CONSTRUIRE LA DEFINITION DE LA LIMITE INFINIE EN TERMINALE

Sylvie ALORY, Renaud CHORLAY, Vincent JOSSE

Résumé : A la transition entre le secondaire et le supérieur, la rencontre avec une définition de la notion de limite constitue l'un des points de passage obligés pour l'entrée dans le système de preuve de l'analyse. Depuis les années 1970, de nombreuses études didactiques ont construit un corpus cohérent relatif aux défis et difficultés spécifiques à cette notion ; plusieurs ingénieries ont exploré des pistes visant à les surmonter. Nous présentons ici une ingénierie conçue dans le cadre de la théorie des situations didactiques et visant à la formulation – par des élèves de terminale scientifique et dans des conditions d'enseignement ordinaire (2h, en classe entière) – d'une définition mathématiquement correcte de la notion de limite infinie d'une suite numérique. On s'inscrit ici dans la perspective des travaux de Cécile Ouvrier-Buffet, tout en proposant de compléter la gamme des situations de construction de définition en mettant l'accent sur les tâches de différenciation conceptuelle entre concepts à la proximité trompeuse.

Une ingénierie adossée à la recherche, compatibles avec les programmes et des conditions d'enseignement ordinaires

Une séance compatible avec les programmes et des conditions d'enseignement ordinaires

Notre atelier présente une séance en Terminale visant à faire *formuler* et *valider* par les élèves une définition mathématiquement correcte de la notion de limite infinie pour les suites. La séance a été conçue et mise en place durant l'année scolaire 2016-2017 en Terminale S, et reproduite depuis. Elle demeure compatible avec les programmes de la spécialité de Terminale, dont sont tirés les extraits suivants (BO spécial n° 8 du 25 juillet 2019).

Sur le thème spécifique des limites, le programme vise un équilibre entre une robuste intuition appuyée sur la familiarité avec des exemples variés, et une ouverture sur des définitions qui seules permettent de construire des démonstrations :

> Les buts essentiels du programme de la classe terminale sont de donner aux élèves une bonne intuition des notions fondamentales : convergence, limites, dérivées, intégrales et une solide pratique des calculs afférents.
> (…) Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

On verra que l'ingénierie vise à l'appropriation active d'un répertoire d'exemple permettant d'inviter les élèves à formuler et distinguer précisément plusieurs propriétés : croissance (y compris « à partir d'un certain rang »), majoration, limite infinie.

Outre les démonstrations de propriétés de cours (limites et comparaison, opérations sur les limites, suites de références), le programme met en avant deux démonstrations exemplaires à travailler avec les élèves et reposant directement sur le bon usage d'une définition de la divergence vers $+\infty$:

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

Pour atteindre cet objectif, il nous a semblé utile d'aller jusqu'à une définition plus formelle que celle indiquée dans le programme : « La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. »

Au-delà du contenu spécifique de la séance, ses choix de construction et ses objectifs recoupent les objectifs généraux du programme de spécialité de Terminale, par exemple sur la place des échanges oraux dans les situations d'exploration et d'argumentation :

> Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales à travers notamment la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs … L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

On verra que la séance est organisée en différents temps dont la plupart vise à permettre des échanges de nature argumentatifs, le plus souvent entre élèves (sous la régulation de l'enseignant), parfois avec l'enseignant. Elle vise non seulement à la production d'un discours vrai, mais aussi à une invalidation argumentée d'erreurs usuelles dont la situation vise l'explicitation, dans l'esprit du programme :

> L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

En outre, la séance s'inscrit dans le cadre des situations de construction de définitions ; situations dont on sait la rareté dans l'enseignement. Elle contribue ainsi à élargir la gamme des tâches mathématiques rencontrées par les élèves :

> La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Ce dernier point est ici particulièrement pertinent, puisque les définitions formelles des concepts d'analyse et leur usage dans quelques démonstrations exemplaires constituent sans doute le principal point de contact entre, d'une part, les pratiques et contenus typiques du secondaire, et, d'autre part, les pratiques et contenus typiques d'un enseignement supérieur académique (Licences ou CPGE scientifiques). Cette transition, ses difficultés, ses discontinuités, ont fait l'objets de nombreux travaux. Ses enjeux nous semblent bien résumés par la distinction proposée, à la suite d'Yves Chevallard, par Maggy Schneider, entre une praxéologie « modélisation » (type 1 ci-dessous) et une praxéologie « système de preuve de l'analyse » (type 2) :

> Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens d'Y. Chevallard (1991), c'est-à-dire d'objets dont l'existence résulte, aux yeux de personnes assujetties à une même institution, d'un « croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées ». Un tel objet « n'est pas construit mais présenté, par une *deixis* qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; (…) De tels objets préconstruits jouent un rôle indéniable dans l'apprentissage, pouvant constituer des objets mentaux au sens de H. Freudenthal (1973) que j'ai retravaillé personnellement (Schneider, 1988) comme « substituts de concepts

» auxquels sont associés des convictions, des « images » qui peuvent soit faciliter, soit entraver l'apprentissage des concepts mathématiques correspondants. (…) les objets préconstruits, existant d'abord par le truchement d'une désignation, se mettent à exister par le truchement d'une définition au sein d'une théorie, cette définition donnant prise à une organisation véritablement déductive. (…) Entrent en jeu alors les praxéologies de type 2 dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies de type 1. Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des *proof-generated* concept[22]s au sens de Lakatos (1985), l'exemple typique étant celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités et inspirant un modèle de preuve faisant abstraction de toute considération géométrique ou cinématique. (Schneider, 2007, p.33).

Des choix adossés à la recherche

Ce travail s'appuie à la fois sur la littérature de recherche sur la notion de limite et sur celle, plus restreinte, sur les situations de constructions de définitions (Ouvrier-Buffet, 2015) (Zandieh & Rasmussen, 2010). Une publication de type « recherche » en rend compte en détail, cherche à justifier nos choix, et propose des outils permettant d'affirmer le maintien d'un certain niveau d'adidacticité dans la mise en œuvre de l'ingénierie (Chorlay, 2019). Nous nous plaçons ici dans le cadre des situations à co-didactiques ou à dimension a-didactique (Bloch & Gibel, 2011), au sens où l'on souhaite contrôler la réelle appropriation par les élèves des enjeux de la situation et du rôle moteur de leurs actions dans le cheminement négocié vers une définition. Le présent texte ne peut entrer dans la plupart de ces considérations théoriques : nous visons ici à expliciter nos choix et à donner un aperçu des déroulements typiques observés en classe, en particulier de la définition produite dans le cadre de la phase finale d'interaction entre les élèves et l'enseignante.

La situation combine des éléments déjà utilisés dans d'autres recherches, par exemple des situations de tri visant à faire expliciter un critère de tri qui soit une propriété caractéristique, donc une définition possible (Ouvrier-Buffet, 2015). La combinaison d'un travail sur un petit échantillon de suites aux comportements variés, et d'un travail d'évaluation d'affirmations qui sont soit des candidats-définitions à accepter ou rejeter, soit des briques élémentaires appelées à s'intégrer dans une définition complexe s'inspire, entre autres, des travaux de Robert (1982) et de Roh et Lee (2017). Le travail explicite d'invalidation de propositions erronées est utilisé par Robert (1982) et Przenioslo (2005). Signalons aussi les choix négatifs : la définition n'émerge ni d'une situation de modélisation (comme dans (Bloch & Gibel, 2011)), ni comme *proof-generated definition* – dans laquelle le besoin et les matériaux de formulation d'une définition émergent de la recherche de preuve d'une conjecture. De même, on pouvait imaginer aborder la question des limites par les fonctions plutôt que par les suites ; et par les limites finies plutôt que les limites infinies. Enfin, tout en reconaissant que la notion de limite ne joue dans le supérieur un rôle « Formalisateur – Unificateur – Généralisateur » (Robert, 1998), un scénario s'appuyant sur ces fonctions ne nous a pas semblé pouvoir vivre au lycée.

Un scénario construit autour d'un enjeu de différenciation conceptuelle

La recherche établit solidement que trois propriétés des suites sont souvent associées dans l'intuition des élèves, soit qu'ils n'aient eu des limites qu'une approche intuitive (par lectures

[22] Au sens de concept dont la définition est précisée dans la cadre de la recherche d'une démonstration visant à valider une conjecture relative à une classe d'objets au départ lâchement caractérisée (i.e. sans définition) (Lakatos, 1984).

graphiques ou explorations numériques), soient – ce qui est plus problématique – après que les notions ont été définies en cours. Ces trois propriétés sont :

(1) tendre vers +oo,
(2) être non majorée,
(3) être croissante (au moins à partir d'un certain rang).

