LE CADRE DE LA PROBLEMATISATION : QUELS OUTILS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS ?

Sylvie GRAU

Résumé
Le cadre de la problématisation apporte des éléments de compréhension de l'activité en considérant cette activité comme une réponse à un problème. Dans ce cadre, deux outils (le losange de problématisation et les espaces de contraintes) permettent d'enrichir l'analyse *a priori* des situations d'enseignement. L'objectif est de mieux anticiper ce qu'il s'agit d'expliciter aux élèves, ce qui doit être institutionnalisé, la manière dont on peut envisager l'étayage. Nous allons expérimenter ces outils et discuter de leur utilisation en formation.

Le cadre de la problématisation

Le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) issu des travaux de Fabre et Orange (Fabre & Orange, 1997) vise à penser l'apprentissage comme une enquête et donc analyser comment les connaissances se construisent au cours d'un processus comprenant le fait de poser, construire et résoudre un problème. L'objectif est d'amener l'élève à construire des savoirs apodictiques, c'est-à-dire des savoirs en lien avec les problèmes qui les ont générés et les nécessités qui font que ce savoir est ce qu'il est et qu'il n'est pas autre chose. Le modèle du losange de problématisation résume ce processus par quatre pôles que sont la question, la solution, les données et les conditions, et les différents axes qui les relient entre eux (voir Figure 1). L'axe qui relie la question et la solution correspond à la résolution du problème, celui qui relie les données et les conditions correspond à la construction du problème.

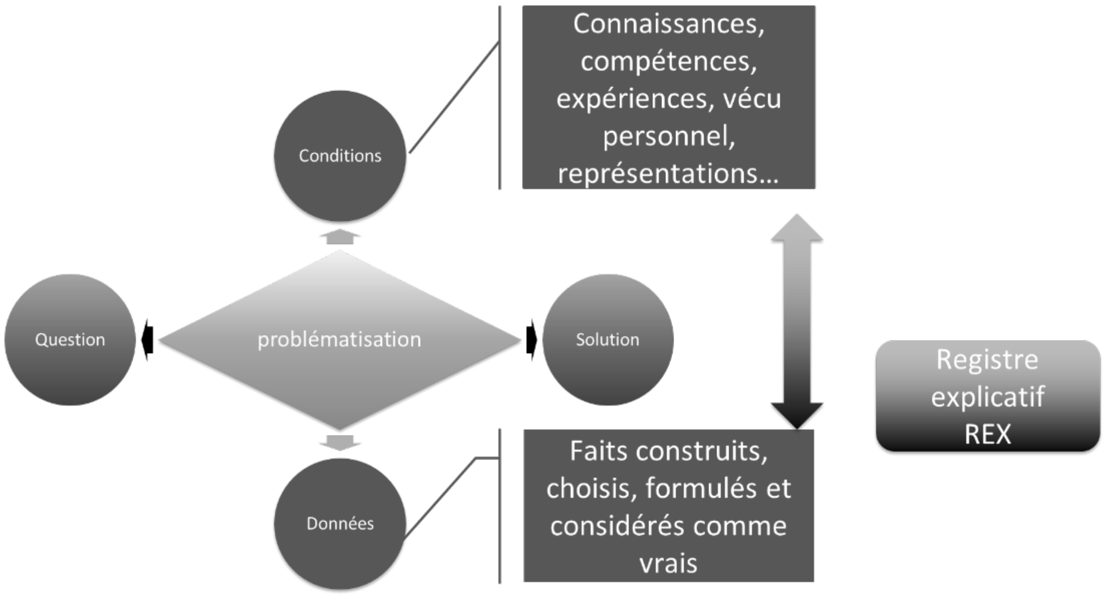


Figure 3 : losange de problématisation (Fabre, 2011)

Les questions peuvent être de différentes natures, elles peuvent être factuelles (on s'interroge par exemple sur l'existence d'un objet, sur une valeur, un critère), analytiques (on s'interroge sur une relation, une catégorisation, un point commun) ou explicatives (on s'interroge sur les raisons, on recherche une preuve). Les solutions peuvent aussi être de différentes natures (un fait, une relation ou une nécessité) sans que question et solution soient systématiquement de même nature. Par exemple une question factuelle (quelle est la solution de l'équation ?) peut amener à répondre par une relation (cette équation est équivalente à telle autre), ou par la formulation une nécessité (la solution ne peut pas être trouvée algébriquement, il faut procéder par approximation). Les données du problème ne sont pas les informations fournies par l'enseignant à l'élève, mais ce que l'élève formule comme des vérités qu'il ne remet pas en question. Ce sont des faits qu'il choisit, construit, et considère comme vrais, du moins temporairement. Les conditions sont quant à elles les connaissances, compétences, expériences, représentations de l'élève. Elles peuvent être issues de plusieurs « mondes » (Tall, 2014) : elles peuvent être scientifiques (savoir mathématique), sociales (savoirs de l'expérience, de la vie quotidienne) ou scolaires (liées au contrat didactique, au savoir scolaire). Par exemple concernant la proportionnalité, nous avons des savoirs mathématiques liés à cette notion (les propriétés de linéarité par exemple), nous pouvons en avoir une pratique sociale (« prix aux kilos », vitesse, recettes…) et nous avons la fréquentation d'objets rencontrés principalement à l'école comme le tableau de proportionnalité.

La mise en tension des données et des conditions fait émerger des nécessités à l'intérieur de modèles. Le savoir construit est donc en lien à ces nécessités et au problème, c'est ce qui le rend apodictique. Par ailleurs, les explications, justifications, argumentations données par l'élève à propos de son activité, relèvent de modèles élaborés dans un certain paradigme appelé le registre explicatif (REX). Dans le cadre du CAP, une situation d'apprentissage est censée amener l'élève à une problématisation qui le contraint à faire évoluer le REX. La construction du problème consiste à tester des possibles, construire des faits, émettre des hypothèses, définir ce qui est en question et ce qui est hors question. L'ensemble doit s'inscrire dans un tout cohérent qui peut relever de trois types de configurations qui ne sont pas exclusives :

- La configuration pragmatique vise le fonctionnement, le côté opérationnel des connaissances apporte une validation de fait.
- La configuration analytique vise une catégorisation basée sur des propriétés ou des caractéristiques communes.
- La configuration théorique vise une cohérence de l'ensemble au sein d'une théorie qui le justifie et donne le sens global à la problématisation.

