

LES MODES DE RAISONNEMENT ET DE PREUVE COMME APPRENTISSAGES POSSIBLES DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

Stéphane FAVIER, Maud CHANUDET

Résumé. Notre communication porte sur l'identification des démarches et raisonnements mathématiques en jeu lors de la résolution de problèmes. Nous caractérisons ces éléments qui peuvent, lorsque la résolution de problèmes est pratiquée pour elle-même, constituer un des objectifs d'apprentissage visés. Nous montrons ensuite comment nous l'utilisons en formation continue dans le but d'outiller les enseignants pour enseigner la résolution de problèmes.

L'objectif de l'atelier dont ce texte se veut une description est d'identifier le potentiel didactique des problèmes de type « problèmes pour chercher » (Houdement, 2009), en termes de démarches et de modes de raisonnement. Après avoir précisé les éléments théoriques sur lesquels nous nous basons, nous montrons comment nous avons conçu une formation initiale visant à permettre aux enseignants de choisir des problèmes, d'élaborer une progression et d'envisager l'évaluation des compétences des élèves en résolution de problèmes, en lien avec les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes.

Nous commençons tout d'abord par situer les types de problèmes auxquels nous nous intéressons.

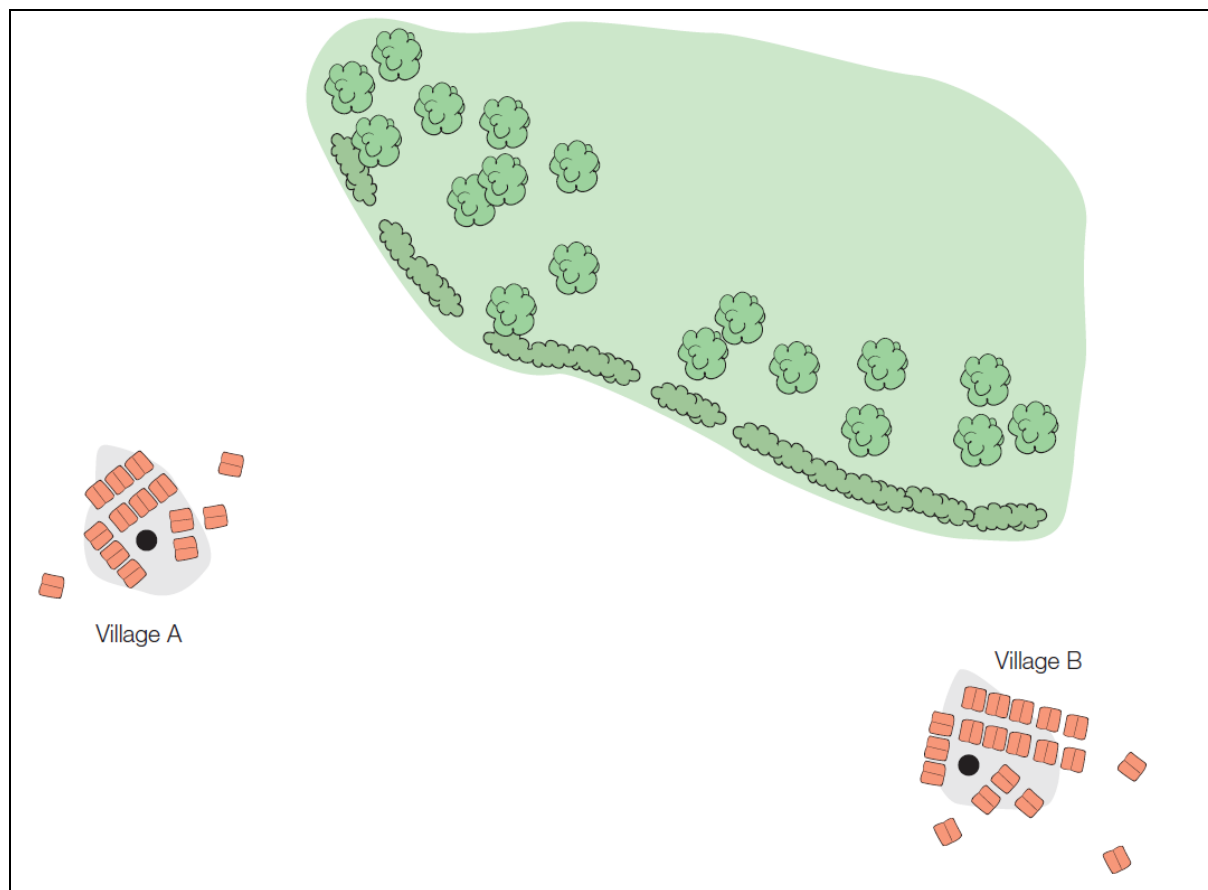
La résolution de problèmes en mathématiques