Nous faisons l'hypothèse que cet amalgame implicite – qu'on le décrive en tant que *concept image* ou que théorème en actes – est non seulement source de difficultés mais aussi, potentiellement, un levier d'apprentissage. Nous cherchons à construire une situation dont l'enjeu est l'explicitation des liens entre ces concepts ; explicitation qui conduit à revoir utilement les définitions de (2) et (3) et à produire une définition de (1).

Outre cette hypothèse macro, le scénario s'appuie sur des sous-hypothèses :

- La proximité entre (1) et (2) est susceptible d'engendrer de la dissonance cognitive (un sentiment d'insatisfaction envers ce qu'on tient pour des connaissances ou des critères de décisions), permettant d'amener les élèves à ressentir le besoin d'une définition de termes jusque-là utilisés trop librement.
- Problématiser la question de l'unicité de la limite (par exemple : peut-on dire que la suite de terme général $(-2)^n$ tend à la fois vers $-\infty$ et $+\infty$?) est un levier pour engendrer cette dissonance cognitive. L'histoire des mathématiques montre que différentes notions de limites, toutes justes, se sont succédées, certains n'impliquant pas l'unicité (ce qu'on appelle aujourd'hui une valeur d'adhérence). Le choix d'une définition garantissant l'unicité est un choix conventionnel de la communauté des mathématiciens, il ne peut donc pas émerger d'un milieu de manière adidactique. Il sera donc imposé par l'enseignant.
- Du point de vue formel, la définition visée de (1) peut être construite en « bricolant » la définition formelle de (2) : $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x_n > M$
  (2) étant une condition nécessaire mais non suffisante de (1), on demandera comment renforcer (2) pour assurer l'unicité de la limite, ce qui aboutit à définir (1).

Dans l'ensemble, le scenario s'avère assez robuste, et produit en général une première définition correcte un peu inhabituelle. Plutôt que la définition « implicative »

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_M \implies u_n \geq \mathrm{A},$$

ou sa version sans implication explicite

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in [n_M; +\infty[\cap \mathbb{N} \quad u_n \geq M$$

les élèves utilisent l'addition pour désigner les rangs supérieurs ou égaux à n_M

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n_M+n} \geq M.$$

Aperçus sur les déroulés

Prérequis et vue d'ensemble de la séance

Nous proposons la séance en novembre-décembre. En septembre un premier cours sur les suites a abordé tous les aspects sauf les limites. Des suites atypiques ont déjà été présentées aux élèves ; avec la calculatrice ou l'ordinateur, la tabulation et la représentation graphique d'une suite par un nuage de points ont été fréquemment utilisées par les élèves. Un travail sur la définition d'une suite non majorée a été mené.

Par ailleurs, les élèves ont déjà été mis en situation de recherche en classe, par exemple dans la découverte du raisonnement par récurrence. Les élèves ont aussi été habitués à utiliser les quantificateurs et un travail sur la logique a été mené afin de clarifier l'implication et l'équivalence ; afin de donner un sens précis aux expressions « il faut que », « il suffit que », « condition suffisante », « condition nécessaire ».

Quatre phases dans la séance de 2 heures :

- Tri de suites (élèves en autonomie, 25 min) ; problématisation de la question de l'unicité et reconnaissance de l'absence et du manque d'une définition (cours dialogué, 25 min)
- Production par les élèves de candidats-définitions (élèves en autonomie, 10 min)
- Evaluation des candidats-définitions (cours dialogué, 25 min)
- A partir de la version formelle de (2), la renforcer jusqu'à obtenir (1). (cours dialogué, 20 min)

Dans la suite du texte, nous détaillons quelques moments clés du déroulement de la séance lors de la première expérimentation, en novembre 2016. La séance, avec de petites variantes, a été reproduites 12 fois : dans deux classes de Terminale, chaque année de 2016-2017 à 2021-2022.

Aperçus sur la phase 1

Le professeur distribue le document suivant (appelé par la suite « herbier » ou « bestiaire ») et explique le fonctionnement de la séance, en précisant qu'il ne jouera qu'un rôle de régulateur et de secrétaire en écrivant au tableau certaines choses dites par les élèves, qu'elles soient justes ou fausses. On explique aux élèves le déroulement de la phase 1 et on leur demande de préparer en binômes leurs arguments pour la discussion collective. Le professeur annonce qu'il ne prendra pas parti, et que chaque binôme devra tenter de convaincre la classe de la pertinence de son classement.

Parmi les suites définies ci-dessous, quelles sont celles dont vous diriez qu'elles tendent vers $+\infty$?

