PROXIMITES DISCURSIVES OU COMMENT APPRECIER LE RAPPROCHEMENT DES ACTIVITES DES ELEVES ET DE LEURS CONNAISSANCES

Fabrice VANDEBROUCK, Aline ROBERT

Résumé. Dans cette communication, nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Nous dressons un bilan à la fois sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours et sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition du sens de variation. Nous dressons des conséquences pour la formation des enseignants.

En didactique des mathématiques, plusieurs entrées théoriques sont proposées pour l'analyse des activités des élèves et des pratiques enseignantes dans la classe. Notre entrée est ancrée en Théorie de l'Activité. Nous cherchons à opérationnaliser des outils théoriques et méthodologiques proposés par cette théorie pour comprendre les pratiques et les activités dans le cadre de la classe ordinaire de mathématiques.

Dans cet article nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée en France (grade 12) la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Dans toute la suite le mot « cours » est utilisé dans le sens restrictif de « exposition des connaissances en classe ». Cette analyse donne à voir à la fois la démarche que nous adoptons pour étudier ces moments de classe particuliers et les difficultés spécifiques à introduire une telle notion, qui porte en elle-même un caractère formalisateur, mettant en difficulté l'enseignant dans ses pratiques et les élèves dans leur compréhension

Dans la première partie nous précisons notre positionnement théorique ainsi que notre méthodologie générale d'analyse des activités des élèves en cours, utilisant les proximités discursives. Dans la deuxième partie, nous introduisons ce que nous appelons le relief sur la notion à enseigner, en nous restreignant d'emblée à l'exemple choisi, ici la définition formalisée de la croissance d'une fonction numérique. Nous développons ensuite l'analyse du déroulement d'une première séance de cours observée intitulée « Surface Agricole », ce qui est le titre de la tâche introductive proposée. Nous contrastons avec l'analyse plus rapide d'une deuxième séance dans une autre classe et avec un autre enseignant. Nous dressons un bilan à la fois sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours et sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition du sens de variation, avant de conclure plus généralement sur la formation des enseignants.

Positionnement théorique et proximités discursives

Nous nous plaçons en Théorie de l'Activité (Léontiev, 1984), ce qui implique que nous prenons comme entrée pour étudier les relations enseignement apprentissage d'un contenu mathématique donné, ce qui se fait dans la classe de mathématique ordinaire, dans son contexte institutionnel relatif aux savoirs en jeu mais aussi son contexte temporel (l'inscription de la séance dans un scénario global), voire culturel et social (type d'établissement). Dans cette perspective théorique, les interactions dans la classe, et donc les déroulements de séances de mathématiques, sont aussi cruciaux que les analyses des contenus en jeu, des scénarios et des tâches proposées aux élèves. Au centre de notre approche, nous plaçons les « activités mathématiques » des élèves (on dira juste « activités »), processus cognitifs individuels qui nous permettent d'apprécier leurs apprentissages (Rogalski 2008).

Nous analysons dans cet article deux séances de classe de seconde ordinaire pendant lesquelles, après qu'un exercice d'introduction à la notion de variation des fonctions (appelé « activité introductive » dans les manuels) ait été travaillé par les élèves, l'enseignant expose le cours sur le sens des variations des fonctions numériques. Nos méthodologies d'analyses de tâches et de déroulements ont été largement présentées dans des écrits précédents (Vandebrouck 2008, Robert et al., 2012). Nous distinguons notamment les activités attendues des activités possibles des élèves, issues respectivement des analyses de tâches et de celles des déroulements. Nous dégageons différents types d'aides de l'enseignant qui interviennent dans les activités des élèves, procédurales qui donnent des pistes et souvent réduisent la tâche, ou constructives qui, au contraire, amènent les élèves un peu « plus loin » que ce qu'ils ont fait. Nous repérons également les activités a maxima, développées d'emblée par des élèves et associées à toute la complexité des tâches prescrites, des activités développées a minima, sur des tâches redéfinies pour/par les élèves ou avec des aides procédurales proposées par l'enseignant pendant les déroulements. Nos analyses se font à partir des transcriptions de vidéos tournées dans les classes, une caméra étant généralement placée au fond de la salle en l'absence de tout observateur.

Dans cet article, ces outils d'analyse servent peu. Nous illustrons comment nous les complétons pour étudier les moments d'exposition des connaissances, c'est-à-dire le déroulement du cours qui, dans notre cas, suit le travail sur une tâche d'introduction à la notion visée. Ce moment est à comprendre dans un sens assez large, qui dépasse notamment le sens d'institutionnalisation sur une connaissance nouvelle, au sens de la théorie des situations didactiques TSD (Brousseau, 1997), dans la mesure où le processus en jeu peut être moins complet que ce que recouvre le terme en TSD.

Nous utilisons pour cette étude la notion de « proximités discursives » qui correspond à une opérationnalisation en didactique des mathématiques de la notion de zone de proche développement (ZPD) de Vygotski (1934/97).

Dans les moments d'exposition de connaissances, qui suivent éventuellement des tâches d'introduction, les activités possibles des élèves sont très difficilement accessibles, notamment par nos méthodologies d'observation directe des actions des élèves (rendues visibles sur nos vidéos). Il n'y a plus de tâches mathématiques explicites, sauf exception. La tâche des élèves est en partie liée à l'écoute de l'enseignant en train de présenter un bilan ou même une notion de façon générale (ou un théorème ou une propriété ou une méthode…), avec souvent des réponses à des questions limitées, intégrées au fil de la présentation. On ne peut étudier que ce que l'enseignant et les élèves disent ou montrent. Nous cherchons alors la manière dont l'enseignant peut « agir » (indirectement) sur les activités des élèves liées à cette exposition de connaissances. Nous nous demandons comment, pendant ce cours, l'enseignant s'appuie sur ou prolonge des activités antérieures des élèves, notamment en évoquant lui-même ou faisant évoquer par les élèves des éléments contextualisés, déjà travaillés, pour repositionner ces éléments à un niveau plus général. Nous interrogeons aussi la manière dont, pendant ce moment de cours, il prépare ou accompagne des activités ultérieures des élèves en explicitant (ou faisant expliciter) le passage de connaissances présentées à un niveau général à des activités les mettant en jeu de manière contextualisée, à partir de questions ou de petites tâches qui peuvent être résolues pendant le cours, collectivement. En particulier nous étudions toutes les occasions repérées dans le discours de l'enseignant (et des élèves entre eux) de s'appuyer sur ce qui vient des élèves. C'est ce que nous appelons des « proximités discursives ». Ce sont des apports spécifiques, éventuellement associés à des questions obligeant les élèves à répondre en dépassant ce qui vient d'être dit ou fait.

Les proximités discursives sont ainsi des rapprochements explicites, dans le discours de l'enseignant, entre ce qui est visé et ce qui vient des élèves (Robert et Vandebrouck 2014 ; Vandebrouck et Robert 2017). Leur étude se fait à partir des transcriptions, permettant de pointer les éléments dans le discours de l'enseignant qui s'appuient sur des activités des élèves ou leurs connaissances supposées tout en abordant les connaissances visées. Ce qui est précisément en jeu dans ces proximités, c'est la possibilité de familiariser les élèves avec les mots généraux qui sont introduits et les formalisations nouvelles qui sont présentées et de faire activer ensuite (grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, des liens explicites, entre mots (formules…) et activités mathématiques en contexte.

Pour mieux qualifier et interpréter ces rapprochements, on introduit une distinction entre proximités ascendantes, descendantes et horizontales. Les premières sont des rapprochements du contextualisé au général, qui mettent en jeu une démarche inductive, souvent difficile pour les élèves peu habitués à généraliser eux-mêmes. Les secondes sont des rapprochements qui vont dans le sens inverse, du général au contextualisé : ils sont plus déductifs, basés sur des reconnaissances et des substitutions. Les dernières rapprochent des éléments de même niveau de généralité mais associés à des aspects différents, la plupart des changements de registres par exemple. Le travail partagé sur des connaissances proches peut donc se faire par prolongement à partir du connu (l'enseignant met en évidence avec les élèves ce qui est généralisé : proximité ascendante), par insertion du nouveau dans du déjà-connu (l'enseignant met en évidence la manière d'appliquer à des contextes déjà travaillés les nouvelles connaissances : proximité descendante) ou par introduction de liens entre du déjà connu et du nouveau.

Cela dit le label d'une proximité n'est pas toujours clair, il peut dépendre des élèves (et de l'état de leurs connaissances), une même intervention peut avoir le double statut descendant et ascendant.

On reconnait bien dans cette définition et cette catégorisation des proximités une tentative d'opérationnalisation de la notion de ZPD. Elle est cependant adaptée de la notion originelle à deux titres au moins : d'une part il ne s'agit pas de rechercher des rapprochements dans des interactions individuelles mais collectives (souvent), d'autre part il ne s'agit pas de partager des résolutions de problèmes (même au sens large) mais des présentations de connaissances.

En résumé, notre objet d'étude est à la fois le contenu des discours des enseignants et l'insertion effective de ce discours dans les activités possibles des élèves lors des déroulements. L'efficacité des moments d'exposition de connaissances dépendrait ainsi, en partie, à la fois des occasions et de la qualité des proximités discursives, comme nous allons l'illustrer maintenant sur notre exemple.

Relief sur l'enseignement de la variation des fonctions en seconde

Nous nous intéressons à la question suivante : comment peut se faire, en seconde, l'introduction de la définition (nouvelle) formalisée de la notion de fonction croissante (resp. décroissante) - pour tout a, b de l'intervalle d'étude, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) ? Ce qui est en jeu est la traduction ponctuelle universelle doublement quantifiée d'une propriété globale sur les fonctions (Rogalski M, 2008). Quelles motivations l'enseignant peut-il trouver pendant son cours à cette introduction formelle algébrique ? Quelles activités préalables – en termes notamment de reconnaissances, d'organisation ou de traitement - peut-il avoir fait développer aux élèves et comment peut-il s'appuyer sur les connaissances déjà-là et/ou les activités préalables des élèves pour introduire cette définition nouvelle ? Avant d'aborder nos analyses de moments de cours pour répondre à ces questions, nous établissons ce que nous appelons le relief sur l'enseignement de cette notion (Robert et al., 2012). Ce relief nous sert de référence didactique pour toute la suite de notre étude.

Cette notion de relief permet de faire le lien entre la Théorie de l'Activité (qui n'est pas une théorie didactique) et la didactique des mathématiques, les contenus en jeu et les processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Il s'agit d'une triple analyse croisée, préalable, mathématiques (et épistémologique), curriculaire et cognitive sur la notion enjeu de l'apprentissage. Cette étude préalable aux analyses des tâches proposées et déroulements en classe, permet de situer par rapport aux contenus visés les activités intriquées des élèves et du professeur. Nous passons en revue les programmes d'enseignement, qui permettent de préciser les mathématiques en jeu à ce niveau et avant. Nous repérons les exercices possibles sur la notion en jeu. Il s'agit également, compte tenu de nos analyses mathématiques et des programmes, de traquer des éléments cognitifs – en termes d'activités possibles - qui balisent le cheminement des élèves jusqu'à la notion visée (ici la définition formalisée de la (dé) croissance d'une fonction), en signalant en particulier les difficultés déjà repérées et prévisibles des élèves. Nous en déduisons des tâches d'introduction envisageables, avec les appuis possibles ou impossibles pour le premier cours qui suit.