On identifie deux fonctions que peut jouer la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques.

La résolution de problèmes comme outil pour développer, évaluer des apprentissages de contenus mathématiques

La résolution de problèmes peut ainsi revêtir une fonction d'outil, de moyen de développer et d'évaluer les apprentissages des élèves quant à des notions ou des concepts mathématiques spécifiques. En effet, depuis les années 1980, dans différents pays et à divers niveaux d'enseignement des mathématiques, tant les recherches en éducation que les responsables institutionnels et les programmes d'enseignement prônent la résolution de problèmes, non plus seulement comme une façon de valider la bonne utilisation des connaissances, mais aussi comme une méthode pour développer les apprentissages des élèves. Le problème suivant, proposé dans les moyens d'enseignement romand en classe de 10^e (élèves de 13-14 ans, équivalent à la classe de 4^e en France), en est un exemple.

Deux villages envisagent la construction d'une déchetterie commune. Pour des raisons de calme et de tranquillité, celle-ci devra être construite à l'orée de la forêt, mais obligatoirement à égale distance des deux localités. Où la déchetterie devra-t-elle être construite ?



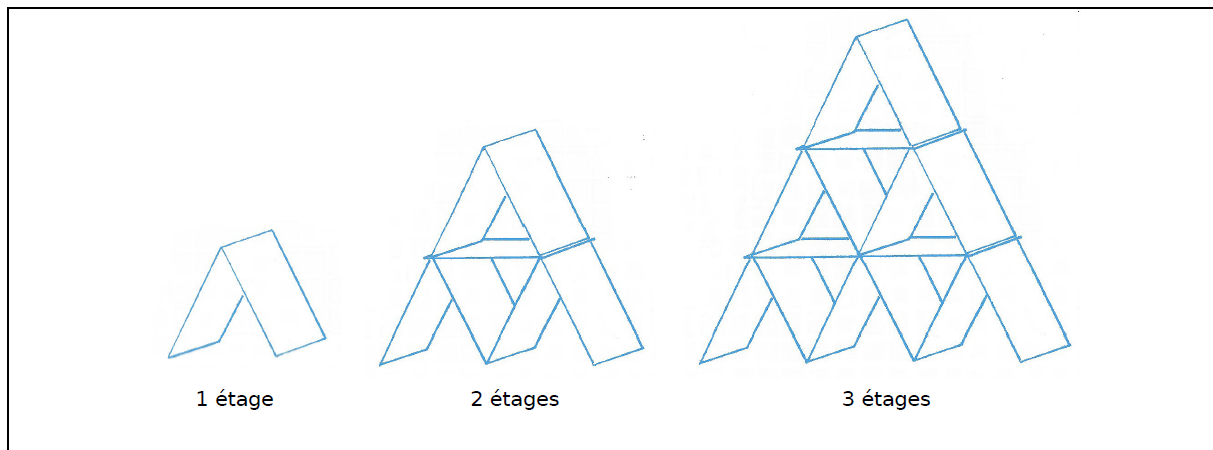
Ce problème peut par exemple être proposé pour introduire la notion de médiatrice. Dans ce cas, la résolution de problèmes est un moyen de développer des apprentissages. On parle aussi d'apprentissage *par* la résolution de problèmes. Les apprentissages visés sont alors fortement corrélés aux notions et aux concepts mathématiques en jeu.