Pour tout entier naturel n, on pose :

$a_n = \dfrac{n}{100} - 1000$ $\quad$ $b_n = 10000 - 1000 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ $\quad$ $c_n = \sqrt{\sqrt{n}}$

$d_n = (-1)^n \times n$ $\quad$ $e_n = 10 \times (-1)^n + n$ $\quad$ $f_n = \left((-1)^n + 1\right) \times n$

$g_n = \left((-1)^n + 2\right) \times n$ $\quad$ $h_n = 1000n - \dfrac{n^2}{1000}$ $\quad$ $i_n = \left|\dfrac{1000}{\cos(n)}\right|$

Rangez ces suites dans le tableau suivant ; lorsque vous rangez une suite dans la colonne du milieu, notez la raison pour laquelle vous le faites.

Je pense que la suite tend vers $+\infty$	Je ne sais pas	Je pense que la suite ne tend pas vers $+\infty$

Document 1. L'herbier – la tâche de tri.

Tous les binômes se sont toujours lancés avec entrain dans le classement. On observe une certaine réticence à utiliser la colonne « je ne sais pas » ; il peut être bon d'inciter les élèves à s'en servir. Certains élèves sont bloqués à l'idée de donner une mauvaise réponse ; il faut alors les rassurer et les inciter à prendre parti. Lorsqu'il y a dissension au sein d'un binôme, il est bon de leur demander de noter leurs arguments respectifs, pour préparer la discussion à venir. Avant de lancer la discussion collective, s'assurer que tous les binômes ont eu le temps d'étudier suffisamment de suites (au moins jusqu'à la suite *f*). Les suites *h* et *i* ne servent qu'à occuper les binômes les plus rapides.

Lors de la discussion collective sur le classement, l'accord arrive rapidement pour les suites *a*, *b* et *c*. Le premier désaccord profond porte sur la suite *d* : certains pensent qu'elle tend vers plus l'infini et vers moins l'infini, donc elle est classée dans la colonne « je pense que la suite tend vers plus l'infini » ; beaucoup la mettent dans la colonne « je ne sais pas » et certains dans la colonne « ne tend pas vers plus l'infini ». Il en va de même pour la suite *f*. Un autre désaccord porte sur les suites *e* et *g*, réparties entre « tend vers plus l'infini » et « je ne sais pas ».

Sur douze séances, il n'est arrivé qu'une seule fois que les élèves soient tous d'accord sur le classement final, en ne mettant aucune suite dans la colonne « je ne sais pas ». En cas de désaccord persistant, si le professeur demande pourquoi on n'arrive pas à se mettre d'accord, les élèves réalisent qu'ils ne savent pas *vraiment* ce que veut dire « tendre vers plus l'infini » ; ce n'est donc pas leur description de telle ou telle suite qui est imparfaite, mais bien le critère de tri qui demande à être explicité de manière à permettre des décisions consensuelles. Parfois, ils vont jusqu'à dire qu'il leur manque une définition. Sinon, le professeur peut poser cette question : « que nous manque-t-il ? » A ce moment, le mot « définition » est prononcé par un élève, ce qui permet de passer à la phase 2.

Dans le cas unique où les élèves étaient tous d'accord, le professeur a demandé aux élèves de démontrer qu'une des suites considérées tendait bien vers plus l'infini. Comment faire une telle démonstration ? à partir de quoi ? Le mot « définition » a alors été formulé, ce qui permet de passer à la phase 2.

Aperçus sur la phase 2

Avant que les élèves écrivent leurs propositions de définition, le professeur précise que la définition cherchée *doit assurer l'unicité de la limite* ; par conséquent la définition de « tendre vers $+\infty$ » ne doit pas être vérifiée par les suites *d* et *f*, alors qu'elle doit l'être par *e* et *g*.

En quatorze séances, aucun binôme n'a proposé une définition correcte, ce qui était parfaitement attendu. Les propositions sont plus ou moins formalisées, et montrent des bricolages plus ou moins heureux autour des notions de « non majoré » et de « croissant ». Rappelons que le but de cette phase n'est pas d'obtenir une définition, mais le support du travail pour la phase 3.

Voici une sélection de propositions. Dans le document ci-dessous, l'enseignante a déjà sélectionné une partie des candidats-définitions produits en fin de 1ère heure, et a préparé le document ci-dessous comme support du travail de 2ème heure. Elle a numéroté les candidats pour faciliter la discussion. Pour que la phase 3 s'amorce facilement, on place au début des candidats-définitions que les élèves rejetteront facilement.