Les mathématiques en jeu

La formalisation algébrique de la définition du sens de variations correspond à ce que nous appelons une notion FUG[7](O), compte tenu de ce que savent les élèves au moment où elle est introduite : elle formalise la notion de croissance (resp. décroissance) d'une fonction sur un intervalle, mais de manière nouvelle, algébrique, et hors de portée d'imagination des élèves ; elle unifie cette notion pour toutes les fonctions déjà rencontrées (linéaires et affines, voire autres) ; elle contribue à unifier l'approche graphique et l'approche numérique grâce à l'expression algébrique ; elle permet la généralisation de la notion à d'autres fonctions qui ne sont pas nécessairement encore connues des élèves de seconde. Les approches numérique, graphique et algébrique de la croissance sont ainsi reliées.

Mais le plus important tient au (O) comme opérationnaliser. En effet les descriptions dynamiques des variations d'une fonction en termes d'allures de courbes ou celles, numériques, mettant en jeu des augmentations simultanées de valeurs, ne se laissent pas traduire formellement directement dans le langage mathématique précis attendu, même si on dispose de l'expression algébrique de la fonction. C'est ce qu'ajoute la définition formelle étudiée. Le (O) signale ainsi qu'il s'agit d'opérationnaliser une propriété qui est facilement perçue de manière dynamique – graphique ou numérique - mais traduisible en une expression algébrique, statique, avec laquelle on peut travailler.

Signalons, pour raccrocher le choix de notre thème mathématique à d'autres travaux actuels en didactique, une étude épistémologique récente des formulations successives des variations des fonctions, en relation avec l'étude du signe de la dérivée, qui est accessible dans Cabañas-Ramírez N.O & al. (2020). Elle montre plusieurs formulations successives, historiquement et dans les manuels, et elle confirme le fait que la formalisation actuelle est apparue tardivement (1912), bien après l'émergence du théorème liant signe de la dérivée et variations de la fonction. Les travaux de Hitt et González-Martín (2016) constituent plus globalement une source de références pour l'étude de l'enseignement des fonctions.

Aspects curriculaires (les programmes)

Les séances que nous étudions ici relèvent du programme de seconde de 2009 en France, précédant le nouveau programme entré en vigueur en 2019. En réalité, en ce qui concerne le chapitre des variations des fonctions, il n'y a pas de réel changement à signaler entre les programmes de 2009 et de 2019 (ni d'ailleurs de changements après la parution en 2019).

Au collège, les fonctions sont abordées dès le collège où les élèves ont découvert des premières généralités sur les fonctions à travers différents registres de représentations : algébrique, numérique, graphique notamment. Ils doivent connaitre le vocabulaire de base (image, antécédent, courbe représentative). Ils ont étudié les fonctions linéaires, affines (sans aborder tous les aspects, ils ont les formules et les droites associées graphiquement, sans leurs

[7] FUG : initiales de Formalisation Unificatrice Généralisatrice

équations). Ils ont rencontré depuis plusieurs années des courbes quelconques, associées à des phénomènes ou à des grandeurs, et ont été amenés à reconnaître et interpréter qu'une courbe « monte », « descend », est constante, a un maximum, en référence à l'augmentation, la diminution, la constance de ce qui est représenté en ordonnée. Mais sans aucun formalisme algébrique.

En classe de seconde du lycée, les objectifs affichés dans les programmes sont de consolider les acquis, d'étendre la panoplie de fonctions de références – avec la fonction carré, racine carré, inverse, cube – d'étudier les notions (nouvelles) liées à la formalisation du sens de variation, des extremums et de la parité. Une nouvelle représentation apparaît avec les tableaux de variations.

Ainsi trouve-t-on cités dans le programme « la croissance, la décroissance, la monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et son tableau de variations, ainsi que le maximum et le minimum d'une fonction sur un intervalle ».

Ces variations des fonctions peuvent donner lieu, lorsque la variable décrit l'intervalle considéré, à une perception graphique, globale, sur une courbe (« monte » ou « descend »), à une perception numérique, ponctuelle (les valeurs successives de la fonction augmentent ou diminuent) ou à une définition algébrique formelle mettant en jeu un quantificateur (portant sur les couples ordonnés de réels) et une implication portant sur la comparaison de l'ordre des images de ces réels. Mais il y a des grandes différences entre les traductions dans ces trois registres, la troisième, nouvelle, étant plus difficile à cause de l'introduction d'un symbolisme logique. Le seul cas où une formalisation du même type mais plus simple peut avoir été rencontré concerne la formalisation des extrema d'une fonction, souvent donnée avant celle du sens de variation, et peu utilisée de fait.

Les capacités attendues sont les suivantes : décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe ; dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations […] Cependant pour ces capacités, il n'est nul besoin de la définition algébrique pour réussir les tâches correspondantes. Problématiser cette définition algébrique reste donc très difficile pour le professeur.

Des accents spécifiques sont mis sur la modélisation d'une part et sur la résolution d'équations/inéquations fonctionnelles d'autre part ainsi que sur l'usage des outils numériques (logiciels de géométrie dynamique, tableurs, calculateurs formels et calculatrices notamment). Ainsi dans le premier paragraphe « Fonctions » du programme de Seconde (BO n°30 du 23 juillet 2009) l'utilisation des logiciels est largement encouragée mais en même temps, l'élève doit s'interroger sur la façon dont les courbes sont obtenues : en effet, il doit apprendre « à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données ». Plus loin, on indique « il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. » Il s'agit donc de faire comprendre les limites de ce qu'on peut en déduire des courbes obtenues sur un écran graphique comme avec Géogébra par exemple ou des tableaux de valeurs.

Enfin les commentaires des deux programmes de 2009 et 2019 précisent à un moment donné « Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année ». Notre questionnement sur l'introduction de ces notions rencontre donc bien des pratiques de classes ordinaires.

Aspects curriculaires (les exercices dans les manuels)

Les registres graphiques, numériques et algébriques, déjà en jeu en troisième sont renforcés et augmentés de la définition formelle algébrique des variations, et cela peut alimenter les exercices en classe de seconde.

Cela dit, comprendre et maitriser ces définitions formelles algébriques ne va pas de soi et les tâches qui peuvent y conduire, qui ne sont pas souvent évoquées, sont assez peu nombreuses et peu variées compte tenu des connaissances algébriques des élèves. Si le professeur se contente de décliner les capacités indiquées dans le programme de 2009, on reste bien loin de la maitrise de cette définition. En fait, les deux programmes permettent une certaine latitude, suivant le niveau des élèves et les intentions de l'enseignant, entre des tâches simples et isolées autour de la courbe et du tableau de variation et des exercices plus complexes combinant différents aspects dans de véritables problèmes, utilisant éventuellement la définition algébrique, qui est difficile - on y reviendra plus bas - mais il n'y a pas tellement d'exercices adaptés à faire manipuler cette dernière. A minima, les activités des élèves peuvent être seulement de constater qu'une courbe monte ou descend sur tel ou tel intervalle donné, ou que des valeurs augmentent ou diminuent, et les élèves peuvent en déduire les variations sans jamais utiliser la définition (travail sur une mobilisabilité réduite des connaissances visées). A maxima, les activités portent sur la reconnaissance qu'il s'agit de démontrer algébriquement une (dé)croissance, avec l'organisation et le traitement correspondant (travail pouvant contribuer à la disponibilité de la définition et à sa mise en œuvre grâce à des calculs sur des inégalités algébriques).

Mais, dans les exercices de seconde (cf. manuels) il y a peu d'occasion d'utiliser la définition algébrique de la croissance comme outil. Souvent on s'appuie sur un graphique pour étudier les variations et l'algébrique ne vient qu'en vérification éventuelle, voire pour apporter une précision ou déjouer une fausse perception, mais dans des cas rares. Vu les connaissances algébriques des élèves, qui ne savent pas encore étudier en toute généralité le signe d'un trinôme du second degré, il y a peu de fonctions données par leur expression algébrique pour lesquelles ils peuvent utiliser la définition pour trouver le sens de variation. La démonstration du fait qu'une fonction affine donnée par la formule $f(x) = ax + b$ est croissante si et seulement si a est positif, permettant l'utilisation « outil » de la définition formelle, n'a pas d'enjeu en classe de seconde et elle est rarement observée dans les manuels et les pratiques. Et le fait qu'il suffise, pour avoir le sens de variation d'une fonction affine sur un intervalle $[c; d]$, de comparer $f(c)$ et $f(d)$, peut perturber l'adoption de la formule dans le cas général où on ne peut pas se contenter de comparer les images des extrémités de l'intervalle.

On peut aussi réserver l'usage de la formalisation aux exercices qui suivent l'introduction des nouvelles fonctions de référence du programme, comme les fonctions carré ou inverse, mais cela n'aidera pas plus à établir cette formalisation. En fait c'est le passage au calcul algébrique à proprement parler qui s'avère délicat, vu les difficultés prévisibles des élèves de seconde dès qu'on a affaire à des fonctions un peu compliquées…

Enfin, la notion de dérivée permettra, en classe de première, d'éviter le recours à la définition algébrique, ce qui en minore l'intérêt, au moins pour les enseignants, et justifie de ne pas s'attarder sur ces exercices où la recherche du sens de variation se fait algébriquement.

On pourrait donc s'interroger sur l'utilité de l'introduction de cette formalisation, alors même qu'elle n'est pas très nécessaire dans l'enseignement à ce niveau : nous y voyons un intérêt étant donné que la conceptualisation (Vergnaud, 1990) est un processus long et que cette première rencontre joue un rôle certain de familiarisation.

Aspects cognitifs

Nous détaillons les activités mathématiques, associées aux différents registres en jeu. Le travail sur les variations dans le registre graphique ne met en jeu que la courbe, ensemble de points, et la description correspondante en termes d'allure (montante ou descendante) fait travailler aux élèves la perspective globale sur les fonctions (Montoya et al., 2018). Elle ne fait pas intervenir les deux coordonnées de ces points, ni a fortiori leur dépendance et leur covariation, pourtant en jeu. De plus elle est dynamique, mettant en scène un mouvement qui est ajouté. Or pour une courbe donnée, la fonction qu'elle représente n'est pas visible en tant qu'objet séparé. Il y aura donc à transporter, et ce n'est pas transparent, d'un registre à un autre non congruent, les notions de croissance (la courbe monte), décroissance, variation. Le problème n'est pas qu'une question de vocabulaire : la courbe monte et la fonction croit. C'est une question d'interprétation d'une visualisation (Duval, 2005) dynamique et globale en dimension 2, en une connaissance sur les fonctions, pour laquelle il n'y a plus qu'une dimension, celle portée par la variable indépendante.

