissant une démonstration au sein d'une théorie, mais une telle évolution ne se produit pas spontanément, au contraire l'évolution révèle sa complexité, mais la spécificité de l'environnement auquel les arguments sont liés, et la direction directe de l'enseignant peut déterminer cette évolution. L'enseignant peut utiliser différents moyens pour accomplir sa tâche, mais l'artefact offre des outils spécifiques de médiation sémiotique qui peuvent être utilisés par l'enseignant en fonction de l'objectif éducatif particulier.

Traditionnellement, la géométrie est le domaine disciplinaire dans lequel les théorèmes et les preuves sont introduits ; bien que l'algèbre soit basée sur un arrangement théorique depuis plus[3] d'un siècle, elle semble être complètement réfractaire à un traitement théorique au niveau scolaire. Au contraire, des expériences dans ce sens ont été faites, précisément des expériences d'enseignement qui ont traité en parallèle à la fois l'algèbre et la géométrie dans la même classe (Cerulli et Mariotti, 2002).

Nous n'avons pas le temps de nous attarder sur cet aspect très intéressant du point de vue de la transposition didactique (Chevallard, 1985), cependant, il suffit de rappeler que ce qui est proposé pour la géométrie ne peut être séparé d'une attitude cohérente dans le traitement de l'algèbre, sous peine d'une dangereuse distorsion des objectifs pédagogiques. Bien que ce que nous avons présenté concerne une fois de plus le domaine géométrique où il semble être traditionnellement confiné, le problème de la preuve et d'une approche déductive concerne toutes les mathématiques et ceci offre à la didactique plusieurs opportunités.

Reférences

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning*, *7*, 245-274

[3]Peacock publia en 1830 son *Traité d'algèbre*, dans lequel il tentait de donner à cette branche des mathématiques une structure logique comparable à celle des Éléments d'Euclide. La méthode qu'il utilise, puis perfectionne en deux volumes publiés en 1842 et 1845, marque le début de l'approche axiomatique dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre.

Balacheff N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVIe Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France. hal-02981131.

Bartolini Bussi M. G. (1998). Verbal Interaction in Mathematics Classroom: a Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M Bartolini Bussi. & A. Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston VA: NCTM, 65-84.

Bartolini Bussi, M. G., and Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh (Eds). *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition* Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ, 746-805.

Cerulli M. & Mariotti M.A. (2002). L'algebrista : un micromonde pour l'enseignementet l'apprentissage de l'algèbre de calcul, *Sciences et Techniques Educatives*, Numéro spécial Algèbre vol 9 n°1-2, 149-170.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*, OISE Press, Toronto.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof, *Interchange* 21,1, 6–13.

Heath, T. L. (1956). (ed.) *Euclid. The thirteen books of the elements*, V.1, Dover.

Henry, P. (1993). Mathematical machines, in Hanken, H., Karlqvist, A. & Svedin U., *The machine as metaphor and tool*, Springer-Verlag, 101-122.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for a deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 55-85.

Laborde, C. & Laborde, J.M. (1991). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In In J. P. Ponte, J. F. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* NATO AS1 Series F, New York: Springer-Verlag ,177-192.

Lagrange, J. B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational studies in mathematics*, *43*(1), 1-30.

Mariotti M.A. (1996) Costruzioni in geometria, su *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 19B, 3, 261-88.

Mariotti M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics*, 44, 1&2, Dordrecht: Kluwer, 25 – 53.

Mariotti M.A. (2000). Constructions en Geometrie et le probleme de la preuve, *Actes de La X°Ecole d'été de Didactique de Mathematiques*, Houlgate, II- 115-122.

Mariotti, M. A. (2001a). Justifying and prooving in the cabri environment, *International Journal of Computer for Mathematical Learning, Vol. 6, n° 3* Dordrecht: Kluwer, 257-281

Mariotti, M.A. (2001b) La preuve en mathématique, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 1, 4, 437 – 458.

Mariotti, M.A. (2002). La preuve en mathématique, *ZDM,* 34, 4, 132-145.

Mariotti M.A. (2003). Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri, *Actes du Séminaire national de didactique de mathématiques*, vol. 1, pp. 173-186, Paris.

Mariotti M.A. (2007). Proof and proving in mathematics education. A. Gutiérrez & P. Boero (eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 173-204. Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands.

Mariotti, M. A. (2011). Artefacts et signes dans la théorie de la médiation sémiotique. *Actes de la XVI ième école d'été de didactique des mathématiques de Carcassonne, du 21 au 28 aout 2011*, 197-218.

Mariotti M.A. (2012). Proof and proving in the classroom : Dynamic Geometry Systems as tools of Semiotic Mediation, in *Research in Mathematics Education*, 14, 2, 163-85.

Mariotti M.A . (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM Mathematics Education,* 45, 441–452.

Mariotti, M. A. (2014). Transforming images in a DGS: The semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement. In *Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education* 155-172. Springer, New York, NY.

Mariotti M.A. (à paraitre). La contribution des environnements technologiques à l'enseignement de la preuve, *Actes de la XI École d'Été de Didactique des Mathématiques,* Ile de Ré 18-24 oct. 2021.

Mariotti M.A., Maracci M (2010). Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In: G. Gueudet, L. Trouche. *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en Mathématiques* . Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP, 91-107.

Mariotti, M. A.; Bartolini Bussi, M.; Boero, P.; Ferri, F.; Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts, *Proceedings of PME-XXI*, Lahti, vol.1, pp. 180-195

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: A. Colin Editions.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10: 31–47

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*, 137-162.

Vinner, S. (1999). The Possible and the Impossible, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 99/2, 77.