Face à un même problème, chaque élève construit une question différente, fonction des conditions qui lui sont propres. Si l'analyse *a priori* de situations d'enseignement vise traditionnellement à anticiper les différentes procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre, la problématisation s'intéresse aussi à la caractérisation du problème construit par l'élève. Ainsi l'analyse *a priori* doit étudier différents problèmes, certains pouvant être très éloignés du problème théorique posé par l'enseignant. Nous allons préciser comment nous menons les analyses *a priori* dans le CAP et présenter un premier exemple avant de faire l'analyse *a priori* d'une tâche complexe proposée par une professeure stagiaire en classe de seconde.

L'analyse *a priori* dans le CAP

Le premier niveau d'analyse consiste à identifier la question posée à l'élève et les différentes manières dont l'élève peut être amené à reformuler cette question, quelles sous questions il peut poser. En regard de cette question, il s'agit d'identifier la nature des éléments de solution attendus. Le deuxième niveau d'analyse vise à spécifier les conditions scientifiques, sociales et scolaires que l'élève peut être amené à mobiliser ainsi que les données reconnues comme pertinentes pour résoudre le problème. Cela suppose de s'interroger sur la factualisation attendue (les faits à construire lors d'étapes intermédiaires, ou le choix d'informations, l'inférence, la formalisation de propriétés ou nécessités…). Le dernier niveau vise à identifier les procédures que les élèves peuvent utiliser pour résoudre le problème en lien avec les configurations. Va-t-il faire une représentation graphique parce qu'il maîtrise une technique dans un registre graphique lui permettant de résoudre le problème (configuration pragmatique) ou parce qu'il cherche à reconnaître une classe de situation déjà rencontrée (configuration analytique) ou parce que le dessin est un support lui permettant de raisonner sur un objet théorique (configuration théorique) ?

Pour dresser une vision plus synthétique de tous les possibles, nous pouvons organiser ces informations dans un espace de contraintes. Il s'agit de mettre en relation les faits (qui relèvent du registre empirique), les nécessités au sein des modèles (qui relèvent du registre des modèles) et les paradigmes dans lesquels sont élaborés ces modèles (le REX).

Prenons l'exemple du problème « boîte à bonbons » proposé dans le concours Eurêka Maths Réunion en 2018 (voir Annexe 1). Un schéma de type algorithmique est proposé : il faut choisir un nombre, le tripler et ajouter 4, si le résultat est plus grand que 65, on peut choisir un autre nombre et recommencer, sinon on divise le résultat par 5, si le reste égal à 0 on gagne, sinon on perd. La consigne est de « trouver tous les nombres qui permettent de gagner des bonbons ». Si nous reprenons la grille d'analyse *a priori* que nous venons de présenter, nous obtenons l'analyse suivante. La question est de trouver tous les nombres qui permettent de gagner des bonbons. La solution est donc une liste finie de nombre entiers (raisonnablement, il ne doit pas y en avoir trop si on les demande tous). Cela peut donc amener certains élèves à poser un problème factuel qui est de chercher quel nombre choisir pour gagner et par un certain nombre de tests proposer quelques réponses. Cependant, poser ce problème dans le cadre de l'arithmétique suppose qu'il faut argumenter le fait qu'il ne peut pas y en avoir d'autres que les nombres effectivement trouvés, ce qui transforme le problème en un problème explicatif et donc demande de mettre à jour des nécessités associées à ces solutions. Les conditions sont de différentes natures :

- Conditions du monde scientifiques : connaissance des critères de divisibilité, connaissance sur la division euclidienne, expérience du raisonnement inductif, du raisonnement arithmétique
- Conditions du monde sociale : ce n'est pas un jeu de hasard, il existe une stratégie gagnante. Si l'élève ne pose pas cette condition, il va tester au hasard des nombres sans chercher à tirer des nécessités.
- Conditions du monde scolaire : je peux faire des essais, faire des hypothèses et les tester. Si on me pose la question c'est que je peux trouver plusieurs réponses, qu'il y en a un nombre limité (ce qui ne serait pas le cas au lycée par exemple ou une solution pourrait avoir une forme algébrique et désigner une infinité de nombres solutions).

Les données pertinentes sont les informations portées par l'algorithme, la prise en compte des résultats intermédiaires. La factualisation attendue est que les élèves fassent des essais et qu'ils traduisent les « tests » de l'algorithme en nécessités liées aux connaissances des tables de multiplication et critères de divisibilité. Le REX attendu est celui du cadre de l'arithmétique. Dans une configuration pragmatique l'élève peut se contenter de dire qu'il ne trouve pas d'autres solutions et donc qu'il les a toutes. Dans une configuration analytique, l'élève peut s'appuyer sur les critères et vérifier que cela semble cohérent, par exemple que le nombre obtenu doit être multiple de 5 et inférieur à 65. Dans une configuration théorique, l'élève peut développer une preuve en s'appuyant sur des propriétés mathématiques, par exemple que l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres de la forme $5k - 4$ (avec k entier inférieur à 13) multiples de 3. On peut alors construire l'espace de contraintes (voir Tableau 1).

Registre empirique Registre des faits formulés comme vrais et non remis en question	Algorithme de calcul	1 perd, 2 gagne, 3 perd, 4 perd …	Les nombres divisibles par 5 se terminent par 0 ou 5.	Il y a un nombre fini de multiples de 5 inférieurs à 65.

Registre des modèles Nécessité à l'intérieur des modèles	Nécessité d'un raisonnement inductif par « remontée » de l'algorithme. Si je choisis un nombre x, alors $3x + 4$ doit être inférieur à 65. Si je choisis un nombre x, alors $3x + 4$ est multiple de 5. Il existe moins de 13 nombres gagnants.
Registre explicatif	Cadre de l'arithmétique Preuve par traitement exhaustif des cas

Tableau 1 : Espaces de contraintes problème « boîte à bonbons »

On comprend alors que la construction du problème nécessite une analyse des faits construits pour identifier des contraintes qui permettent de diminuer le champ des possibles. Sans la construction de nécessités, un élève peut cependant tester tous les entiers jusqu'à 20 et ainsi trouver toutes les solutions. Le problème n'est donc pas suffisamment contraignant pour que les élèves construisent la nécessité d'un raisonnement inductif ni la nécessité de mobiliser les critères de divisibilité. Les espaces de contraintes permettent de tester la robustesse de la situation vis-à-vis des objectifs d'apprentissage.