La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

La résolution de problèmes peut aussi, et c'est ce qui nous intéresse dans notre travail, constituer un objet d'apprentissage à part entière. Il s'agit alors de développer des compétences et des connaissances centrées sur cet aspect de l'activité mathématique, comme c'est le cas sur le problème suivant, tiré du manuel de 4^e du site Sesamath⁶.

Pour construire un château de cartes à un étage il faut 2 cartes, pour un château de cartes à deux étages il faut 7 cartes et pour un château de cartes à trois étages il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?

⁶ https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms3_2012&page_gauche=162



On parle dans ce cas d'apprentissage *de* la résolution de problèmes. C'est donc à cette fonction de la résolution de problèmes que nous nous intéressons ici et pour laquelle il est plus difficile de déterminer les apprentissages possibles en résolution de problèmes.

Les apprentissages possibles de la résolution de problèmes

La lecture de la littérature associée ou des écrits portant sur les dispositifs associés à la résolution de problèmes (la narration de recherche (Bonafé, 1993; Chevallier, 1992; Sauter, 1998), les problèmes ouverts (Arsac et al., 1991; Arsac & Mante, 2007), les SiRC (Grenier, 2012; Grenier & Payan, 2002), etc.) montre que les termes employés pour décrire ces apprentissages potentiels sont assez généraux et ne se réfèrent pas à des savoirs mais sont plutôt de l'ordre des pratiques, des savoir-faire attendus chez les élèves.

Dans son travail sur la *place pour les problèmes pour chercher* à l'école primaire, Houdement (2009, p. 32) identifie trois objectifs possibles pour les problèmes de type « problèmes pour chercher » c'est-à-dire lorsque la résolution de problèmes constitue un objet d'enseignement et d'apprentissage : le réinvestissement de savoirs, l'apprentissage de raisonnements, l'apprentissage de validations (puisqu'elle travaille à l'école primaire) et que nous avons étendu à l'apprentissage de preuve pour le secondaire, auxquels elle ajoute l'apprentissage de la modélisation.

Le réinvestissement de savoirs est fortement corrélé aux notions et concepts mathématiques en jeu dans les problèmes. Nous nous intéressons plus spécifiquement ici aux raisonnements et aux preuves qui peuvent faire l'objet d'apprentissages possibles via la pratique de la résolution de problèmes au niveau du cycle d'orientation (équivalent du collège en France).

Caractérisation du raisonnement mathématique

Dans son travail de thèse, Jeannotte (2015) reprend et analyse deux aspects complémentaires permettant de caractériser le raisonnement mathématique et qui ressortent des différentes définitions que l'on retrouve dans la littérature :

- Son aspect structurel, c'est-à-dire du point de vue de sa structure logique. On regarde comment s'organisent et s'enchaînent les pas de raisonnement ;
- Son aspect processuel, c'est-à-dire du point de vue des processus mobilisés, ce qui met alors l'accent sur le fait que quand quelqu'un mène un raisonnement, il fait un certain nombre d'actions qui sont orientées, dirigées vers un but.

La prise en compte de l'aspect structurel du raisonnement mathématique

Du point de vue structurel, à l'école on vise principalement à développer deux types de raisonnement, bien connus : le raisonnement déductif et le raisonnement inductif.

Concernant le raisonnement déductif, celui-ci se structure autour de pas de raisonnement. Un pas déductif permet de trouver une affirmation à partir de données et d'une règle. C'est-à-dire que : on a un certain nombre de données ; on a une règle connue (un théorème, ou une règle plus élémentaire, qui peut ne pas être associée à une théorie mathématique comme le stipule Duval (1995)) dont la prémisse correspond aux données et qui implique nécessairement la conclusion ; ce qui permet d'obtenir l'affirmation.

Par exemple, si on sait que ABCD est un carré. On connaît la règle suivante ; tout carré a 4 angles droits. On en déduit donc que ABCD a 4 angles droits. Ici, la règle est vraie, donc si les données sont vraies c'est-à-dire si ABCD est bien un carré alors on peut être assuré que la conclusion est vraie, donc que ABCD a bien 4 angles droits.