En outre que ce qui est interprété visuellement le plus immédiatement est la variation de y, en ordonnée, celle de x, en abscisse, étant « cachée » dans le sens du parcours, de gauche à droite. Il y a donc une inversion avec le fait que, en phrase ou dans le tableau, on commence par x (en première ligne du tableau). Il y a également une « traduction » souvent laissée implicite de « plus haut » ou « à droite » (on regarde la place sur un axe) en « plus grand » (on introduit un ordre sur les valeurs représentées sur l'axe). Enfin, les intervalles concernés peuvent ne pas être précis, les lectures graphiques ne pouvant être qu'approximatives – même si certaines conventions peuvent être adoptées à ce sujet.

Le travail dans le cadre numérique permet quant à lui de dissocier plus explicitement x et $f(x)$, tout en décrivant leur co-variation, par exemple en faisant afficher les valeurs de x et $f(x)$ sur un tableur. La perspective ponctuelle sur la fonction en jeu est concernée, favorisant sans doute un lien avec la définition formalisée qui est ponctuelle universelle. Mais, encore une fois, comment traduire algébriquement que, comme on peut le constater, quand les valeurs de x augmentent, celles de $f(x)$ aussi (pour fixer les idées) ? Et sur quels intervalles ?

Il y a, pour aborder le troisième registre, un double travail mathématique, précisément une double « astuce » mathématique. En effet pour traduire de manière statique la notion de (dé)croissance, sans faire appel à l'augmentation, ni au mouvement, il faut comparer algébriquement les valeurs de $f(x)$ pour deux valeurs a et b de x – perspective ponctuelle dynamique, devenue statique - et, comme c'est évidemment insuffisant, il faut le faire pour tous les couples (a ; b), ou, ce qui revient au même pour un couple « quelconque », c'est-à-dire tel que les valeurs particulières que pourraient prendre a ou b n'interviennent pas. Il y a ainsi un quantificateur sur les couples, et une implication pour un couple donné, qui doit être démontrée de manière générique, sans faire intervenir de valeurs spécifiques : c'est une implication universelle.

Ainsi, en anticipant sur ce qui suit, si une partie de la définition algébrique, en termes d'inégalités - $a < b$ implique $f(a) \leq f(b)$ - est facilement associée au tableau de valeur des couples $(x, f(x))$, voire à la représentation graphique de la fonction (qui « monte »), même si les élèves ne peuvent pas toujours y penser seuls, le fait qu'il est nécessaire que ce soit vérifié pour tous les couples (a ; b) tels que $a < b$ est nettement moins intuitif. Trouver la double astuce précédente nous semble inaccessible à la plupart des élèves de seconde. Mais la comprendre nous semble accessible après des explications suivant la donnée de la formule, notamment si le travail dans les cadres numérique et graphique a été bien avancé. Ainsi, une fois la formalisation établie, les élèves peuvent facilement en visualiser la signification sur la courbe par exemple ou le tableau de valeurs.

Les introductions possibles de la définition formalisée

Il semble donc qu'il est difficile de trouver un problème tel que les élèves « seuls » aient besoin, pour le résoudre, de la formulation algébrique. S'intéresser à la « double » variation simultanée de x et $f(x)$, au lieu de s'appuyer sur la seule courbe, semble en revanche possible et suffit souvent pour un certain type de réponses. Par exemple, les élèves peuvent avoir « besoin » de trouver quand telle grandeur croit en fonction de telle autre, quand il y a des maxima ou minima, quand ne pas dépasser telle valeur, etc. S'ils ont une courbe ils peuvent répondre. S'ils disposent des valeurs sur un tableur, ils peuvent aussi donner des réponses (approximatives cependant, comme avec une courbe). Sinon, s'ils n'ont que des informations algébriques par exemple, ils n'ont aucun moyen pour le faire, si ce n'est à se ramener à une courbe…tracée par un logiciel ou par eux à partir de valeurs, mais approximativement (sauf si c'est une fonction affine).

De ce fait, les activités sur la tâche introductive nécessitent sans doute une intervention complémentaire de l'enseignant (et des proximités) pour aller jusqu'à l'expression algébrique des variations de la fonction, en s'appuyant sur les acquis antérieurs. Pour alimenter ces moments d'expositions de la connaissance nouvelle, nous avons trouvé deux grands types de tâches introductives (appelées souvent « activités d'introduction ») dans les manuels selon la façon dont on envisage ce lien courbes/fonctions.

Le premier type permet de faire travailler sur des graphiques directement fournis aux élèves, permettant de réviser les descriptions des courbes et les interprétations correspondantes sur la co-variation – extrema, intervalles où la courbe monte ou descend. Ce sont souvent des situations non mathématiques qui sont en jeu, et on ne connait pas les fonctions associées. Souvent la variable est le temps. Rien dans ce type de tâches n'amène au besoin d'une formulation plus précise, si ce n'est, éventuellement, une certaine approximation des lectures, mais qui ne peut pas être résolue au sein de la tâche. Les activités des élèves, même a maxima, peuvent donc n'embarquer que la perspective globale sur les fonctions, si tant est qu'elles soient développées dans le cadre fonctionnel. Elles peuvent rester dynamique et rien ne favorise des proximités discursives vers la définition nouvelle visée.

Le deuxième type d'introduction permet d'aller un peu plus loin. Les élèves ont à modéliser (mathématiser) eux-mêmes la situation de départ et disposent donc d'une expression algébrique. Les activités des élèves sont développées dans le cadre fonctionnel. Cela permet d'aborder la traduction algébrique de la croissance (par exemple), soit en tant que telle, en l'appliquant à la fonction en jeu, soit pour gagner en précision – ce qui reste difficile au vu des connaissances algébriques à mobiliser - soit pour introduire une problématique plus générale où on ne disposerait ni d'une courbe ni des valeurs de la fonction étudiée. Le premier exemple étudié est du deuxième type et il est donc plus susceptible d'amener les élèves sur le chemin de la définition. Le deuxième exemple étudié relève du premier type et la suite de l'exposé justifiera la présentation dans cet ordre.

Le premier exemple : une activité d'introduction (surfaces agricoles) suivie d'un cours (Robert & al., 2020)

Dans cette tâche, l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ), est introduite. On cherche s'il y a un maximum de cette surface. Nous n'analysons pas le déroulement du travail des élèves sur la tâche introductive (figure 1) : il se déroule en demi-classe et ne permet d'aborder que le tout début du problème.

NOM : **Classe :**

Prénom : **Date : ……. / ……. / …….**

Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les 750 mètres de clôture.

Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?

Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

Figure 1 : énoncé distribué aux élèves

La modélisation et l'exploration sont laissées aux élèves sur le temps de la séance en demi-classe. Les élèves doivent reconnaître et travailler dans le cadre fonctionnel, d'où l'introduction d'une fonction du second degré explicite, qui pourra permettre un traitement algébrique (obtention de la fonction $x(750 - 2x)$ avec des aides procédurales de l'enseignant, x longueur du côté perpendiculaire à la rivière). Dans cette première séance, les élèves démarrent plus ou moins selon les groupes une exploration graphique du maximum guidée par l'enseignant. Mais aucun groupe ne va au bout de l'activité mathématique en ce qui concerne les variations, qui ne sont même pas encore évoquées ! Cela permettra toutefois de rapprocher les élèves de questionnements et de réponses possibles sur les variations de la grandeur étudiée quand la longueur d'un des côtés varie. Les élèves pourront répondre en s'aidant du graphique ou d'un tableau de valeurs mais leurs réponses resteront nécessairement approchées (choix adéquat des variables didactiques). Cela peut donc être l'un des prétextes pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ».

A partir du tableur

Dans la deuxième séance (celle de cours), après avoir résumé ce qui a eu lieu dans la première séance et redonné l'expression algébrique de la fonction en jeu, l'enseignant propose d'abord aux élèves de percevoir et décrire visuellement les variations grâce à une animation numérique sur le tableur (affiché au tableau). Les élèves peuvent répondre, en affinant leurs formulations. On obtient l'établissement de la co-variation numérique, facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique de la co-variation. Voici la transcription de cette phase pour identifier les proximités discursives à ce moment-là (E désigne un élève, pas nécessairement le même ; entre parenthèse le minutage de la séance).

(15) Donc ça nous c'est ce qu'on propose à l'ordinateur, au tableur et il nous calcule les surfaces. *[on voit les deux colonnes du tableur avec x et f(x)]*

(…)

Alors vous allez regarder. ce qui se passe ? Dans la colonne de droite évidemment, silence (7'')

Alors regardez bien parce que…

E. Stop

Quoi stop ?

Alors on peut peut-être s'arrêter là alors qu'est-ce que vous avez remarqué ?

E. Le maximum…

Alors il se trouve que dans la première partie du tableau qu'est-ce qu'on a constaté ?

E. … (inaudible)

Donc j'espère que vous avez noté des choses.

E. Ben oui

Alors vous avez noté que dans la première partie du tableau **on constate que la surface augmente (son doigt suit la colonne en descendant)**

E. Puis diminue

jusqu'à, alors, une valeur qui pour l'instant est maximale

E. en nombre entier

en nombre entier. En tout cas 190 on a 70300 et après on constate que, pour l'instant, on va aller au bout

E. (inaudible)

Ça diminue. Alors est-ce que ça continue à diminuer tout le temps

E. ouais

Et là on est à 0. Alors qu'est-ce qu'on pourrait dire globalement, c'est-à-dire qu'est-ce qu'on a observé ?

Alors pas tout le monde à la fois vous levez la main…

(17) Chut vous écoutez, vous vous écoutez…

E. (inaudible)

On est à la 15$^{\text{ième}}$ minute. Le professeur projette le tableur avec les deux colonnes intitulées x et $f(x)$ pour préparer la définition ; comme les élèves ont travaillé sur la modélisation dans la première partie, on peut penser que les activités des élèves embarquent déjà du fonctionnel et donc qu'ils vont reconnaître ce codage. Mais ce sont des inférences. Le professeur pose des questions sur ce que les élèves constatent. D'abord c'est le maximum qui est remarqué mais ce n'est pas repris par le professeur car cela ne contribue pas à l'avancée vers la variation. Le professeur reformule la question et s'appuie sur des activités préalables et supposées des élèves : « on constate que la surface augmente ».

Nous constatons toutefois que les élèves continuent d'emblée la phrase en ajoutant « et diminue » quand le doigt du professeur continue sur la colonne du tableur. On a bien une proximité discursive car les élèves – ou du moins un élève - s'emparent du « augmente » et continuent avec « diminue ». On peut donc considérer que le « augmente », même s'il n'est pas prononcé en premier par les élèves, est bien en appui sur les activités des élèves et constitue un appui pour l'activité suivante.

C'est une proximité horizontale car elle correspond à une lecture descriptive en langage courant du registre numérique, sans changement du niveau de généralité. Cette illustration de la notion de proximité montre que cette dernière est identifiée aussi bien par des activités élèves préalables que par des activités qui suivent (ici une reprise avec « diminue »). On identifie également le début du cheminement cognitif mis à jour dans le relief de l'enseignement de la notion visée. L'interaction continue.

Alors dans la colonne de gauche est-ce que les valeurs augmentent tout le temps ?
E. Oui
Dans la colonne de gauche les valeurs augmentent de 10 en 10 régulièrement de 0 à 375
Dans la colonne de gauche x augmente tout le temps et du coup tandis que x augmente
E….