Analyse *a priori* d'une tâche complexe

Le CAP est particulièrement intéressant pour analyser les situations complexes. Nous allons en faire l'expérience sur une situation proposée par une enseignante stagiaire en classe de seconde. Elle souhaite mettre en place une tâche complexe visant à ce que les élèves mobilisent la notion de fonction affine. Elle veut construire avec eux, à partir de leurs productions, une trace écrite rappelant la définition d'une fonction affine par son expression algébrique, définition qu'elle estime être acquise au collège. Dans le support distribué aux élèves (voir Annexe 2), la stagiaire propose différents documents : un thermomètre à double graduation, une carte météo d'une chaîne d'information américaine, l'affiche de cinéma du film « Fahrenheit 451 » de Truffaut, la couverture du livre de Ray Bradbury's et un tableau listant des températures remarquables données en degrés Celsius (zéro absolu, fusion de l'eau, auto-inflammation du papier, température à la surface du soleil etc.). Les élèves doivent croiser ces informations pour établir la relation entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius et dire ce qu'ils pensent de la proposition de Mr Icks qui est que : « 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole ». Du point de vue de la problématisation, il est à noter que la consigne décompose déjà le problème en deux étapes, la première étant de trouver une relation (question analytique) et la seconde de dire si une proposition est vraie ou fausse (question factuelle). Demander d'établir la relation entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius n'est en fait qu'une manière d'orienter le travail pour répondre à la seconde question qui est de savoir à quoi correspond 451°F dans le titre de l'affiche. On a aussi une question initiale qui est floue lorsqu'il est écrit dans le document distribué aux élèves que « Mr. Icks est interpelé par les valeurs sur la carte météo ». Les élèves peuvent à leur tour poser le problème explicatif : comment se fait-il que les valeurs soient aussi élevées ? Nous avons donc dans le document source plusieurs problèmes plus ou moins posés et dans différents mondes (social avec la carte météo, culturel avec l'affiche de cinéma et scientifique avec les thermomètres et le tableau du dernier document), mais peu en rapport avec le monde scolaire voire même en rupture avec le contrat usuel en mathématiques au lycée, du fait qu'il n'y a pas de problème mathématique explicitement posé et du fait de l'ancrage interdisciplinaire non scientifique. Pour la première consigne qui est de donner une « relation » la solution attendue est aussi floue. Il peut s'agir d'une formule, une description de la co-variation dans un registre sémiotique spécifique (langage naturel, graphique, tableau fléché…). Suivant le cadre dans lequel l'élève travaille, il peut imaginer une relation au sens de « point commun », un lien, une causalité, une loi, une formule, une fonction. Du côté des conditions, on attend une mobilisation de conditions :

- Scientifiques : une relation en mathématique suppose une relation fonctionnelle qui peut s'exprimer par une expression algébrique de la fonction ; savoir que l'état de la matière varie en fonction de la température ; connaître quelques faits (températures à la surface du soleil, du corps humain…).
- Sociales : savoir qu'il existe différentes unités pour mesurer la température et en particulier que les USA utilisent une autre unité que les °C, avoir entendu parler des films évoqués, avoir déjà eu besoin de prendre sa température, d'avoir une idée de la température à laquelle l'eau change d'état par expérience par exemple en cuisine.
- Scolaires : dans un problème de recherche en mathématiques il est possible de prendre des initiatives, d'utiliser différentes procédures, il n'y a pas forcément une seule réponse. On peut utiliser différents registres (tableaux, graphiques). Les grandeurs sont souvent proportionnelles. Un travail interdisciplinaire peut exiger des connaissances dans une autre discipline.

Ici les élèves doivent prendre en compte un grand nombre de données prélevées dans les différents documents, mais une factualisation est indispensable pour mettre en correspondance les mesures dans les deux unités et rendre la covariation perceptible. Cela suppose d'organiser les données dans un tableau ou du moins une liste ordonnée, de calculer des variations, tracer une courbe ou effectuer des calculs pour tester la proportionnalité par exemple.

Plusieurs configurations sont possibles amenant des constructions différentes du problème sachant qu'elles ne sont pas exclusives et que plusieurs peuvent être mobilisées successivement ou en parallèle. La procédure qui consiste à organiser et représenter les mesures relève plutôt d'une configuration pragmatique, le niveau reste local, aucun traitement n'est réellement mis en œuvre, l'élève constate l'alignement ou l'ordonnancement dans le tableau. L'identification d'une covariation permet un travail à différents niveaux (global pour la croissance, locale pour la variation et ponctuelle pour des calculs d'images ou d'antécédents). La recherche d'une fonction affine par détermination du coefficient multiplicateur et de l'ordonnée à l'origine relève d'une configuration théorique, l'élève doit reconnaître les caractéristiques d'une situation modélisable par une fonction affine.

Ici le REX théoriquement visé est celui du cadre de l'analyse, il s'agit de la modélisation de la covariation de deux grandeurs par une fonction mathématique. Cependant ce REX n'est pas nécessaire puisque le problème peut être résolu dans le cadre de l'arithmétique des grandeurs par une analyse de la covariation (une variation de 10 unités de l'une des mesures de grandeurs entraîne une variation de 18 unités de l'autre). La situation n'est donc pas pertinente pour rendre nécessaire l'écriture algébrique d'une relation fonctionnelle, elle est cependant pertinente pour caractériser la relation affine par la proportionnalité des écarts. Cette propriété caractéristique peut être une définition temporaire des fonctions affines qui a le mérite de rendre la définition opérationnelle dans le contexte de la modélisation de la covariation de deux mesures de grandeurs (Grau, 2017).