(1)

Pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$.

(2)

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, et seulement si pour tout entier naturel n, (u_n) est croissante et non majorée.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$ et (u_n) non majorée

(3)

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ ~~si quand n tend vers +∞ u_n~~ quand elle n'est pas majorée.

(4)

suite (U_n) tend vers $+\infty$:

suite croît en se rapprochant de plus en plus de $+\infty$ mais sans jamais l'atteindre.

(5)

Une suite (U_n) qui tend vers $+\infty$ est une suite dont les termes sont croissants de manière à ce qu'on ne puisse déterminer le dernier terme de cette suite

Document 2. Proposition de définitions de « $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$ »

Aperçus sur la phase 3

On trouvera dans (Chorlay, 2019) des comptes rendus plus complets des échanges des phases 3 et 4, ainsi que des propositions d'outils théoriques inspirés de (Ouvrier-Buffet, 2015) permettant d'analyser la nature des interactions élèves-enseignante et le degré de dévolution de la tâche de construction de définition. Quelques extraits d'une des deux expérimentations de 2016 permettent d'illustrer la manière dont les élèves avancent dans le travail d'évaluation des candidats-définitions, à accepter ou à rejeter ; assez vite, les rejets conduisent à des propositions de reformulation.

Ainsi, la notion de « croissante » est rapidement affaiblie en « croissante à partir d'un certain rang » :

> Ens. : alors, on y va … (…) on fait des maths. On se concentre à nouveau. Alors Angèle, qu'est-ce que tu penses de la première proposition « pour qu'une suite tende vers +oo il faut que pour tout *n*, *u*(*n*+*1*) soit supérieur à *u*(*n*) »
>
> Angèle : j'pense que c'est faux parce qu'une suite elle peut être décroissante puis croissante

C'est aussi l'occasion de voir qu'une propriété peut être modifiée : ici dans le sens de l'affaiblissement ; on l'espère, plus tard, dans le sens du renforcement (pour passer de « non majoré » à « tend vers $+\infty$ »).

Le rôle de l'herbier est vite saisi :

> Ens. : (…) Est-ce qu'il y en a d'autres qui ont d'autres arguments – il faudrait peut-être noter les arguments, pour évacuer les définitions qui ne vous plaisent pas - … Mattias

Mattias : si on regarde b_n, on peut voir que la suite elle est croissante, et elle tend vers 10000

Ens. : oui, si on prend les suites qui sont dans l'herbier, elles peuvent servir de … de quoi ?

Mattias : d'exemple

Ens. : contre-exemple.

Les échanges suivants montrent le rôle discret mais essentiel de l'enseignant dans la demande d'une explicitation des aspects logiques ; ici des implications, plus loin des quantificateurs.

Ens. : d'accord, OK. Alors, du coup, la 3, qu'est-ce que vous en pensez ? là je peux effacer ça … Alors, la 3 c'est : « la suite tend vers +oo quand elle n'est pas majorée ». Rémi ?

Rémi : ça a l'air pas mal parce que … c'est une condition nécessaire et suffisante.

Ens. : alors, d'abord, est-ce que la phrase c'est une condition nécessaire et suffisante qui est écrite ? … c'est pas très clair ; le « quand » en mathématiques … qui est l'auteur de cette phrase … c'est Rémi ! Rémi, ce « quand » qu'est-ce que tu voulais dire ?

Rémi : je voulais dire « si »

Ens. : alors, tu voulais dire – du coup on va l'écrire : « si $u(n)$ n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$ ». Alors, maintenant qu'elle est écrite de façon à ce qu'on comprenne tout … quelle est la condition suffisante ; du coup qu'est-ce que vous en pensez ? Isabelle

Isabelle : on a vu dans le cas d'une suite que ça faisait [geste décrivant $(-1)^n \times n$] … d'un côté ça tend vers l'infini, de l'autre aussi vers –oo

Ens. : c'était d_n je crois, dans la liste

Isabelle : elle était pas majorée mais elle tendait pas forcément vers +oo, parce qu'elle était pas non plus minorée.

Ens. : alors, il faudrait qu'elle soit minorée pour tendre vers $+\infty$

Isabelle : je pense

On observe ci-dessus la stratégie que Lakatos appelait *monster-barring* (interdiction des monstres) : on rend le candidat-définition plus strict en ajoutant une clause permettant d'exclure une pathologie spécifique (Lakatos, 1984) (Ouvrier-Buffet, 2015). Comme on cherche une définition sous laquelle $(-1)^n \times n$ ne tombe pas, passer de « non majoré » à « non majoré mais minoré » est une manœuvre raisonnable, d'ailleurs souvent observée.