Dans cet épisode, le professeur provoque de la visualisation sur la colonne de la variables indépendante. L'inconnue « *x* » apparaît. Le discours n'est plus sur « ça augmente » mais « *x* augmente ». Comme on l'a déjà signalé, les élèves ont déjà eu des activités sur la modélisation fonctionnelle dans le début de la séance. En outre, dans le tableur affiché au tableau, les symboles « x » et « $f(x)$ » notés en haut des colonnes du tableur sont explicites et l'enseignant s'appuie sur cette projection. Comme dans l'épisode précédent, il faut continuer d'étudier la transcription pour savoir si l'introduction du « *x* » dans le discours relève bien d'une proximité discursive (ascendante dans ce cas puisqu'on introduit la formalisation algébrique).

Donc dans la colonne de droite .
E. ça augmente
ça augmente
E. et après ça diminue.
et après ça diminue. Donc on a d'abord des valeurs qui sont en augmentation et puis après, alors ici c'est à 190 que ça a l'air de changer, et après c'est en diminution,
E. à partir de 200
voilà à partir de 200 et jusqu'à la fin. J'ai mis 375 parce que ça tombe sur 375 où ça fait 0, bon. Donc **(18)** qu'est-ce qu'on peut déjà dire. Qu'est-ce que ça peut nous permettre de dire cette observation.
Et déjà c'est pas toutes les mêmes valeurs ça on l'a vu, il y en a plein plein de différentes. Et puis de façon plus globale,
E. plus x est grand
plus x est grand
E. plus la surface est petite.
E. non
Alors c'est pas ça. Alors corrigez, J, corrigez
Chut, non vous vous écoutez sinon, comme c'est un peu compliqué il faut vraiment faire un effort
E. Ben ça augmente mais au bout d'un moment ça rediminue
Dans un premier, pour certaines valeurs de x ça augmente
E. Et après ça diminue
Et après ça diminue. Alors est-ce que c'est clair pour tout le monde ça ?
Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire comme phrase ? Essayez de faire une phrase, oui une phrase, A.
Alors c'est quelle première partie ? Y a une première partie où la surface augmente.
E : ben sur x à un certain moment (19)
Alors sur x. Précisez sur x justement *[avec un geste de gauche à droite]*

Dans cet épisode, l'enseignant suscite à nouveau de la visualisation sur la colonne de droite pour relier les variations des deux variables. Un élève reprend effectivement « plus *x* est grand » ce qui nous confirme que le discours du professeur « plus *x* augmente » de l'épisode précédent est bien dans notre interprétation une proximité ascendante. Plus précisément, la notion d'augmentation des valeurs était déjà identifiée par les élèves dans le premier épisode et ici le « *x* » est repris par un élève. Donc ce passage au « *x* » peut bien être considéré comme une proximité ascendante des activités des élèves vers la connaissance nouvelle visée. En outre un autre élève a bien repris à son compte « plus la surface diminue », ce qui nous donné également un élément pour dire que *x* et *surface* peuvent bien s'installer à ce moment-là dans la ZPD des élèves.

Toutefois, on remarque que le « augmente » a été perdu puisque l'élève dit « plus *x* est grand ». Le professeur reprend à son compte dans un premier temps mais de suite fait corriger car « plus *x* est grand » ne sert pas son propos. Le caractère « grand » n'est pas un synonyme de « augmente ». Pour « grand », un seul « *x* » statique suffit, par rapport à une référence, tandis que pour traduire l'augmentation il vaut un « *x* » dynamique ou bien deux « *x* » statiques comparés via la relation d'ordre. Le professeur continue alors de développer son propos « pour certaines valeurs de *x*, ça augmente » et un élève continue « après ça rediminue ». L'interaction est longue et fastidieuse mais on identifie que le « *x* » est bien intégré dans les propos des élèves et donc, pour nous, peut relever de la ZPD des élèves. A la minute 19, c'est ainsi bien un élève qui dit « bah sur *x* à un certain moment… »

E. Sur *x* ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue

Alors on va essayer alors. Jusqu'à 190 pour *x*. Donc qu'est-ce qu'on pourrait dire pour *x* ?

E. Ca augmente jusqu'à 190 et à partir de 200 ça diminue

D'accord donc on part de 0 jusqu'à 190. Quand on prend *x* entre 0 à 190 on constate que la surface semble augmenter et quand on se met entre 200 et 370 la surface

E. Diminue

Diminue. D'accord donc 0 190 c'est un premier **intervalle** *[il montre le tableau déjà écrit à gauche]* (…)

On constate que sur l'intervalle 0 190, quand on prend x entre 0 et 190, on constate on a une surface qui est en augmentation et puis sur l'intervalle 200 370 **(20)** on a des surfaces qui sont en diminution. Vous voyez ça ?

La discussion se poursuit. Un élève dit « sur *x* ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue ». Et le professeur fait une nouvelle proximité ascendante en utilisant le mot « intervalle » en appui sur l'idée « jusqu'à un certain nombre et après ». Ce terme d'intervalle, que les élèves connaissent déjà, sera repris plus loin par les élèves. A ce moment, les élèves ont un début de formalisation de la perception dynamique et ponctuelle, on trouve presque « plus *x* augmente » dans les propos des élèves mais pas encore tout à fait.

Dans ces épisodes, l'enseignant provoque du « fait » ou du « dit » par des activités puis il pose des questions sur ce qui a été fait ou dit (7 fois de suite : les constats sur le tableur, les valeurs qui augmentent puis diminuent, le passage à *x*, les intervalles, la formulation, et une question « est-on certain ? » ci-dessous). L'établissement de la co-variation numérique est facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique dynamique ponctuelle de la co-variation. Les élèves peuvent relier l'observation sur la première colonne à « *x* augmente » et la deuxième colonne à « la surface augmente sur un intervalle puis diminue sur un autre intervalle ». Sont donc en jeu des activités sur la co-variation (*x*, *surface*) qui embarquent toujours du dynamique et du ponctuel mais avec la formalisation algébrique *x*. On est donc à mi-chemin de la covariation $(x,f(x))$ et de fait encore très loin de la formalisation finale qui nécessite un point de vue statique.

Le professeur suscite alors une proximité descendante sur l'intérêt de l'algèbre dans le problème de formalisation.

Bon. Est-ce que ça veut dire que le maximum on l'a de façon certaine ici

E. Ce n'est pas précis

Ca n'est pas précis Pourquoi ?

E. inaudible

Voilà. On a un écart de 10. Est-ce qu'on pourrait avoir, est-ce qu'on pourrait arriver à l'avoir exactement ? J. parlez pour tout le monde en levant la main

E. On fait un écart de 1
Un écart de 1. Chut, Ca suffira ?
E.
En commençant éventuellement à 190 effectivement, en restreignant la zone, M.
E. On résout une inéquation
Ah On résout une inéquation. Donc est-ce que c'est le tableur qui va nous la faire ?
E. Non
Voilà Donc là qu'est-ce que vous pointez comme, comme heu, comment dire comme différences enfin comme options là ? Avec le tableur est-ce qu'on peut avoir un résultat exact ?
E. Non, approximation
On va avoir une approximation alors de plus en plus précise J. a raison parce que plus le pas va être petit (**21**) plus on va peut-être arriver à donner une valeur précise. Mais M. elle voulait résoudre une inéquation donc revenir à de l'algébrique pur. C'est ça (il montre le tableau). Voilà. **Alors effectivement, on avait vu ça que avec l'algèbre on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis**.

Cet extrait illustre cette fois le fait que l'enseignant propose aussi une proximité descendante à partir de connaissances déjà là à propos de l'algèbre (qui permet d'avoir un résultat précis dans notre situation de surface agricole). Il suscite le questionnement sur la précision « de façon certaine » et ça lui permet de conclure « avec l'algèbre, on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis ».

A partir du graphique

Dans une deuxième phase, en projetant cette fois le graphique proposé par GéoGébra, le professeur organise le même style de discussion avec des proximités du même type. Nous donnons maintenant quelques extraits discontinus à titre d'illustration :

À votre avis qu'est-ce qu'on peut choisir comme mot pour dire que la courbe monte ou que la fonction prend des *[gestes vers le haut]* valeurs qui augmentent. Alors on a été cherché un **synonyme d'augmenter**
E : ascendant
un autre E : croissant
Croissant
(…), donc là vous pouvez noter **qu'on est encore dans l'exploitation de l'exemple des surfaces agricoles** (…)
(…)
E : Ah ben intervalle 0, 187,5
Voilà si on fait confiance à GéoGébra pour l'instant on n'a pas… *[il écrit et dit]* on va dire que sur l'intervalle [0, 187,5] la fonction *f* est, alors on va mettre en rouge, donc le mot hein **le mot qu'on a choisi**, on aurait pu en prendre d'autres, c'est croissante *[écrit en rouge]*. Bon alors après (…)

Le professeur pose d'abord la question sur le « synonyme d'augmenter » pour provoquer la proximité ascendante avec le mot croissant. Cela fonctionne puisque le mot « croissant » est bien en appui sur les élèves. Une proximité descendante est proposée aussitôt pour ramener le « croissant » dans le contexte de la surface agricole. Le professeur instaure donc la connaissance nouvelle en appui sur les activités des élèves. Le mot « intervalle » est retrouvé dans les propos d'un élève et donc qu'il y a bien une proximité ascendante à nouveau quand le professeur dit « sur l'intervalle [0, 187,5] la fonction *f* est croissante ». De façon parallèle, le professeur accompagne la caractérisation FUG de la définition qu'il cherche à installer par du discours méta mathématique « c'est le mot qu'on a choisi ».

(…) le tableur par exemple, **dans le tableur on a vu que les valeurs augmentaient (32) et ça correspond à une courbe qui monte sur le graphique**. Ca c'est des choses aussi qu'il faut retenir. Ca c'est le mot précis et derrière ce mot c'est bien d'avoir des références. Donc dans le tableur les valeurs augmentent, sur la sur le dessin la courbe monte. Et la fonction on ne dira pas qu'elle augmente ou qu'elle monte, on dira qu'elle est croissante. Ca c'est le mot précis.

Dans cet autre extrait, il y a une proximité horizontale entre ce qui a été établi plus haut sur le tableur et ce qui est en jeu maintenant sur le graphique. Le processus est toujours très long. Nous sommes la minute (32) de la transcription et il y a eu jusque-là un jeu complexe de proximités horizontales, ascendantes, descendantes. Les activités des élèves, associées à ces proximités, embarquent toujours uniquement du dynamique – numérique et graphique - et rien de statique, qui préparerait la définition formalisée. Elle mettent toutefois en jeu la dialectique ponctuel-global, en appui sur le tableur qui met l'accent sur le ponctuel puis sur le graphique qui met l'accent sur le global et l'intervalle.

On n'a cependant toujours pas $f(x)$ même s'il est là en germe car les activités des élèves sont inscrites le cadre fonctionnel grâce à la tâche d'introduction et son exploitation. Le vocabulaire et du méta pour justifier l'aspect FUG(O) sont présents, notamment « on décrit les phénomènes par des mots, des mots précis », de l'ordre de l'importance de la formalisation en fait.