L'espace de contraintes permet d'identifier les différentes manières de construire le problème :

Registre empirique	Tableau de correspondance	Les mesures dans les deux	Sur le graphique	0°C = 32°F	Une variation de

<table>
<tr><td>Registre des faits formulés comme vrais et non remis en question</td><td>entre les mesures dans les deux unités.</td><td>unités ne sont pas proportionnelles.</td><td>les points sont alignés.</td><td></td><td>10°C correspond à une variation de 18°F.</td></tr>
<tr><td>Registre des modèles
Nécessité à l’intérieur des modèles</td><td colspan="5">On a une covariation de deux mesures de grandeurs, l’une est fonction de l’autre.
Nécessité d’une proportionnalité entre les variations.
La fonction est affine.
Nécessité d’une ordonnée à l’origine de 32.
L’expression de la fonction est de la forme f(x)=ax+b.
La fonction est monotone croissante.</td></tr>
<tr><td>Registre explicatif</td><td colspan="3">Cadre des mesures de grandeurs</td><td colspan="2">Cadre de l’analyse</td></tr>
</table>

Cette analyse pointe la difficulté de trouver des situations didactiquement pertinentes pour problématiser des savoirs attendus par les programmes alors même qu’ils ne sont pas prévus pour être opératoires, c’est-à-dire des outils au service de la résolution d’une classe de problèmes. Cela concerne en particulier les savoirs liés à des objets de l’analyse définis algébriquement sans que ne soient questionnés les changements de niveaux, de points de vue ou de registres que ces définitions supposent. Dans la lignée des travaux de Gueudet et Vandebrouck (2019) sur la variation de fonctions en classe de seconde, la définition de l’objet « fonction affine » par son expression algébrique amène une représentation ponctuelle alors même que le but est de décrire une relation globale (la relation affine) souvent identifiée du fait d’un alignement de points sur un graphique (registre graphique). Elle est donc inefficiente du point de vue de la résolution de certains problèmes et n’est pas porteuse de sens du point de vue du concept de fonction car elle amène à généraliser de manière inappropriée les propriétés de la proportionnalité.

L’analyse des productions des élèves (voir Annexe 3) montre que certaines nécessités ont bien été construites mais que l’expression algébrique de la fonction n’apparait que dans deux groupes, dont un, suite à l’intervention de l’enseignante pour réorienter le travail, ce groupe ayant répondu que la relation entre les deux unités était « l’océan atlantique ». Ce groupe ne mobilise donc pas un registre explicatif mathématique, nous pouvons parler de malentendu socio-scolaire (Bautier & Rayou, 2013) du fait que l’activité cognitive des élèves n’est pas celle attendue par l’enseignant. Pour les autres la covariation n’appelle pas une modélisation par une fonction, la proportionnalité des variations suffit à caractériser la relation et permet de répondre aux questions posées par l’enseignante. La stagiaire n’a pas trouvé dans les productions les appuis nécessaires à l’élaboration du texte de savoir qu’elle avait prévu. Les élèves n’ont donc pas fait le lien entre l’activité proposée et la synthèse. On peut faire l’hypothèse que l’analyse *a priori* que nous avons menées dans le cadre du CAP aurait permis d’anticiper la difficulté rencontrée.

Analyse de l'activité de l'enseignant dans le CAP

Les outils présentés peuvent aussi être mobilisés pour analyser l'activité de l'enseignant (Fabre, 2006; Grau, 2021; Grau & Hersant, 2021; Hersant, 2015). Nous posons l'hypothèse que la pratique est la réponse apportée par l'enseignant à un problème professionnel plus ou moins formalisé et conscientisé. Analyser la pratique revient alors à tenter de reconstruire le problème de l'enseignant à partir des traces de son activité : ses préparations, les observations de la mise en œuvre en classe, les productions des élèves, les interventions et productions de l'enseignant, son analyse réflexive ou les entretiens d'auto-confrontation etc. Le REX est alors caractérisé par les composantes dont relèvent les explications que l'enseignement donne lorsqu'il parle de sa pratique. Ces composantes sont reprises de la théorie de la double approche didactique et ergonomique de Robert et Rogalski (Vandebrouck et al., 2013). Elles sont au nombre de cinq : la composante personnelle (représentation de soi, de l'apprentissage, goût, expérience…), la composante institutionnelle (les programmes, horaires, ressources, manuels…), la composante sociale (relation avec les élèves, le groupe, les collègues, les collectifs…), la composante médiative (l'organisation, le déroulement, le pilotage…) et la composante cognitive (choix des contenus, énoncés, variables didactiques…). Comme pour tout apprentissage, l'objectif est de favoriser une évolution du REX. En formation initiale, il s'agit d'amener les étudiants à développer la part de la composante cognitive, que ce soit lors de la préparation, de la mise en œuvre ou de l'analyse réflexive. L'utilisation des outils d'analyse du CAP permettent de repérer comment les étudiants problématisent leur pratique au cours de leur formation initiale. Nous avons pu identifier une certaine régularité dans la dynamique de problématisation sur l'année avec des enchainements de trois grandes phases (voir Figure 2). La première est une phase de mise en tension. Nous parlons de faits didactiques pour désigner des incidents, paradoxes, incompréhensions qui amènent l'étudiant à prendre conscience d'un écart entre ses conceptions et opinions et ses réalisations en classe. Cette prise de conscience n'est possible qu'à partir du moment où l'étudiant dispose de cadres théoriques, d'outils d'analyse et d'un espace collaboratif d'analyse avec ses pairs. Sinon ces faits didactiques sont expliqués par des causes extérieures comme le niveau faible des élèves, le contexte de l'établissement, les conditions spécifiques comme les horaires, le manque de temps, le manque de matériel etc. La deuxième phase est celle de la problématisation. Il s'agit de positionner et construire des problèmes didactiques professionnels. Pour cela, le collectif est encore nécessaire, il permet de confronter les solutions, d'ouvrir des possibles, de profiter de l'expérience des pairs, des apports des formateurs. La dernière phase est la construction de solutions raisonnées, c'est-à-dire d'une pratique consciente en lien avec les problèmes explicites qui ont été posés et des nécessités formalisées en lien avec les différentes composantes.