Il s'agit d'un raisonnement dans lequel les prémisses impliquent nécessairement la conclusion. Par nécessairement, il est entendu que les prémisses, si elles sont vraies, incluent une condition qui ne rend qu'une seule conclusion possible.

Il nous semble important, dans une perspective didactique, de distinguer deux types de raisonnements déductifs qui peuvent être travaillés avec les élèves au primaire et au secondaire I, en fonction de la nature de la règle convoquée. En effet, celle-ci est soit liée à des propriétés mathématiques, à des savoirs mathématiques au sens de savoirs savants dans la transposition didactique (Chevallard, 1985), c'est-à-dire des objets d'enseignement identifiés dans les programmes et travaillés explicitement avec les élèves ; soit à des règles de logique (comme par exemple la règle du tiers exclus). Dans le premier cas, nous parlons de raisonnement hypothético-déductif, dans le deuxième, de raisonnement par implication logique.

Le point de vue structurel permet aussi de caractériser certains raisonnements par des articulations spécifiques de pas déductifs. Nous retenons en particulier le raisonnement par exhaustivité des cas qui consiste, de manière générale, à tester l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles du problème (Battie, 2003, p. 48). Nous retenons aussi le raisonnement par disjonction de cas qui consiste à ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. Pour cela, on partitionne les éléments de l'ensemble considéré (en nombre a priori infini) et on traite séparément chacun des cas (Battie, 2003).

Quand on met en jeu de tels raisonnements, la preuve est assurée par le fait que si la règle est vraie et si les données sont vraies alors l'affirmation obtenue est vraie. Le raisonnement déductif étant le seul à avoir cette caractéristique, il est central en mathématiques, dès lors que l'on cherche à prouver ou à démontrer.

La deuxième structure de raisonnement qui peut être travaillé avec les élèves est le raisonnement inductif. Ce type de raisonnement est souvent caractérisé comme permettant de passer du particulier au général. Pólya (1958) le caractérise comme une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leurs combinaisons. Il s'agit d'observer des données particulières, d'en dégager des régularités (appelées aussi affirmation) pour finalement inférer une règle qui permet le passage des données à l'affirmation.

Par exemple, on observe que l'expression $n^2 - n + 11$ vaut 11, 13, 17, 23, 31, 41 et 53 lorsque n varie entre 0 et 7. On sait par ailleurs que tous ces nombres sont premiers. On peut donc en inférer la règle suivante : $n^2 - n + 11$ est toujours un nombre premier. Cette règle est cohérente au vu des données observées et de l'affirmation. A ce stade, les règles du discours mathématiques font en sorte qu'il est impossible de dire si cette règle est vraie. La conclusion n'a qu'une certaine possibilité d'être vraie. Il se trouve ici que cette règle est fautive puisque pour $n=11$, le résultat est 11 au carré qui n'est donc pas premier. On a pour cela eu recours à un contre-exemple. Si cette règle avait été correcte, il nous aurait fallu le prouver en passant notamment par un raisonnement déductif.

Le raisonnement inductif est en particulier mis en œuvre localement, notamment dans une démarche expérimentale, mais il ne suffit pas à caractériser l'ensemble des processus impliqués dans une telle démarche.

La prise en compte de l'aspect processuel du raisonnement mathématique

Si l'on s'intéresse cette fois aux processus en jeu lors du raisonnement mathématique, Jeannotte (2015) les regroupe en deux catégories : les processus de recherche de similitudes et de différences, comme généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer et classer ; et les processus de recherche de validation. Ces différents processus peuvent de plus prendre appui sur un processus d'exemplification.

Le processus d'exemplification et les processus de recherche de similitudes et de différences permettent de caractériser deux types de démarches importantes en résolution de problèmes, qui n'ont pas de structure propre c'est-à-dire qui ne peuvent pas être caractérisés comme relevant de raisonnements déductifs, ou de raisonnements inductifs. Il s'agit de la démarche expérimentale et de la démarche d'ajustements d'essais successifs.