L'apparition de la définition formalisée

On en vient à une troisième phase qui prépare la définition formalisée plus directement.

(**34**) Alors maintenant on n'a pas répondu à sa question : comment ça se traduit ça. **Ca se visualise en courbe qui monte ou qui descend ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent**. Maintenant il faudrait qu'on soit capable de dire ça en termes algébriques…

(…) [il montre le mot « croissant » sur le tableau]

E. … inférieur

Mais cette phrase-là **vous êtes d'accord qu'elle n'est pas très opérationnelle en termes de calcul**. C'est du constat, c'est une observation. On utilise le signe comme ça (<) c'est ça ? **(36)**

(…)

(**39)** Dans une fonction, il y a x et il y a y, il y a x et il y a $f(x)$. Oui alors, mais là j'essaie de voir quelque chose qui serait général, c'est-à-dire sur cet exemple de donner une définition de fonction croissante qui soit une définition générale.

E… sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente plus y augmente aussi

Alors plus x augmente plus y augmente. Est-ce que ça ça vous parait une bonne description ? Voilà. Alors ça c'est nouveau plus x augmente plus y augmente. Ca est-ce qu'on peut mettre ça en algèbre ? C'est-à-dire écrire ça avec des symboles. Peut-être ce symbole-là *[il montre <]* il peut être utile

L'enseignant propose d'abord une proximité horizontale pour relier les deux registres en jeu associé aux deux perspectives en jeu « On visualise en courbe qui monte ou qui descend (global dynamique), ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent » (ponctuel dynamique). Le professeur montre le mot « croissant » sur le tableau. C'est à nouveau une façon de relancer et provoquer de l'activité chez les élèves, en l'occurrence de l'activité sur le changement de registre. De fait, l'un des élèves propose « inférieur », ce qui permet à nouveau au professeur de faire une proximité ascendante appuyée sur « inférieur ».

Il est plus incertain de dire si « $f(x)$ » dans « il y a $f(x)$ » arrive dans une proximité parce même s'il a été rencontré dans la première phase avec la colonne du tableur, il n'est toujours pas repris par l'élève à ce moment-là. Ce qui est repris par un élève, c'est « sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente, plus y augmente aussi ». C'est toutefois déjà un bon appui pour la formalisation. On observe que le professeur reprend la formulation avec le « y » de l'élève et non pas le « $f(x)$ ». Il juge peut-être que c'est encore trop tôt. C'est d'ailleurs là que les élèves décrochent et que le discours ne sera plus en proximité comme l'illustre les passages suivants dans lesquels les élèves ont disparu de l'interaction.

[…] **(41)** Ca *x* augmente, ça veut dire quoi ? **Ca veut dire que *x* est de plus en plus grand ? *[ponctuel dynamique]*… Ça veut dire que quand *x* est de plus en plus grand, en même temps *f*(*x*) aussi *[covariation (x,f(x))]*.** Alors le problème c'est que c'est ça qui est compliqué. Cet x augmente de plus en plus. Comment est-ce qu'on peut traduire ça avec ce symbole là *[montre <]* ? Pour dire que *x* est de plus en plus grand ? Ce symbole là il dit bien plus grand que. Donc entre de plus en plus grand et plus grand que on a l'impression que c'est quand même connecté. Oui (42) ?

(…)

(45) Qu'est-ce que ça veut dire x augmente ? Ça veut dire quand je prends **des valeurs de x de plus en plus grandes *[ponctuel dynamique]***, des valeurs de *x* de plus en plus grandes. Là il y a combien de valeurs de x au tableau ? E.

Ben là on a écrit un x – si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins ***[montre deux doigts] [vers le statique ponctuel]***

E. deux

Deux, **sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre *[statique ponctuel ordonné]*.** Alors deux valeurs de *x* sachant qu'il y en a une qui est plus petite que l'autre comment ça va s'écrire ? Déjà deux valeurs de *x*, comment on les écrit deux valeurs de *x* : si j'ai deux valeurs de *x* différentes, si j'écris ça *x x* est-ce que c'est deux valeurs de *x* différentes ?

Le discours se fait beaucoup plus sans réel appui sur les élèves, ni en amont, ni en aval. Il semble que l'enseignant a été au bout des proximités possibles. Il introduit l'aspect covariation x - $f(x)$ à une dimension mais surtout le passage du ponctuel dynamique au ponctuel statique, puis encore au ponctuel statique ordonné.

Un élève réapparait dans l'interaction et dit « deux » quand le professeur montre deux doigts. A partir de là, on va retrouver des proximités ascendantes, c'est-à-dire des appuis sur les élèves pour continuer la formalisation. En effet, tout le matériel est présent (mais est-ce bien dans la ZPD des élèves étant donné le passage sans proximités ?), deux valeurs de x dans un intervalle, le signe < pour les ordonner, les $f(x)$ qui leur correspondent qui sont ordonnés aussi. Reste la quantification universelle à nouveau problématique (deuxième astuce), ci-dessous.

(…)

Est-ce que ce que j'ai fait là, évidemment c'est des exemples, **est-ce que c'est valable quels que soient *[vers la quantification]* les nombres *x*1 *x*2 que je prends dans l'intervalle** à condition que *x*1 soit plus petit que *x*2 ? **(50)** Est-ce que si je prends n'importe quel *x*1 plus petit que n'importe quel *x*2 dans cet intervalle, j'aurais à chaque fois *f*(*x*1) plus petit que *f*(*x*2)

E. oui, ben oui, ben oui

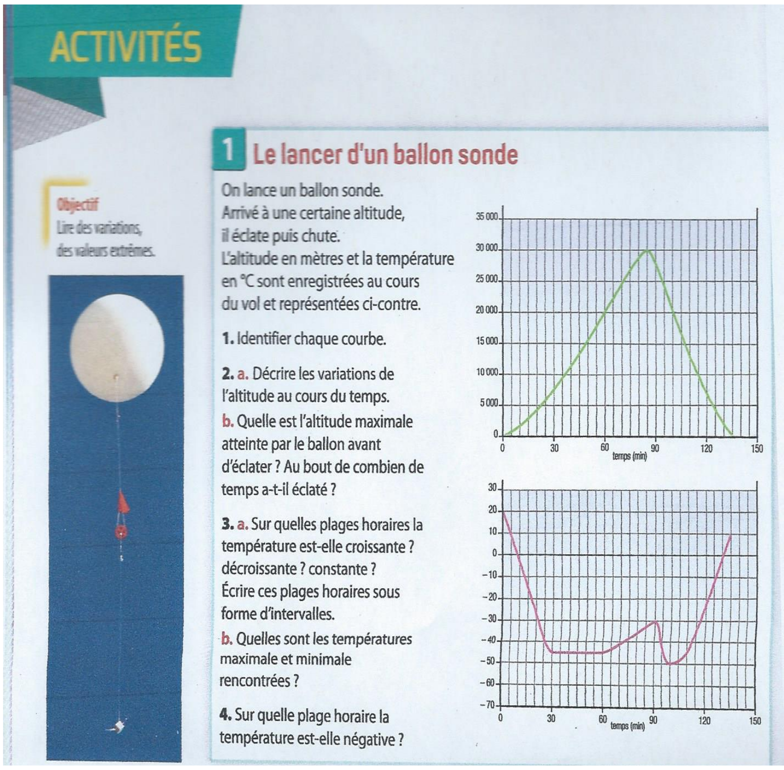
Donc ça pourrait être une bonne façon de traduire que **la courbe monte** par exemple et **c'est généralisable à n'importe quelle fonction *[méta sur l'aspect G]*. Autrement dit une fonction est croissante sur un intervalle si quelque que soient les réels *x*1 *x*2 qu'on prend dans l'intervalle, à partir du moment où *x*1 est plus petit que *x*2, *f*(*x*1) est plus petit que *f*(*x*2)**

On est à la minute 48. Le professeur occasionne une proximité descendante même si la formalisation est encore incomplète, par laquelle le professeur rapproche ce qu'il vient d'établir de « la courbe monte ». On trouve enfin la quantification qui reste un nouveau coup de force sans appui sur les élèves - comme on s'y attendait vu le relief - car c'est le deuxième éclat de génie du mathématicien pour retrouver du global par la quantification universelle, qui est trop difficile pour pouvoir venir des élèves et s'y appuyer.

Au final, le professeur introduit l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ). Il s'agit de chercher si toutes les surfaces sont égales puis s'il y a un maximum. La modélisation algébrique est laissée aux élèves, même si elle est aidée par le professeur – d'où l'introduction dans leur activité mathématique d'une fonction du second degré explicite, qui va permettre une amorce algébrique. Mais, dans la première séance en demi-groupe, les élèves ne vont pas au bout de l'activité en ce qui concerne les variations, même pas évoquées dans la tâche d'introduction. Dans la deuxième séance, l'activité des élèves les conduit grâce aux questions de l'enseignant à une étude numérique puis graphique – avec alors une inévitable approximation des intervalles en jeu qui peut motiver l'introduction de l'algébrique, même si l'étude ne peut être menée jusqu'au bout. Cette reconnaissance de l'approximation, explicitée, joue comme un prétexte pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ». L'autre prétexte avancé est de s'affranchir de la courbe ou des valeurs pour une étude « intrinsèque » algébrique (*cf.* une élève qui a parlé d'inéquation). Mais les élèves n'arrivent pas jusqu'au bout… malgré les efforts du professeur qui ne se prive pas de nombreuses proximités ascendantes, descendantes et horizontales ! Il tente de faire « sortir » la définition mais en vain. Mais dès que la piste de comparer deux valeurs de x est donnée (il lève deux doigts), c'est repris efficacement par les élèves et l'enseignant conclut en ajoutant « pour tout couple » et en s'appuyant sur la courbe pour « vérifier ».

Le deuxième exemple : un scénario proche à partir d'une activité d'introduction du premier type (ballon sonde) (Chappet-Paries & al. 2017)

L'analyse a priori de l'énoncé


ACTIVITÉS

Objectif
Lire des variations, des valeurs extrêmes.

1 Le lancer d'un ballon sonde

On lance un ballon sonde.
Arrivé à une certaine altitude, il éclate puis chute.
L'altitude en mètres et la température en °C sont enregistrées au cours du vol et représentées ci-contre.

1. Identifier chaque courbe.

2. a. Décrire les variations de l'altitude au cours du temps.
b. Quelle est l'altitude maximale atteinte par le ballon avant d'éclater ? Au bout de combien de temps a-t-il éclaté ?

3. a. Sur quelles plages horaires la température est-elle croissante ? décroissante ? constante ?
Écrire ces plages horaires sous forme d'intervalles.
b. Quelles sont les températures maximale et minimale rencontrées ?

4. Sur quelle plage horaire la température est-elle négative ?

Figure 2 : *énoncé du manuel sur lequel les élèves ont travaillé*

Dans cette deuxième activité d'introduction, il s'agit de décrire qualitativement l'évolution de deux grandeurs à partir de deux courbes, données, représentant l'altitude et la température d'un ballon sonde lancé, qui finit par exploser. En fait, nous remarquons qu'il n'est pas indiqué dans le manuel que les courbes représentatives sont associées à des fonctions, d'ailleurs le mot n'apparait pas non plus dans l'énoncé. Il y a là une occasion de proximité laissée aux enseignants et des élèves peuvent ne pas être d'amblée dans des activités relevant du cadre fonctionnel.