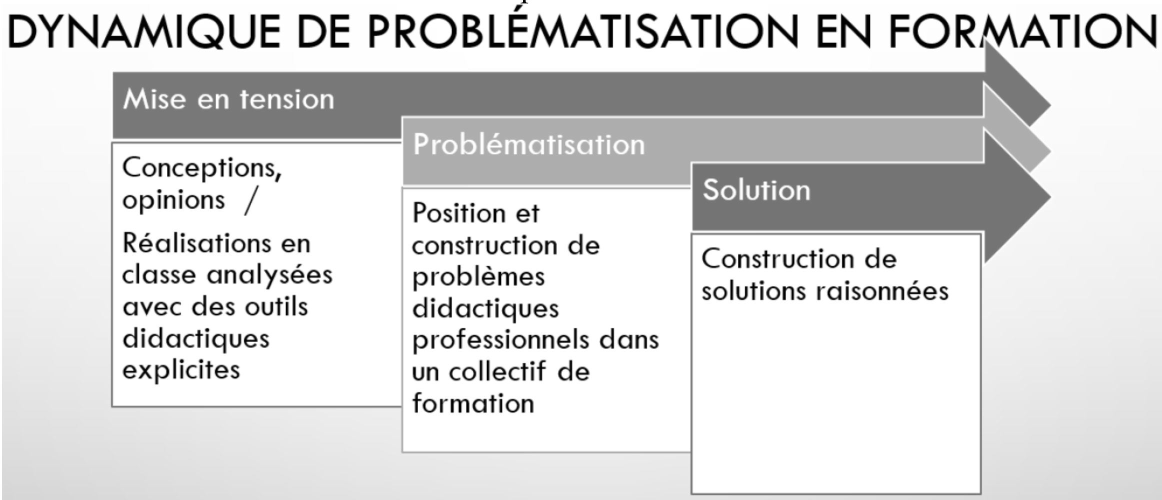


Figure 4 : dynamique de problématisation des pratiques en formation initiale des enseignants de mathématiques du second degré dans le CAP.

Nous allons illustrer cette dynamique à travers l'analyse de la pratique d'une enseignante stagiaire en maternelle. Son problème professionnel est de savoir comment enseigner le dénombrement en petite section (enfants de 3 ans). Lors de la première visite dans sa classe en novembre, cette stagiaire montre une régularité dans sa pratique, elle ne propose pas de situations problèmes aux élèves mais elle les maintient dans des micro-tâches, ils doivent compter par imitation en regardant et écoutant comment fait l'enseignante à différents moments de la journée, l'enseignante valide mais n'explicite pas le sens de l'activité. Sa représentation de l'enseignement en maternelle vient de doxas largement partagées comme par exemple l'idée que l'enfant peut apprendre par la simple activité. Le fait didactique rencontré par cette stagiaire est que certains élèves n'arrivent pas à dénombrer. Elle construit en formation, grâce aux analyses croisées avec ses pairs, la nécessité de mettre l'élève en confrontation avec un milieu et de s'assurer de la dévolution du problème à l'élève. Le dénombrement doit alors apparaître comme une solution efficace pour résoudre un problème. Elle propose donc une situation didactique pertinente. L'élève doit mémoriser une quantité de cercles sur une carte pour prendre la même quantité de cubes dans une réserve. La validation se fait en mettant un cube sur chaque cercle : dans tous les cercles il doit y avoir un cube et il ne doit pas rester de cubes. Surgit un nouveau fait didactique : une élève arrive à mémoriser la quantité 6 alors qu'elle énonce qu'elle doit prendre 3 cubes. En fait cette élève ne sait pas compter au-delà de 3 mais elle sait que la quantité attendue est « 3 et encore 3 ». Elle énonce donc 3 mais prend bien 6 cubes. La stagiaire comprend alors le rôle de l'analyse *a priori*. Elle réalise l'écart entre son objectif d'apprentissage (mémoriser la quantité et non dire la quantité) et les procédures que les élèves mettent en place. Elle prend aussi conscience de l'effet rétroactif du milieu du fait que la situation est auto-validante. Cette stagiaire a construit une solution raisonnée : elle va essayer par la suite de proposer des situations adidactiques dont elle fait une analyse *a priori* afin de bien identifier la pertinence de la situation au regard de son objectif d'apprentissage et d'amener l'élève à apprendre par assimilation et adaptation de ses connaissances. Son REX est donc passé d'une conception de l'apprentissage par imitation à une conception socioconstructiviste. Cependant cette évolution du REX correspond au problème de l'enseignement du dénombrement en petite section, rien ne permet d'affirmer que ce REX sera mobilisé à propos d'une autre notion mathématique ou d'un enseignement du nombre à un autre niveau de la scolarité.

Conclusion

Nous avons présenté le cadre de l'apprentissage par problématisation et montré comment le modèle du losange et les espaces de contraintes peuvent être des outils pertinents pour mener des analyses *a priori*. Ce cadre permet de modéliser la dynamique de problématisation, c'est-à-dire la manière dont un sujet enchaîne la construction de différents problèmes dans un processus de factualisation et défactualisation en lien avec la construction de nécessités. A travers ce processus se construisent de nouvelles connaissances en lien avec des nécessités et le contexte spécifique du problème traité. L'objectif est de rendre le savoir plus disponible car rattaché aux problèmes qu'il peut amener à résoudre, et apodictique car contraint par des nécessités explicitées. Il peut être pertinent de former les enseignants à l'utilisation de ce cadre d'analyse en formation initiale et continue, car il apporte des éléments de compréhension de certaines difficultés professionnelles résistantes : la difficulté à mener des débats autour des productions d'élèves qui ici peut s'expliquer par le fait que les élèves ont sans doute construit des problèmes différents, la difficulté à mener le processus d'institutionnalisation par le fait que les nécessités n'ont pas été construites par les élèves, la difficulté à construire des situations problèmes par le fait que les élèves ont rarement à charge de construire le problème mais uniquement de le résoudre.

Par ailleurs ce cadre est aussi un outil pertinent pour analyser la pratique enseignante. Il permet d'identifier les composantes qui dominent dans les prises de décision. La poursuite des recherches dans ce domaine pourrait aider à penser des dispositifs de formation initiale et continue amenant une problématisation des savoirs professionnels.

Références bibliographiques

Bautier, É., & Rayou, P. (2013). *Les inégalités d'apprentissage programmes, pratiques et malentendus scolaires* (2e édition revue et augmentée). Presses universitaires de France.