Aperçus sur la phase 4

La phase 4 passe par la reconnaissance du fait que : (a) la notion de croissance (fut-ce à partir d'un certain rang) n'est ni nécessaire ni suffisante à la divergence vers $+\infty$, elle ne peut donc pas jouer de rôle dans la définition ; on peut cependant annoncer aux élèves que leur idée (très présente dans ces échanges) selon laquelle une suite croissante et non majorée tend « forcément » vers $+\infty$ est juste, et que ce sera un théorème prochainement démontré en cours. (b) le fait d'être « non majoré » est une condition nécessaire mais non suffisante de divergence vers $+\infty$. Selon les années, le passage au registre formel vient de l'enseignant ou des élèves ; dans ce dernier cas, la transition entre les phases 3 et 4 est insensible.

Ens. : Alors, du coup, il y a un groupe retardataire qui propose une autre définition ; on va l'appeler 6. Alors, il y a écrit ça sur la feuille [copie au tableau] Alors … Paul, qu'est-ce que vous en pensez de la proposition 6 : « quel que soit …(tout le monde arrive à l'écrire la phrase, comme l'on écrite Maxendre et Georges ?) pour tout M appartenant à **R** il existe *n* appartenant à **N** tel que u_n est plus grand, strictement, que M »

[écrit au tableau :] $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > M$

Ens. : Alors, qu'est-ce que ça veut dire ça pour la suite ? … que la suite n'est pas majorée. D'accord, Maxendre et Georges ? On avait dit que c'était … qu'on allait le retenir parce que c'était une condition … [les élèves : nécessaire] nécessaire, mais pas suffisante, d'accord ? Donc ça c'est en fait « $u(n)$ non majorée ». Est-ce que l'idée que ce ne soit pas majoré c'est une idée importante pour dire que ça tend vers $+\infty$? Est-ce qu'on le garde ? … on a dit que, si c'est pas une condition suffisante, ça veut dire qu'il faut quoi ? … il en faut une autre, il faut qu'on en rajoute une autre, d'accord ?

[Un élève re-propose d'ajouter “et minorée”, explicitement pour éliminer$(-1)^n\times n$]

L'enseignante reformule “non majoré” et souligne le fait que ça ne garantit pas plus que l'existence, pour chaque M, de un rang n pour lequel $u_n > M$. Elle dessine un repère et place un nuage de point de type « suite », deux horizontales de côtes M et M', illustrant sur le schéma le sens de cette existence. Au-delà d'un tel rang n, rien n'est imposé à la suite. La difficulté est que les élèves, pour exprimer le fait que la suite doit « rester au-dessus » de M au-delà du rang n, pensent plutôt à reproposer la croissance (comparaison entre termes de la suite, du type $u_{n+1} \geq u_n$) plutôt que la condition visée (comparaison entre certains $u_{n'}$ et M).

Ens. : Et comme dit Andréa, il ne faut pas … qu'elle repasse en dessous. Il faut qu'on l'oblige à faire quoi ?

Elève 1: à rester au-dessus.

Ens. : à rester au-dessus. Donc qu'est-ce qu'il faut changer dans cette phrase ?

Elève 2 : monotone ?

Elève 3 : strictement croissante

Ens. : non, on a dit que la monotonie, ce n'était pas une condition pour notre définition. Comment est-ce que vous pouvez le traduire : « il faut qu'elle reste au-dessus » ? Allez, je suis sûr que tout le monde peut le faire. … Maxime ?

Maxime : $u(n+1)$ supérieur à M

Ens. : alors attend, écris-moi une phrase complète s'il te plaît. [sous la dictée] « pour tout M appartenant à **R**, (…) » alors on va l'appeler « n indice M » pour dire qu'il dépend, parce qu'à chaque fois que je choisis un M, c'est pas forcément le même, on est d'accord ? [élève : oui] donc « il existe un indice, un rang … » [sous la dictée] « u_n supérieur à M, et u_{n_M+1}supérieur à M ».

Quoique fausse, cette proposition marque un tournant important car, dans le symbole à deux places X_Y, elle initie un travail sur la place de la variable Y. En outre, et cela s'est produit à plusieurs reprises, la proposition « *u(n+1) supérieur à M* » s'avère être un moyen, inspiré de la démonstration par récurrence, pour indiquer une propriété héréditaire :

Ens. : alors, qu'est-ce que vous en pensez ? [silence] … faites des dessins, faites des dessins… tu voulais l'empêcher de redescendre, hein ?