Dans la première question, il s'agit d'identifier celle des deux courbes qui représente l'altitude (en déduisant que l'autre est la température). Il faut associer une description en français et une courbe. Cela fait appel à des connaissances anciennes supposées disponibles. Dans la deuxième question a), qui fait intervenir le temps comme variable mais de manière vague (au cours du temps), on demande de décrire les variations de l'altitude : cela demande une lecture globale, sur un intervalle, et il n'est pas nécessaire d'associer augmentation du temps et de l'altitude… Il suffit de considérer la courbe (qui monte) sans s'intéresser explicitement aux valeurs des images pour répondre, et encore moins à la simultanéité de l'augmentation du temps et des valeurs des images. La deuxième partie de la question fait réviser le repérage des coordonnées d'un point de la courbe, facilement identifiable grâce aux connaissances antérieures. Pour la température, on demande sur quelles plages horaires la température est croissante (en anticipant l'usage mathématique par un usage courant) : là encore ce qui est activé met en jeu un intervalle (et une vision graphique globale) et non une mise en relation des augmentations du temps et de la température.

Qu'est-ce qu'il y a à généraliser, quel rapport possible avec l'exercice préparatoire ?

A priori il s'agit - au vu du programme de la classe - de donner une (plusieurs ?) définition de fonction croissante valable pour toutes les fonctions. On pourrait décider d'en rester à une définition généralisant ce qui avait été utilisé dans l'exercice dans un cas particulier : une fonction est croissante quand sa courbe monte… Cela resterait global, dynamique, graphique et visuel (donc pas complètement certain, vu ce qu'on apprend aux élèves sur la non-exactitude de ce qui est seulement vu), peu opératoire et partiel. Comment définir alors par exemple la croissance d'une fonction, définie algébriquement par une formule compliquée, dont on n'a pas la courbe ? Cela, qui pourrait faire l'objet d'une proximité horizontale générale, sera-t-il évoqué dans le cours ?

On pourrait s'appuyer sur l'exercice préparatoire, pour introduire le point de vue algébrique (nouveau), et, plus précisément, sur l'étude de la manière dont les ordonnées des points de la courbe (l'altitude, la température) varient quand leurs abscisses (le temps) augmentent. S'introduirait ainsi un double changement de point de vue, faisant passer d'un sous-ensemble de points de la courbe, associés à une portion de courbe qui monte, à l'étude des variations de leurs coordonnées (x, y), considérées séparément, associées à chaque point. La connaissance de l'écriture des coordonnées d'un point d'une courbe représentant une fonction f comme $(x, f(x))$ a été introduite en troisième mais reste plus mobilisable que disponible, même si de nombreux exercices sur images et antécédents sont travaillés. Elle peut être rappelée à cette occasion, donnant lieu à une proximité horizontale locale, donnant lieu à l'interprétation de la courbe comme représentative d'une fonction f. S'appuyant sur le constat visuel que, dans le cas où la courbe monte, les ordonnées augmentent quand les abscisses augmentent, on pourrait demander aux élèves de caractériser, sans faire intervenir de lecture sur la courbe, une fonction dont la courbe monte, en traduisant ce qui vient d'être constaté, dans ce cas ou plus généralement. Il s'agit d'écrire (de commencer à écrire) que pour tous (a, b) de l'intervalle, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

La formule visée aurait alors une origine dans l'exercice et un intérêt, et on peut même justifier le quantificateur à introduire, en donnant des contre-exemples (graphiques) s'il est omis.

Le déroulement

L'enseignant a fait faire aux élèves l'exercice préparatoire ci-dessus. Nous nous intéressons à l'extrait du cours, filmé, au début de la séance suivant le travail sur cet exercice préparatoire, où l'enseignant introduit la notion de fonction croissante sur un intervalle (nous ne répéterons pas à chaque fois « sur un intervalle »). Nous ne donnons ici pour des questions de place que des extraits du discours de l'enseignant. Quelques commentaires immédiats sont entre crochets en italique au sein même des extraits.

Juste un rappel avant qu'on parle des généralités. Rappel sur ce qu'on a vu la semaine dernière. On a étudié le cas du ballon sonde pour lequel on s'intéressait à deux quantités l'altitude et la température.

Donc on avait étudié deux fonctions du point de vue graphique. *[appui sur l'activité a maxima ; est ce que le rapprochement avec les fonctions a été repris a minima par le discours du professeur ?]*

Donc une fonction qui représentait l'altitude et une fonction qui représentait la température. *[Pas de référence à la variable indépendante, temps, cela ne peut pas provoquer des activités élèves sur la covariation]*

Donc ce qu'on voulait décrire qualitativement, l'évolution de ces deux phénomènes. On avait introduit les notions de fonction croissante et de fonction décroissante. Donc c'est ce qu'on va généraliser aujourd'hui. *[On ne sait pas si ce qui a été introduit a trait uniquement aux quantités croissantes ou décroissantes, explicitement ou non « au cours du temps », ou vraiment aux fonctions – risque de saut…]* […].

L'enseignant montre d'abord les courbes de l'exercice (sur le manuel, projeté au tableau) et rappelle qu'on avait introduit les mots fonctions croissante et décroissante pour qualifier les variations de l'altitude ou de la température correspondant à des portions de courbes qui montent ou qui descendent. Il annonce, à la fin du rappel, que c'est ce qui va être généralisé, ou mis en place. On peut remarquer que la variable temps n'est pas citée par l'enseignant dans son rappel. On ne peut pas savoir si le lien courbe/fonction a été fait, il n'est pas rappelé ici. Les activités des élèves peuvent a minima ne pas concerner le cadre fonctionnel même si le mot fonction est dans le discours du professeur.

Alors ce que je vais faire aujourd'hui, je vous projette le contenu du cours identique à ce que vous avez dans les manuels donc il n'y a pas besoin de recopier sauf quelques exemples supplémentaires […]

Donc premier mot important, c'est la notion de fonction croissante.

[...]

Donc premier cas de figure, j'étudie la fonction sur un intervalle, d'accord, donc un certain ensemble des valeurs de x, on va dire qu'elle est croissante, strictement croissante, si lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ c'est-à-dire des images augmentent également. Ça c'est ce qu'on appelle une fonction croissante *[l'enseignant va directement au ponctuel, dynamique, en une seule dimension – Il n'y a pas de rapport direct avec l'activité qui est globale graphique ! Il n'y a a priori pas de proximité ascendante sauf si le prof l'avait bien préparé pendant la situation d'introduction]*

En fait l'enseignant donne d'abord une caractéristique numérique. Autrement dit il ne s'appuie pas directement sur, pas plus qu'il ne généralise, le travail fait dans l'exercice et rappelé au début : il n'est pas question de courbe, et la propriété choisie comme définition, sans le dire explicitement cependant, n'a pas été nécessaire pour répondre aux questions ! La proximité ascendante potentielle correspondante (voir le relief), mettant en regard croissance de l'altitude et augmentation du temps, n'est donc pas activée. On peut se demander si elle n'est pas
« manquante » ou si l'ordre choisi est le plus proche de ce que les élèves ont fait et sont prêts à généraliser.

Graphiquement ça se traduit par quoi ? Ça se traduit par le fait que la courbe est en train de monter *[gestes du bras qui monte]* Comme notre ballon sonde de la dernière fois, au début l'altitude augmente d'accord. Simplement au niveau du vocabulaire mathématique, on ne va pas dire la fonction augmente, on dira qu'elle est strictement croissante. OK. *[C'est donc une tentative de proximité descendante mais sans aller jusqu'au bout de la mise en relation entre la caractérisation ponctuelle dynamique donnée ET le fait que « le ballon monte » (ou « l'altitude augmente ») qui est global graphique dans la tête des élèves. Une référence à la variable de temps serait nécessaire dans le discours pour faire ce lien].*

L'enseignant ajoute donc immédiatement que « graphiquement ça se traduit par « la courbe est en train de monter ». Là l'enseignant active une proximité ascendante, avec des gestes (mais qui suivent la courbe, pas les coordonnées). Cependant l'association précise courbe/fonction n'est toujours pas rappelée, ce qui rend peut-être difficile le lien à la fois avec ce qui précède (aspect numérique) et avec la formule algébrique qui va être donnée ensuite. Si l'ordre des deux premières définitions du cours avait été inversé, il y aurait eu une occasion de proximité ascendante, entre « la courbe monte » et « quand x augmente, $f(x)$ aussi », s'appuyant sur le rappel des coordonnées des points de la courbe et la lecture « séparée » mais simultanée de leurs variations sur chaque axe. L'enseignant précise ensuite, uniquement graphiquement, la différence entre strictement croissante et croissante (avec ou sans plateau sur la courbe, avec ou sans intervalle où la fonction est constante).

Donc premier cas de figure, je répète, fonction strictement croissante ça veut dire quand x augmente les valeurs des images augmentent, ça signifie aussi, je l'écris là au tableau, si a plus petit que b, vous prenez deux nombres dans un certain ordre, alors $f(a)$ est plus petit que $f(b)$

[il écrit si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$]

[Il n'y a pas de proximité non plus entre la caractérisation ponctuelle dynamique et la nouvelle caractérisation formalisée ponctuelle et statique. Cette dernière n'est pas du tout préparé par l'activité sur le ballon sonde, pas préparée non plus dans le discours « plus x augmente… », il n'y a pas de support graphique pour faire une proximité descendante (Et il manque la quantification, seul le manuel donne la définition complète avec un graphique)]

L'enseignant reprend en fait la première « définition » qu'il a donnée : « quand x augmente les valeurs des images augmentent » et sans transition « si a <b [vous prenez deux nombres dans un certain ordre] alors $f(a) \leq f(b)$». Ce passage du dynamique au statique n'est pas du tout facile, comme on l'a signalé au niveau du relief. Autant, là encore, le passage par la courbe rendrait visible cette interprétation (les coordonnées de deux points de la courbe sont d'ailleurs visibles dans le manuel) autant le rapprochement « hors courbe » fait ici nous semble difficile : on particularise deux valeurs, génériques, et on traduit les augmentations globales simultanées de x et $f(x)$ par une conservation de l'ordre des deux images correspondantes.

L'enseignant fait référence au manuel mais ne le recopie pas intégralement. Il manque la quantification. C'est seulement dans leur manuel – qui est affiché au tableau pendant tout le cours –, que les élèves peuvent voir la formule correcte, générale, (pour tous (a, b), si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$). L'enseignant n'en parle pas… Sans la quantification, l'aspect global est gommé. Par contre l'enseignant complète : « ça veut dire que l'ordre des images est le même que l'ordre des antécédents », formule lapidaire, surement inutile à ce moment-là et qui demanderait, elle aussi, beaucoup d'autres explications.