Fabre, M. (2006). Analyse des pratiques et problématisation. Quelques remarques épistémologiques. *Recherche et formation*, *51*, 133-145. https://doi.org/10.4000/rechercheformation.511

Fabre, M. (2011). *Eduquer pour un monde problématique : La carte et la boussole*. PUF.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

Grau, S. (2017). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Bretagne Loire.

Grau, S. (2021). Conditions d'une vigilance didactique chez les professeurs des écoles stagiaires. *Actes du 47e colloque COPIRELEM*.

Grau, S., & Hersant, M. (2021, février 10). *Former les enseignants au regard didactique : Deux études de cas au cycle 1*. Séminaire INSPE de Nantes « Former au regard didactique », Nantes.

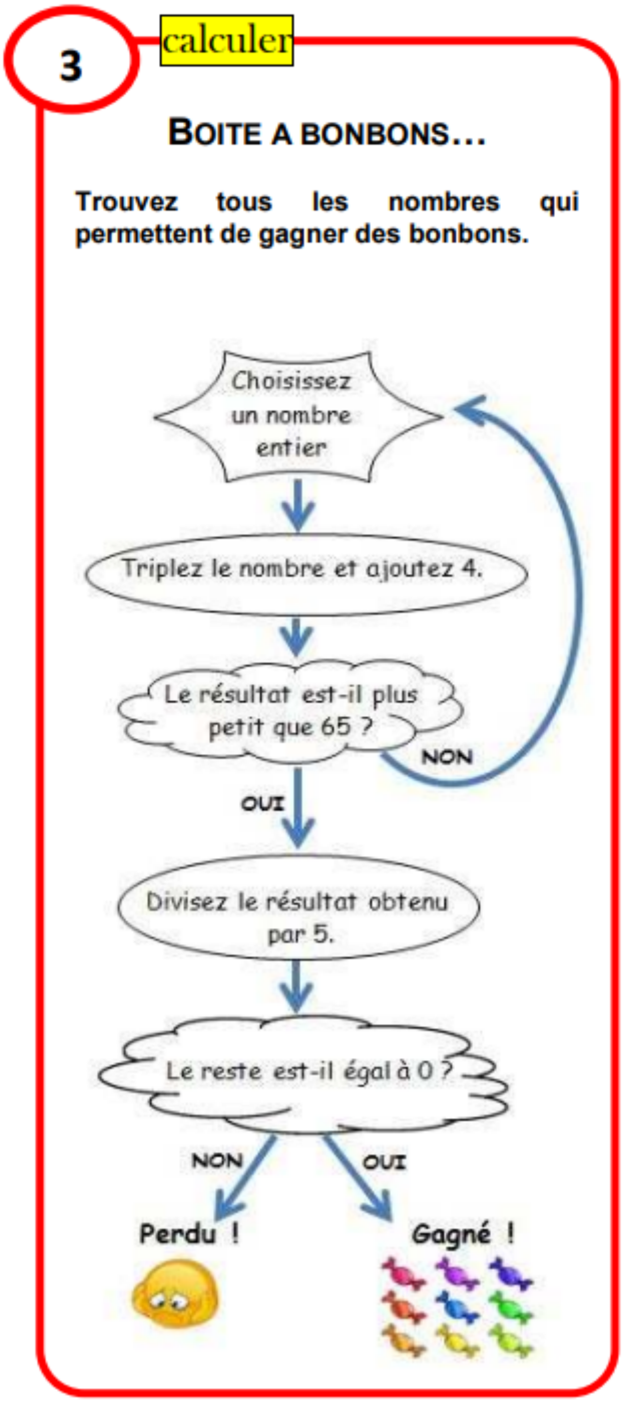
Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : Éclairages en didactique des mathématiques* [Rapport de recherche]. CNESCO (Conseil national d'évaluation du système scolaire). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02547063/document

Hersant, M. (2015, novembre 25). *Activité de l'enseignant et des élèves. Contrat didactique, milieu et problématisation* [Conférence invitée]. Journée « Étude des pratiques enseignantes », ESPE Créteil.

Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. In *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (p. 223-236). Springer Science & Business Media.

Vandebrouck, F., Robert, A., Rogalski, J., Abboud, M., Cazes, C., Chesnais, A., & Hache, C. (2013). *Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques.* IREM de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02110844

ANNEXE 1 : CONCOURS EUREKA MATHS REUNION EPREUVE FINALE 2018[11]



11 https://pedagogie.ac-reunion.fr/fileadmin/ANNEXES-ACADEMIQUES/03-PEDAGOGIE/01-ECOLE/gami/eureka/EMR_2018/EMR_2018_Finale.pdf

Chapitre 6 : Fonctions affines

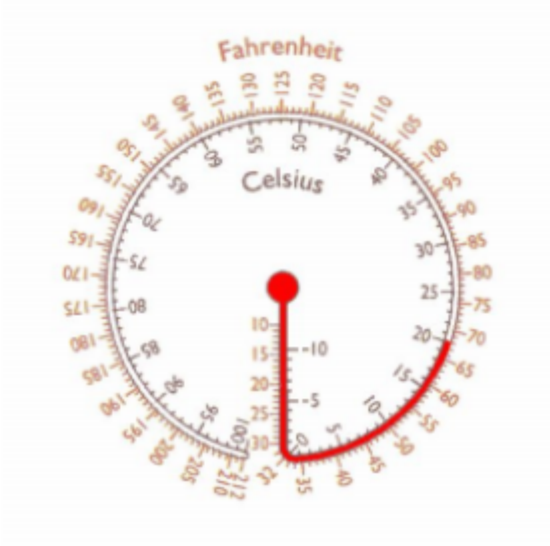
Activité 1

En regardant une chaîne d'information américaine, Mr Icks oberve la carte météorologique suivante (document 1). Les températures indiquées le laissent perplexe.