Maxime : mais oui, mais ça veut dire qu'après $u(n+1)$ ça devient $u(n)$ et, le $u(n+1)$ suivant ça sera toujours supérieur…

Ens. : alors, tu es d'accord que comme ça ça va pas, parce que là y'en a qu'un … est-ce que vous voyez ce que veux faire Maxime ?

Maxime : (…) $u(n+x)$

S'appuyant sur le fait que des élèves demandent à Maxime d'expliquer qui est son « x », l'enseignante reformule en demande de quantification : « pour un x » ou « pour tout x » ? On arrive à la définition « additive » :

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists\, n_M \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n_M+n} \geq M.$$

Ce candidat définition est accepté par la classe. Le passage à la définition implicative (explicite ou implicite) peut être mené par l'enseignant. En novembre 2016 il a été proposé par les élèves eux-mêmes lorsque l'enseignante leur a demandé de « simplifier » leur candidat-définition. Sous la dictée de Maxendre, l'enseignante écrit au tableau :

$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_M \in \mathbb{N}\ \ tel\ que\ \forall\, n > n_M \quad u_n > M$

Variantes et prolongements

A condition que l'enseignant veille à ne pas orienter les débats qu'il encadre, cette séance permet aux élèves d'explorer la notion de suite qui tend vers plus l'infini de diverses façons, dans lesquelles l'oralité joue un rôle important. Au fil du temps, d'une part les deux enseignants ayant mis en œuvre cette séance ont effectué différentes modifications ; d'autre part, les propositions des élèves ont été plurielles.

Variantes du côté des enseignants

Lorsque la définition d'une suite majorée par une nombre réel est formulée en nommant M le majorant, on retrouve cette lettre M dans la définition d'une suite qui tend vers plus l'infini (comme on l'a vu ci-dessus). Or, à l'oral, cette définition avec les nasales M et N est difficile à bien entendre. Dès la deuxième année, la définition d'une suite majorée a été formulée en disant : il existe un réel A tel que… etc.

L'herbier a été modifié. Les suites h et i de l'herbier ont été remplacées par $h_n = 10^6 \times \cos(n)$ et $i_n = n + 4\sin(n)$. Ces deux suites sont de meilleurs appuis comme contre-exemples aux propositions des élèves.

La première fois où cette séance a été mise en œuvre, l'une des deux classes n'a pas abouti à la formulation de la définition en 2h, l'enseignant n'ayant sans doute pas assez cadré les débats ; il a fallu prendre 20 minutes sur le cours suivant pour conclure. Le cadrage en temps indiqué précédemment résulte de l'expérience acquise, ce qui a ensuite toujours permis d'aboutir en 2h.

Les premières années, les élèves ont eu du mal à se détacher des suites croissantes non majorées ; à partir du moment où l'enseignant a formulé clairement que le fait qu'une suite croissante non majorée tende vers plus l'infini sera un théorème qui sera démontré dans le cours, mais ne peut constituer la définition cherchée, cette difficulté a été levée.

De même, la nécessité d'imposer l'unicité de la limite comme condition pour la définition cherchée n'était pas claire pour les enseignants lors de la première séance ; or, comme expliqué ci-dessus, ceci ne peut pas venir des élèves.

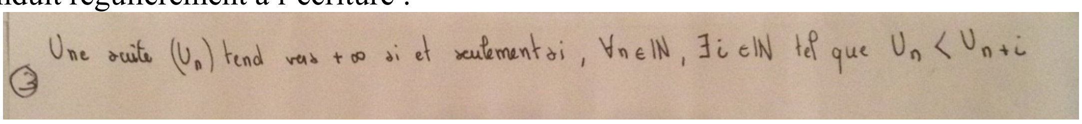
La manière de présenter les candidats-définition à la classe a pris différentes formes selon les années : écriture sur des bandelettes numérotées, collées et photocopiées (attention au crayon à papier qui ne passe pas à la photocopie !), utilisation de posters, définitions écrites par l'enseignant à l'ordinateur puis projetées…

Mener cette séance a été au début une prise de risque assumée et enrichissante pour les enseignants ; leur pratique des débats s'est ainsi affermie et leur manière d'écouter les élèves s'est affinée.