La démarche expérimentale est définie par Gardes comme une démarche qui articule des phases d'expérimentations (faire des expériences, en observer les résultats et en inférer des conclusions), avec des phases de formulation de conjectures et de tentative de preuve (Gardes, 2013). On identifie ainsi les processus d'exemplification, d'identification d'une régularité, de conjecture, et de généralisation. Quand cela est possible, c'est-à-dire quand c'est à la portée des élèves au vu de leurs connaissances, il faut recourir à un raisonnement déductif pour prouver le résultat obtenu en mettant en œuvre une telle démarche.

Une deuxième démarche importante est la démarche dite d'ajustements d'essais successifs qui consiste à rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents » (Conférences Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), 2019). On identifie notamment les processus d'exemplification, de comparaison de l'écart entre le résultat obtenu et celui attendu afin d'ajuster ses essais pour s'en approcher. Pour les démarches d'ajustements d'essais successifs, la validité du résultat n'est pas liée à la validité de la démarche. Pour prouver la validité du résultat, il faut vérifier qu'il satisfait bien les conditions de l'énoncé, c'est à dire prouver par ostension.

En synthèse, lorsque l'on travaille la résolution de problèmes comme objet d'apprentissage au primaire et secondaire I, on peut chercher à développer des modes de raisonnement déductifs, tels l'exhaustivité des cas, l'implication logique, le raisonnement hypothético-déductif, le raisonnement par disjonction de cas. Ces raisonnements, s'ils sont correctement mis en jeu, permettent d'assurer la validité du résultat obtenu et font donc office de preuve. On peut viser également un travail sur des démarches comme la démarche expérimentale ou la démarche d'ajustement d'essais successifs, qui ne sont à elles seules, pas suffisantes pour prouver. La mise en œuvre de la démarche expérimentale nécessite en effet de recourir à un raisonnement déductif pour prouver la validité de la règle obtenue. Cependant, dans certains cas, les élèves n'ont pas les moyens de prouver leur conjecture, d'où le décalage entre la démarche expérimentale et les raisonnements déductifs qui peuvent amener à la preuve. Pour prouver, on peut aussi avoir recours à la preuve par ostension comme c'est le cas dans la démarche d'ajustements d'essais successifs. Enfin, un autre mode de preuve est aussi mobilisé pour des problèmes très spécifiques : il s'agit du contre-exemple, où l'on doit trouver un cas qui contredit la conclusion souhaitée, et qui intervient principalement dans les problèmes d'universalité. Dans ces problèmes-là, la conjecture est déjà formulée et c'est donc le mode de preuve qui est l'enjeu du problème.

Nous présentons ci-dessous le concept de potentiel didactique sur lequel nous nous appuyons avant de montrer comment nous opérationnalisons ces différents éléments théoriques.

Les activités de recherche et de preuve entre pairs et leurs potentiels

Georget (2009) s'affranchit des différentes typologies de problèmes, des différentes appellations des dispositifs de résolution de problèmes susmentionnés, pour proposer de réunir autour du concept d'Activités de Recherche et de Preuve entre Pairs (activité RPP) les problèmes dont l'objectif est d'entraîner les élèves à la recherche de problèmes de mathématiques. Il décrit alors ces activités RPP à travers leurs potentiels.

Le *potentiel de recherche* rassemble les éléments qui assurent que les élèves cherchent un problème nouveau. Le *potentiel de résistance* et le *potentiel de résistance dynamique* regroupent les éléments qui assurent que le problème résiste aux tentatives des élèves pour le résoudre et que cette résistance évolue au cours de la recherche. Le *potentiel de débat* qui rassemble les éléments favorisant un débat de nature mathématique entre élèves. Le *potentiel didactique* délimite quant à lui les savoirs qui peuvent émerger de la recherche du problème.

Nous cherchons donc à opérationnaliser ce concept de potentiel didactique à la lumière des démarches et modes de raisonnement précédemment identifiés, en regardant ceux qui peuvent être travaillés dans différentes activités RPP.

Nous donnons ci-dessous plusieurs exemples d'analyse succincte des démarches et raisonnements mathématiques en jeu dans différentes activités RPP.