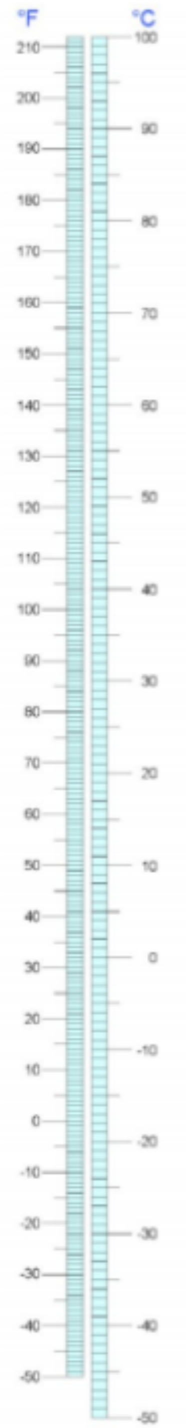
Document 1 :

Il décide de faire une recherche internet sur les températures. Il découvre trois unités : les degrés Celsius, les degrés Fahrenheit et les Kelvins. Il existe des termomètres utilisant deux unités (documents 2a et 2b).

Document 2a :



Document 2b :



Il trouve aussi une affiche de cinéma et une couverture du livre Fahrenheit 451 de Ray Bradbury (document 3)

Document 3 :

Mr Icks cherche alors à comprendre ce que signifie ce titre et trouve des exemples de température (document 4).

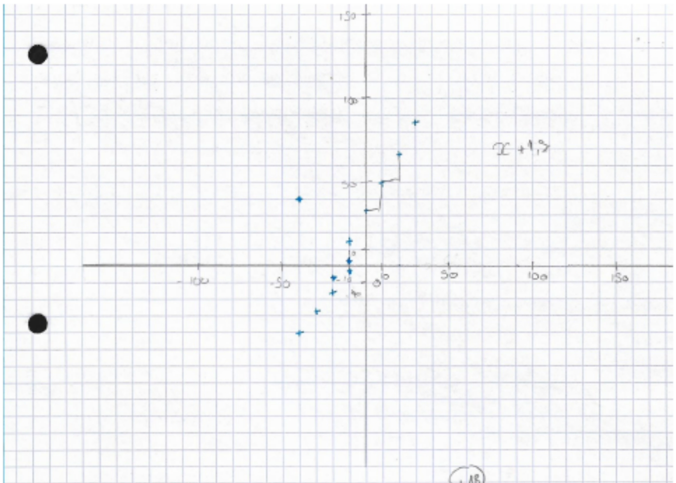
Document 4 :

Commentaire	Degré Celsius
Zéro absolu	-273,15
Plus basse température naturelle enregistrée à la surface de la Terre	-89
Mélange eau/sel de Fahrenheit	-17,78
Température de fusion de l'eau (à la pression standard)	0
Température moyenne à la surface de la Terre	15
Température moyenne du corps humain	36,8
Plus haute température naturelle enregistrée à la surface de la Terre	56,7
Température de vaporisation de l'eau (à la pression standard)	99,975
Température d'auto-inflammation du papier	233
Température d'auto-inflammation du gazole	257
Température estimée à la surface du Soleil	5 526

Problématique :

- **Établir la relation qui existe entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.**
- **Mr Icks pense que 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole. Qu'en pensez vous ?**

Groupe B1



+18

F°	-40	~~-30~~ -28	-4	14	32	50	68	104	122	140	158	176	194	212
C°	-40	-30	-20	-10	0	10	20	40	50	60	70	80	90	100

+10

+ 10°C, c'est comme + 18° F

100° F = 38 °C   50°F = 10°C

$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

$451 = (100 \times 4) + 50 + 1$

$38 \times 4 + 10 + 0,5$

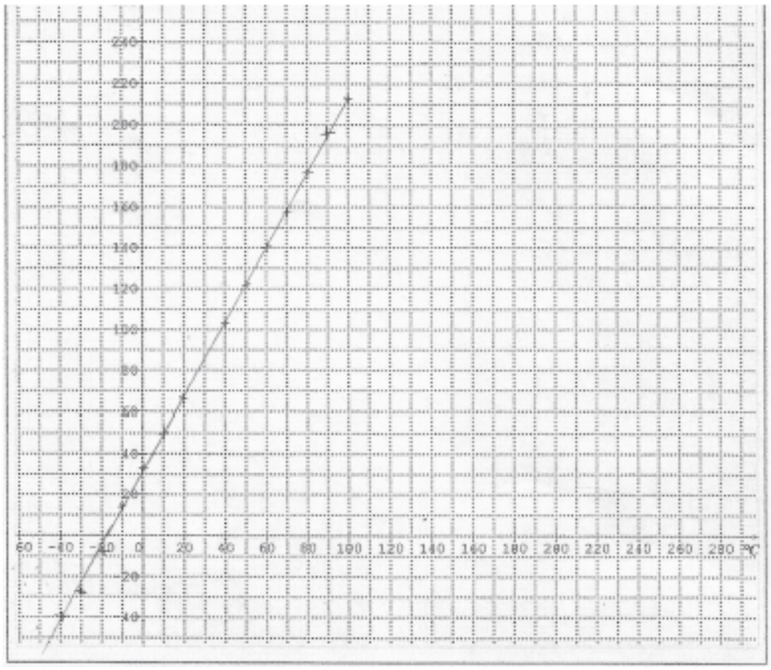
$162,5$

+ 1°F

+ 0,5°C

$451 \times 0,5 = 225,2$

$451 \times \frac{5}{9} + 10 \simeq 260,6$



Groupe B2

1- f(x) = x × 1,8 + 32 où x représente les degrés celsius. Grâce au doc 2a.
On sait que 0C° = 32 °F. Il va falloir intégrer + 32 à la fonction.
Grâce à nos connaissances on sait que 180 °C = 360 °F ~~donc~~, qui représente 2x dans notre fonction.
On teste avec 10 °C : 10 × 2 + 32 = 52 mais le document 2a nous montre que 10 °C = 50 °F. Donc on déduit la multiplication de 1,8 donc : 10 × 1,8 + 32 = 50 °F.

La relation entre les Farenheit et les degrés Celsius est la fonction f(x) = x × 1,8 + 32.

2- La première affiche du document 3 nous montre une combustion de gazole. On sait que la combustion du gazole grâce au document 4 est de 257 °C.
Nous appliquons donc la fonction : f(257) = 257 × 1,8 + 32 = 494 °F.
On en déduit que sa supposition est fausse. En revanche la deuxième affiche montre une combustion du papier. Le document 4 nous montre que la combustion du papier est de 233 °C. On applique donc la fonction :
~~f(257)~~ f(233) = 233 × 1,8 + 32 = 451.
On en déduit donc que 451 °F correspond à la combustion du papier.