Variantes du côté des élèves

Les classes sont toutes différentes, et les débats s'en trouvent plus ou moins animés ; mais les élèves ont toujours su s'écouter et échanger leurs arguments. Devant la difficulté de parler pour formuler des pensées qui sont d'abord floues, les élèves inventent un vocabulaire original qui varie d'une année à l'autre.

La notion qui revient souvent est celle de suite « globalement croissante » pour décrire une suite non monotone (même à partir d'un certain rang) qui tend vers plus l'infini. Cette notion conduit régulièrement à l'écriture :

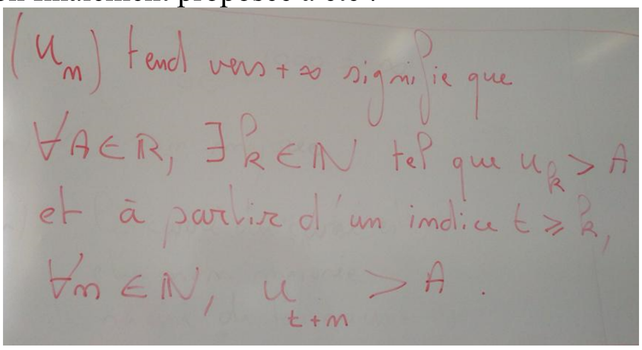

3 Une suite (U_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $U_n < U_{n+i}$

Avec cette formulation (ajouté à la condition : suite non majorée), l'élève se situe dans un entre deux, entre la condition *suite non majorée* qui est trop faible et la condition *suite non* *majorée et croissante* qui est trop forte. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles la définition finale est souvent formulée ainsi : $\forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{k+n} \geq A$.

Une année, pour exprimer le « quel que soit A » de la définition, une élève a inventé l'expression « A flottant », ce qui a permis à la classe de mieux comprendre cette partie de la définition, et le fait que k (dans la définition écrite juste au-dessus) dépendait de A.

Une fois dans une classe, les élèves ont exprimé la notion de suite qui tend vers plus l'infini de manière dynamique, par exemple avec ce type d'expression (écrite au tableau par l'enseignant sous la dictée d'un élève) : « (d_n): $Si\ (d_n)\ est\ partie\ vers\ +\infty\ elle\ ne\ peut\ pas\ revenir$ ».

Du coup, la définition finalement proposée a été :



Document 3. Une formulation intermédiaire.

Dans cette définition, l'indice a été noté *t* parce qu'il s'agit d'un temps : la formulation initiale était : quel que soit A, la suite n'est pas majorée par A et à partir d'un certain temps, tous les termes de la suite sont plus grands que A.

Prolongements

A court terme, on peut demander aux élèves de classer les suites qui étaient placées dans la colonne « je ne sais pas » à l'aide de la définition obtenue. On peut aussi proposer de nouvelles suites à classer.

Ce travail effectué sur la notion de suite qui tend vers plus l'infini permet aux élèves de construire assez facilement et assez rapidement la définition d'une suite convergente.

Les démonstrations du cours, bien qu'elles restent difficiles, deviennent accessibles pour les élèves qui n'ont pas de grandes difficultés en mathématiques. Les enseignants ayant mis en œuvre cette séance observent une vraie différence dans leur cours sur les limites de suites lorsqu'ils comparent leurs pratiques avant et après ce travail : les élèves ne subissent plus ce cours, qui n'est plus hermétique.

Une plus grande capacité des élèves à mobiliser la définition a été observée, ainsi qu'une meilleure mémorisation à long terme.

Plus généralement, et c'est essentiel à nos yeux, de nombreux élèves aiment le travail intellectuel original suscité par cette séance, susceptible d'éveiller en eux le goût des mathématiques.

Références bibliographiques

Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Etude des niveaux de preuve dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31*(2), 191-228.

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(3), 267–314.

Lakatos, I. (1984. Edition originale 1976). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique.* Traduction de l'Anglais : N. Balacheff et C. Laborde. Paris : Hermann.

Ouvrier-Buffet, C. (2015). Modéliser l'activité de définition : vers de nouvelles perspectives en didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *35*(3), 313-356.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 71–93.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(3), 307-341.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(2), 139–190.

Roh, K.H., & Lee, Y.H. (2017). Designing tasks of introductory real analysis to bridge the gap between student's intuition and mathematical rigor: the case of the convergence of a sequence. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 34-68.

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ? In J. Traglova, G. Aldon, G. Gheudet and Y. Matheron (Eds.), *Ressources pour l'enseignement des mathématiques : conception, usage, partage* (pp. 21-36). Lyon : INRP.

Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: a framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.