Alors un élève demande à ce moment-là, comme par hasard, en parlant de la formule si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$: « et ça on l'aura au contrôle ? ». Cette question nous semble peut-être en rapport avec le fait que cette inégalité n'a pas du tout été mise en lien avec ce qui précède, rapprochée de ce que les élèves ont déjà pu comprendre ou faire et qu'elle leur apparait difficile…

Quoi qu'il en soit, l'enseignant reprend « je répète, croissante quand x augmente, les valeurs de $f(x)$ augmentent, l'ordre est conservé, la courbe monte ». Et tout ça, ça veut dire la fonction est strictement croissante… Il n'y a aucune distinction entre les différentes façons d'exprimer la croissance, ni aucune proximité avec ce qui sera opératoire pour les exercices…

Puis il aborde la décroissance et, plus généralement, le sens de variation des fonctions. Cela l'amènera à reprendre la notion de croissance et à répondre à des questions d'élèves…

L'enseignant choisit donc une situation d'introduction difficile à exploiter pour introduire la dernière partie de ce qui est en jeu - *Mais on n'a pas eu accès à cette séance*. Il ne questionne pas les élèves, sauf pour des interventions spontanées évidentes pour les élèves. Il y a un appui sur le manuel projeté en permanence mais l'activité de lecture associée des élèves ne peut à elle seule se substituer à l'activité de recherche sur l'exercice introductif. Même si l'enseignant a annoncé qu'il va généraliser ce qui a été fait pendant l'activité sur le ballon sonde, il n'y a pas d'appui explicite dessus mais plutôt une illustration a posteriori. On trouve plutôt une proximité descendante implicite après l'énoncé de la définition dynamique « quand les valeurs de x augmentent, les valeurs $f(x)$ augmentent ».

Autrement dit, dans l'activité des élèves, ce qui est en jeu c'est l'interprétation du fait qu'une certaine courbe monte (global), avec une prise en compte seulement des images de la fonction représentée – le temps, en abscisse n'étant jamais mentionné (première variable « transparente »). Du coup la traduction algébrique n'est pas préparée par l'activité introductrice (elle permettrait cependant de l'illustrer après coup). On peut parler de tension cognitive qui reste (à l'opposé de la notion de proximité), entre l'activité possible des élèves - globale, graphique - et la nouvelle connaissance visée – ponctuelle universelle, statique - tension très difficile à « combler » via des proximités cognitives discursives. Autrement dit, dans le cours, le lien entre l'activité qui a été développée par les élèves – même a maxima - et la définition visée n'est pas beaucoup fait, sans que soit signalé non plus ce qu'on gagne avec la traduction algébrique formalisée de la co-variation des deux variables en jeu x et $f(x)$, *ie* l'aspect FUG(O) mis en évidence dans le relief.

Conclusion

Dans notre approche théorique, l'activité des élèves est étudiée en classe ordinaire, en relation étroite avec les pratiques du professeur, indissociables. Nous avons fait le choix pour cette communication de développer la notion de « proximités discursives », adaptée à rendre compte des liens que l'enseignant développe avec « ce qui vient des élèves » pendant les moments d'exposition de connaissances. L'efficacité de ces moments dépendrait ainsi, au moins en partie, des occasions et de la qualité des proximités discursives, sous forme d'échanges avec les élèves et entre eux, au sein de reprises, d'explications ou explicitations. Sont en jeu les relations avec les activités possibles - voire effectives - des élèves, en amont ou en aval, et leurs connaissances déjà-là liées à des activités préalables, sur une tâche d'introduction par exemple.

Les activités des élèves dépendent ainsi beaucoup de ce qu'organise et dit l'enseignant. Nous n'avons pas développé l'analyse des séances sur les activités introductives « surface agricole » et « ballon sonde » (en demi-groupe pour la première) mais en revanche nous disposons des vidéos des deux cours qui suivent, ce qui nous a permis de vérifier des différences effectivement liées à ces activités d'introduction. En particulier le choix des activités introductives amène à plus ou moins de « préparation » du contenu nouveau (et notamment de possibilités d'appui) mais si l'enseignant développe ces leviers/appuis à fond c'est LONG.

Pour apprécier les apprentissages, c'est cependant un ensemble d'activités (réalisées), prévues dans un scénario, qui est en jeu : c'est ce qui peut impliquer globalement une conceptualisation des élèves. Cela comprend notamment une diversité organisée des tâches à prévoir, dont le suivi du cours, la donnée des liens entre cours et exercices, avec éventuellement une activité d'introduction, des évaluations adaptées (formatives et sommatives). Pour que les activités proposées, dont le suivi du cours, rapprochent les élèves des connaissances visées, on conçoit ainsi que plusieurs conditions sont en jeu. Du côté du scénario, potentiellement, cela met en jeu les conséquences de ce qui a été établi par l'étude du relief, mais pas seulement ; cela met aussi en jeu les contraintes, y compris les conceptions individuelles en présence et les classes. Du côté des déroulements, cela met en jeu la nature du travail organisé (durée, forme – individuel ou non, instrumenté…) et les accompagnements de l'enseignant. C'est ce cadre qui nous permet de poser les questions de marges de manœuvre et d'alternatives pour l'enseignant.

Dans ces accompagnements, nous avons étudié en particulier ce qui dans le discours de l'enseignant, voire de certains élèves, est susceptible de rapprocher les élèves des connaissances visées : que ce soit en termes d'activités ou de cours. En fait c'est le modèle que nous avons adopté de la ZPD qui légitime cette étude. Nous avons donné deux exemples où on voit des différences importantes entre deux cours d'introduction sur le même contenu, appuyés sur deux activités d'introduction différentes. Cela ne préjuge pas des apprentissages mais cela met en évidence des marges de manœuvres importantes.

Il y a ainsi une palette de possibles dans les appuis : à partir d'activités d'introduction comme dans nos deux exemples, mais aussi d'exemples, ou même d'activités pendant le cours. Pour un exemple, on peut le faire traiter avant, pendant ou après le cours (source ou illustration), et ça introduit différents types d'appui, du contextualisé (activités) au général – peut être préparé par des questions, du général au contextualisé, ou encore sans changement de niveau, par exemple explicitation des changements de point de vue ou de registres. Cela correspond à nos proximités ascendantes, descendantes et horizontales.

L'exposition des connaissances sur une notion FUG

Ce qui est spécifique dans cette communication c'est aussi que notre choix de séances met en jeu l'exposition d'un contenu qui présentent un fort caractère FUG. Dans ce cas, le premier exemple de séance « surface agricole » permet de montrer qu'un déroulement truffé de proximités, en tous genre, semble faciliter effectivement le suivi des élèves (un certain nombre en tous cas) ainsi qu'un début de prise de sens, comme en témoignent les réponses des élèves aux questions de l'enseignant et leurs interventions spontanées. Mais cela dévoile aussi les limites de ces proximités lorsque le contenu visé est trop loin de ce que savent les élèves : l'exemple montre que, comme prévu dans le relief sur l'enseignement de la notion visée, c'est un cas où seul l'enseignant peut donner *in fine* la formalisation attendue, quitte d'ailleurs à multiplier ensuite des proximités descendantes et horizontales. On comprend à la lueur de ce premier exemple les difficultés que peuvent éprouver les élèves dans le deuxième exemple « ballon sonde ». Rien d'algébrique n'y est préparé, il n'y a non seulement pas de proximité possible avec la définition formalisée de croissante, mais aussi peu de proximités possibles avec les formulations intermédiaires. Le passage au formalisme n'est pas du tout justifié, simplement ajouté.

Nous pensons cependant que, quel que soit le problème d'introduction choisi, on ne peut pas faire de proximités ascendantes « jusqu'au bout », jusqu'à faire trouver aux élèves la formalisation algébrique : à un moment donné c'est l'enseignant qui doit faire franchir un saut, donner lui-même la traduction algébrique. Celle-ci n'est pas dans la continuité de ce que les élèves peuvent trouver, même avec l'aide du professeur. Il s'agit de préparer le plus possible le passage – ici en ayant fait expliciter les aspects graphiques et numériques, intuitifs, perceptifs, dynamiques, de la croissance et en ayant posé le problème du formalisme algébrique pour se débarrasser des approximations : « sans avoir besoin de la courbe ou des valeurs ». Les élèves peuvent ainsi entendre que les autres approches restent imprécises, presque toujours approchées mais proches des valeurs exactes, au moins pour éprouver un besoin d'associer un intervalle précis à chaque sens de variation. Ils peuvent concevoir aussi qu'on pourrait disposer d'un moyen ne nécessitant pas de dessiner ou de calculer. Mais cela ne les met pas du tout sur la voie de la formalisation à imaginer, à partir des expressions algébriques : il y a un « saut ». De plus, on ne fait pas vérifier sur la formule de la surface que ce qu'on « voit » sur le graphe ou le tableur est bien la même chose que ce qu'on déduit de la formulation algébrique. Une difficulté « cognitive » est que « l'intuition » s'avère valide mais insuffisante pour aller plus loin. Il n'y a donc pas vraiment besoin du détour algébrique, sauf cependant à exhiber des cas où on se trompe en regardant la courbe. Il en existe mais alors, les connaissances algébriques des élèves étant moindres qu'avant, il est nécessaire de beaucoup guider les calculs pour les convaincre, ce qui affaiblit l'argument. On met les élèves face à un problème formel qu'ils n'ont pas les moyens de résoudre.

Une fois la définition donnée[8], pour suivre la démarche que nous défendons pour l'enseignement de FUG, il s'agit de la commenter, de la faire utiliser (y compris sur l'exemple de l'activité d'introduction ou d'autres exemples donnés avant), d'expliciter comment les mathématiciens ont franchi l'obstacle en trouvant un formalisme adéquat (*cf.* ci-dessus). Dans le cas de la croissance sur un intervalle, pour être sûr de ce qu'on voit et pour pouvoir le démontrer, y compris sans courbe ou valeurs, il faut traduire, autrement que graphiquement ou numériquement, l'augmentation des $f(x)$ quand x augmente. Cette traduction est algébrique. L'idée est de remplacer la perception d'une augmentation simultanée de x et f, intuitive mais intraduisible telle quelle sur les formules, par la comparaison de toutes les valeurs de $f(x)$ deux à deux, pour tous les couples ordonnés de valeurs de x, en vérifiant que c'est le même ordre pour f et pour x… Sauf que vu l'impossibilité de le faire pour tous les couples, on le fait en prenant deux valeurs quelconques de x, faisant preuve pour toutes, si possible. La validité de ce passage d'un « x quelconque » au « quel que soit x » dont on a besoin n'est pas évidente à ce niveau, même si les élèves ont déjà rencontré dans des cas plus simples cette propriété cruciale, véritable apanage du calcul algébrique. On conçoit toutes les proximités descendantes envisageables !

Enfin, la difficulté de cet enseignement est souvent accrue par le fait qu'une fois cette définition donnée, on s'en sert peu, nous l'avons déjà signalé. Peu d'occasions de proximités descendantes dans des exercices donc ! Faut-il pour autant s'en passer, vu le temps que demande le cours correspondant, pour peu d'effets évaluables sur des exercices ? Il n'y a pas beaucoup d'exercices à traiter directement avec les définitions, ils sont difficiles algébriquement et en première on disposera des dérivées.