Groupe B3

températures en °C	0	10	20	30
températures en °F	32	50	67,5	86

Nous avons pu voir, grâce au produit en croix qu'il n'y a pas de rapport de proportionnalité entre le °C et le F°.

• Aide 2

es us	0	10	20°C	30	40	50	60	70
ès enheit	32	50	67,5°F	86	104	~~140~~ 121,9	140	158

×1,5 ×1,2 ×1,1 ×1,1

On remarque que lorsque il y a 0° celcius les Farenheit demeurent à 32.

• 451 °F correspond à la température d'auto-inflammation ?
257 : 3 = 85,6666 puisque 85,6 °C est égal à 186 °F
donc 186 × 3 = 558 °F
Donc nous pensons que Mr Icks s'est trompé dans son raisonnement

Groupe B4

• Degrés Celsius = Français
Degrés Fahrenheit = Etats-Unis

Les degrés Celsius et Fahrenheit calcule la Température

Degrés °C	-10	-5	0	30	60	80	100
Degrés °F	14	23	32	86	140	176	212

$\times$; $\div$

(48 : 10 = 1,8)

°C	10	20	30	40	50	60
°F	50	68	86	104	122	140

10 10 10

18 18

oui - Les degrés Celsius commence à zero alors que les degrés Fahrenheit commence à trente deux.

oui Les degrés Celsius augmente de dix en dix ou diminue de 10 en dix alors que les degrés Fahrenheit augmente ou diminue de 18 en 18.

oui Les °C et les °F ne sont pas proportionnels.

• $60 + 10 \times 19 = 250 + 7 = 257$

$140 + 18 \times 19 = 482 + 7 \times 2 = 494$

Non car 257 °C est égal à 494 °F

Groupe B5

Problématique:

- Établir la relation qui existe entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.

On prend des températures au hasard et on calcul la différence qu'il y a entre les degrés Fahrenheit et les degrés Celsius.

0°F = −18°C   0°C = 32°F

Quand les degrés Celsius augmentent de 10°, les degrés Fahrenheit augmentent de 18°.

- Mr Icks pense que 451°F correspond à la température d'auto-inflammation du gazole. Qu'en pensez vous?

	100 + 10 = 110	212 + 18 = 230
	110 + 10 = 120	230 + 18 = 248
	120 + 10 = 130	248 + 18 = 266
	130 + 10 = 140	266 + 18 = 284
	140 + 10 = 150	284 + 18 = 302
	150 + 10 = 160	302 + 18 = 320
	160 + 10 = 170	320 + 18 = 338
	170 + 10 = 180	338 + 18 = 356
	180 + 10 = 190	356 + 18 = 374
	190 + 10 = 200	374 + 18 = 392
	200 + 10 = 210	392 + 18 = 410
	210 + 10 = 220	410 + 18 = 428
	220 + 10 = 230	428 + 18 = 446 – 451°F selon Mr Icks
	230 + 10 = 240	446 + 18 = 464
257°C selon doc4	240 + 10 = 250	
	250 + 10 = 260	

Nous avons augmenté de 10°C en 10°C jusqu'à 260°C afin de voir si quand nous augmentions de 18°F, les températures étaient égales dans leurs unités respectives. Nous avons remarqué que la supposition de Mr Icks n'est pas cohérente avec nos calculs. ... Quand nous sommes à 451°F, nous sommes à environ 233°C. Alors sa supposition serait correct s'il pensait que c'était la température d'auto-inflammation du papier.

Bonne idée.

oui.

Groupe A1

Etand-donner que au Etat-Unis ils utilisent le Fahrenheit et que en Europe ils utilisent le celsius nous supposons que l'Océan Atlantique relie les deux* températures

* mesure de

Fahrenheit	32	50	68	86	104	122	160
Celsius	0	10	20	30	40	50	60

$y = x + 18$

x = celsius

~~18 = la différence entre celsius et fahrenheit~~
c'est la différence en fahrenheit entre 10° celsius

+18

F	50	68
C	10	20

+10

bien.

25x18=450

18:10 = 1,8

donc 25+1,8 = 26,8

268°C

Donc en réfléchissant nous en avons déduit que 451 F ne correspond pas à la température d'auto inflammation du gazole

Groupe A2

- **Aide 2**

Degrés Celsius	-40°C	10°C	20°C	60°C	70°C	80°C	90°C	100°C
Degrés Fahrenheit	-40°F	50°	67,5°F	140°F	158,5°F	176°F	193,5°F	211°F

+10 +10 +10 +10 10 x 30 300

+17,5 +17,5 +17,5 +17,5 +17,5 525 x30

- 451 °F ne correspond pas à la temperature d'auto inflammation du gazole car celle ci est comprise entre 150 °C et 160 °C ce qui n'est pas le cas dans le document 4. Il s'agit donc d'autres choses.

bien.

- La relation est la mesure de temperature Pour chaque dizaines ont rajoute 17,5 pour arriver à la dizaine superieure

Groupe A3

1)

$32°F = 0°C$ ~~41~~ $105°F = \cancel{4}41°C$

~~35°F = 1°C~~ $131°F = 55°C$

$68°F = 20°C$

$77°F = 25°C$

$104°F = 40°C$

$86°F = 30°C$

Nous pouvons observer que tout les 10°C, nous augmentons de 18°F.

Nous en concluons donc que tout les 1°C, nous augmentons de 1,8 °F. Ceci est donc la relation entre les Fahrenheit et les Celcius. Pour trouver l'équivalent en °F d'un nombre en °C, il faut faire $1,8 \times x + 32$ avec x = nombre en celcius, le 32 étant les 32 °F du 0°C.

2)

$1,8 \times 257 + 32 = 494,6$ °F.

Mr Icks a donc tort car la température d'auto-inflammation du gazole est à 494,6 °F et non à 451 °F. En effet,

$451°F = \cancel{218,56°C}\ 232,78$

$\cancel{\frac{451 \times 32}{158} = 218,56}$ $\frac{451-32}{1,8} = 232,78$.

Ce qui est donc presque la température d'auto inflammation du papier.