Notre perspective est ici le moyen terme, la construction chez les élèves de représentations « authentiques » des mathématiques, avec leur complexité. En particulier la conceptualisation de la notion de fonction est longue, elle demande de coordonner « intimement » plusieurs registres, plusieurs aspects (dynamique-statique ; ponctuel-global notamment), dont certains ne vont pas de soi – ayant d'ailleurs demandé souvent un long temps aux mathématiciens eux-mêmes. Le sens de variation en fait partie, et c'est à ce titre que son enseignement « complet » pourrait se justifier à ce niveau, notamment en termes de familiarisation avec l'usage du formalisme algébrique.

Retour aux ZPD des élèves

On peut soupçonner qu'il y a deux manières pour l'enseignant (consciemment ou non) de « placer » utilement son discours dans les ZPD[9]. Une première façon consiste à tirer « vers la généralité » à partir des activités ou connaissances : dans ce cas il est important que les élèves réalisent qu'il s'agit de la même chose, prennent conscience de la généralisation, grâce à la

[8] On pourrait évoquer la donnée d'un pseudo-concept, encore peu « rempli » de sens, à faire travailler pour le transformer en concept.

[9] Dans tout ce paragraphe ce mot est utilisé ici à la place de la périphrase « visant des connaissances proches de celles des élèves ».

proximité ascendante, explicitée avec du déjà-là en contexte ; l'enseignant les tire vers de l'inconnu, ce qu'ils ne feraient pas seuls ; ce serait plutôt le sens des nouvelles notions qui serait en jeu, voire leur caractère objet ou au moins la formulation de celui-ci. Une deuxième façon, peut-être plus spontanée, est « de faire descendre » du général vers des applications contextualisées : dans ce cas il est important que les élèves reconnaissent la contextualisation, grâce à la proximité descendante explicitée avec (une partie du) déjà-là général. On pousse les élèves à adapter ce qui est nouveau à un contexte connu, le problème n'est pas lié à l'établissement du nouveau mais seulement à « se retrousser les manches » pour l'adapter. Ce seraient plutôt les techniques qui seraient en jeu, participant aux caractères outils.

On peut aussi remarquer que souvent l'appui de l'enseignant lui est fourni par un seul élève, pas le même selon les moments. On a pu identifier dans le premier exemple – celui où il y a des interactions – au moins 4 ou 5 prénoms différents. Il semble cependant qu'il y ait un élève qui soit particulièrement sollicité quand c'est difficile. On peut alors penser que pour l'élève dont la réponse est reprise, ou qui est questionné, il y a vraiment écho et potentiellement travail dans sa ZPD. Mais pour les autres ? Il y a un problème théorique indéniable ici : tout se passe comme si l'enseignant travaillait sur une ZPD « moyenne », qui n'est éventuellement pas partagée par tous les élèves, et escomptait quand même une certaine diffusion parmi les élèves des bénéfices de ce travail.

On ne peut ainsi pas affirmer que tel ou tel rapprochement est entendu par des (les) élèves ni qu'il contribue à une acquisition. Cela peut être très différent selon les élèves, comme on l'a déjà souligné pour les aides dans Robert & al. (2012). Une grande prudence s'impose…

En fait, en réfléchissant à cette diversité, on peut encore introduire une autre distinction, mis à part les aspects internes et externes dont parle Vygotski, qui décrivent la nécessité d'une internalisation par les élèves d'éléments proches travaillés d'abord avec autrui. Il y a ainsi peut-être deux autres aspects un peu différents à considérer quand on réfléchit à des processus cognitifs relevant d'un travail dans la ZPD. Il y a d'une part l'existence même chez un élève de connaissances « proches » des connaissances visées, à acquérir, et il y a d'autre part le travail que l'enseignant partage avec l'élève, avec ou sur ces connaissances proches, pour le faire avancer vers du nouveau. Les deux seraient en relation mais pas réductibles l'un à l'autre. Dans quelle mesure y a-t-il chez un élève des éléments de connaissance acquis ou en voie d'acquisition, jouant le rôle de connaissances proche, servant de point d'appui à un travail avec l'enseignant vers la connaissance nouvelle visée ?

C'est une manière schématique de dire les choses – le mot connaissance est ici à prendre dans un sens large, comme nous l'avons rappelé au début du texte. Prenons un exemple fictif. On peut se demander si, pour un élève, avoir réalisé numériquement ce que représente un maximum pour une fonction (ses valeurs augmentent puis diminuent) peut toujours donner lieu à l'entrée dans un questionnement algébrique suscité par l'enseignant sur la propriété correspondante de la fonction. Il se pourrait qu'un élève n'étende pas au cadre fonctionnel, même aidé par l'enseignant, la connaissance numérique qu'il a comprise, auquel cas la proximité supposée par l'enseignant ne jouerait pas son rôle de point d'appui. On peut imaginer qu'un intermédiaire soit nécessaire, explicitant davantage le lien entre le cadre numérique et le cadre fonctionnel par exemple.

Est-ce que ce sont les proximités horizontales et descendantes qui contribuent à « alimenter », voire « créer » si ça ne vient pas des élèves eux-mêmes, ce qui peut devenir, chez certains élèves qui n'ont pas fait seuls ce cheminement avant, un certain potentiel de connaissances proches ? Ça irait avec un constat chez l'enseignant du premier exemple de proximités descendantes et horizontales plutôt « objet » ? C'est un peu contradictoire avec une certaine vue intuitive (piagétienne) des apprentissages, qui les conditionnent à des activités de construction, ainsi qu'avec ce qui a été avancé au début de ce paragraphe mais c'est peut-être conforme à une certaine réalité, notamment sociale[10] ? En ce qui concerne le travail s'appuyant sur des connaissances proches, on a tendance (avec Vygostki) à le situer du côté des activités partagées entre élèves et enseignant, et, si on suit ce fil, des proximités ascendantes. Est-ce une affaire d'activités contextualisées, est-ce une affaire d'activités plus liées à la reconnaissance des savoirs, y compris généraux, à leur sens, ou à leur mémorisation ? Ça irait avec notre constat chez le même enseignant de proximités ascendantes plutôt « activités ». Vraisemblablement, il n'y a pas une réponse unique ni univoque, ça va dépendre des notions, des élèves, chacun et leur groupe, de leur engagement dans le processus, mais aussi du professeur et de ses choix de tâches et de déroulements.

Si c'était le cas (s'il existait bien une distinction à prendre en compte entre deux aspects de la ZPD), on comprend la nécessité de faire travailler les élèves immédiatement après le cours pour s'appuyer sur ce qu'on vient peut-être d'engendrer chez les moins autonomes... Et de multiplier alors à la fois les aides procédurales s'il en est besoin, puis les aides constructives, voire les proximités ascendantes... On retrouve cette idée dans Robert et Vandebrouck (2014) des deux étapes nécessaires pour certains élèves, avec selon le contexte, activités a minima, aides procédurales, ou alors proximités descendantes et horizontales - activités normales, aides constructives, ou alors proximités ascendantes...

Vers la formation des enseignants

Les recherches peuvent éclairer les formateurs et les enseignants à partir de leur expérience, en dégageant des régularités qui prennent sens (avec notamment « des mots pour le dire » à partager). Elles peuvent aussi indiquer certains outils d'analyse à utiliser, quitte à les adapter, soit pour préparer et choisir les contenus (relief, tâches) soit au moment des déroulements (nature du travail à mettre en place, vigilance, aides, proximités, tensions…).

L'exposé aura sans doute permis une sensibilisation aux démarches théoriques et méthodologiques mobilisées pour aboutir à la notion de proximités. L'objet n'était pas la formation stricto sensu mais une analyse de pratique très fine, avec un zoom sur deux déroulements particuliers, justifié par un arrière-plan théorique Vygotskien.

On a montré des différences importantes de pratiques en ces termes de proximités, en liens avec des activités préalables, sans pouvoir conclure à des différences d'apprentissage possibles. Ce sont seulement des hypothèses (qui pourraient donner lieu à des « théorèmes d'existence locale ») qui sont en jeu, en lien ici avec le moteur d'apprentissages que peuvent représenter des médiations dans la ZPD des élèves.

Mais ces proximités sont-elles des outils qui peuvent être utilisés en classe ordinaire ? Certes les enseignants font souvent des proximités spontanément, ils peuvent ne pas avoir le temps d'en faire d'autres, dans certains cas il est difficile de trouver des points d'appui chez les élèves… Peut-il en être autrement ? Peut-on enrichir les pratiques là-dessus ? Ce sont autant de questions qui montrent que ce qui est exposé ici est très local et encore partiel…

De façon générale, il convient d'être prudent sur les questions de diffusion et d'adaptation des recherches. Il y a une grande complexité de l'activité dans la classe, une articulation nécessaire entre des niveaux micro, local, global ; la nécessité aussi de prendre en compte le temps long et l'accès difficile enfin à la dimension personnelle dans l'activité.

Enfin, en termes de transmission, comme pour les apprentissages, présenter des résultats, voire des outils comme dans cette communication, ne suffit pas à équiper l'enseignant ou même son formateur. On peut espérer cependant, par exemple grâce à un travail collectif entre enseignants et formateurs, basé sur des études de pratiques, élargir la palette des pratiques possibles (alternatives), notamment sur les contenus à proposer aux élèves (en termes de tâches

---

[10] Par exemple pour des élèves très éloignés des réflexions inductives

notamment) et contribuer à ajuster les accompagnements des élèves en classe au plus près des acquisitions visées (selon les contextes, les formes de travail, les contenus en jeu…)

Références bibliographiques

Brousseau G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cabañas-Ramírez, N.O., Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A. (2020). Didactic Engineering in the Study of the Sense of Variation of Functions: Preliminary Analysis. International Electronic Journal of Mathematics Education, 15(2), em0566

Chappet-Pariès M., Pilorge F.& Robert A. (2017) Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée, s'appuyant sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde. Document de formation du Laboratoire de Didactique André Revuz n°16. Paris : IREM de Paris.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10, 5–53

Hitt, F. & González-Martín, A.S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. In A. Gutiérrez, G.L. Leder & P. Boero (Eds.), The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues (p. 3–38). Rotterdam: Sense Publishers

Leontiev, A. (1984). Activité, Conscience, Personnalité. Moscou : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R-E., Vandebrouck, F., Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis, IJRUME International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1), 139–160 - https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Robert, A., Penninckx J., & Lattuati M. (2012). Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 34(2/3), pp 239-285

Robert, A., & Rogalski, J., avec la participation de F. Vandebrouck. (2020). D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, n° 22. Paris : IREM de Paris.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (p. 23-30). Toulouses : Octarès Editions.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (dir.) Didactique, épistémologie et histoire des sciences (pp.61-87). Paris : PUF.

Vandebrouck, F. (2008). La classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants, Ouvrage collectif, Edition Octarès, Collection Travail et Activité Humaine.

Vandebrouck, F, Robert A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec des technologies, Recherche en Didactique des Mathématiques – Vol 37(2-3), pp 333-382

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3), 133-169.

Vygotski, L. (1934/1985). Pensée et langage. Paris : La dispute.