Exemple d'analyse du potentiel didactique d'activités RPP du point de vue des démarches et raisonnements en jeu

Nous nous intéressons donc aux démarches et raisonnements en jeu dans les activités RPP. Pour cela, nous cherchons à résoudre ces activités en adoptant un point de vue d'élèves (et non d'experts), c'est-à-dire en mobilisant les connaissances supposées d'un élève de 10^e (équivalent à la classe de 4^e en France). De cette manière, nous analysons brièvement ci-dessous plusieurs activités RPP.

Analyse de la première activité RPP : « En haut à droite »

Voici l'énoncé de la première activité RPP que nous avons sélectionnée.

Pascal dessine de grands carrés, qu'il divise ensuite en carrés plus petits. Il écrit alors les entiers successifs dans chaque petit carré dessiné, comme l'indique la figure ci-contre.

Parmi les trois valeurs proposées, quelle est celle que le nombre x ne pourra pas prendre ?

a) 256 b) 128 c) 81

The diagram shows a large square divided into four smaller squares by a diagonal line from the top-left to the bottom-right. The top-left square is further divided into four even smaller squares. The numbers 1 through 10 are placed in the smallest squares, following a specific pattern. The top-right square of the large square is labeled 'x'.

Ce problème met en jeu une démarche expérimentale. En effet, les élèves peuvent faire des essais quant au remplissage d'un grand carré de côté 3, puis 4 puis 5 par exemple. De ces quelques essais, ils peuvent voir émerger des régularités aboutissant à la conjecture suivante « x ne pourra prendre que des valeurs qui correspondent à des carrés ». Ils en déduisent alors que x ne pourra pas prendre la valeur 128.

Analyse de la deuxième activité RPP : « Ballon d'essai »

Voici l'énoncé de la deuxième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Afin de renouveler son matériel sportif, une école fait une première commande de 2 ballons de rugby, 4 ballons de basket et 4 ballons de foot pour un montant total de 72 CHF. Elle effectue ensuite une deuxième commande composée de 2 ballons de rugby et 2 ballons de basket et paie 30 CHF. On sait qu'un ballon de rugby, un ballon de foot et un ballon de basket coûtent ensemble 20 CHF.

Quel est le prix de chacun des ballons ?

Ce problème met en jeu une démarche d'ajustement d'essais successifs et/ou un raisonnement hypothético-déductif.

Les élèves peuvent procéder en testant des valeurs pour le prix de chacun des types de ballon. En fonction des résultats obtenus, ils peuvent alors ajuster la valeur de chaque prix jusqu'à obtenir une configuration qui satisfasse les conditions. Or ces ajustements sont complexes du fait de la structure du problème en 3 équations avec 3 inconnues.

Il est ainsi utile de combiner ces essais avec, voire encore plus de procéder directement par, des déductions pour déterminer certains prix et réduire le nombre d'inconnues. Les élèves peuvent ainsi déduire de la dernière phrase que « 2 ballons de rugby, 2 ballons de foot et 2 ballons de basket coûtent ensemble 40 CHF » et la combiner avec la deuxième pour en déduire que « 2 ballons de foot coûtent 10 CHF, donc 1 ballon de foot coûte 5 CHF. ». Ils peuvent alors poursuivre en faisant des déductions ou en procédant par ajustements d'essais successifs.

Analyse de la troisième activité RPP : « Les truffes au chocolat »

Voici l'énoncé de la troisième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Maryvonne et Marcelin ont reçu une boîte contenant vingt truffes au chocolat.
A eux deux, ils ont tout mangé.

Maryvonne: « J'ai mangé moins de quatorze truffes au chocolat. »
Marcelin: « Moi aussi. »
Maryvonne: « Mais j'en ai mangé plus de huit. »
Marcelin: « Je suis sûr et certain d'en avoir mangé moins que toi. »

Chacun des deux a dit la vérité une fois et s'est trompé une fois.

Combien Maryvonne a-t-elle mangé de truffes au chocolat ?

Ce problème met en jeu un raisonnement par exhaustivité des cas et un raisonnement par implication logique.

Les élèves doivent en effet envisager et traiter tous les cas possibles, la distinction de ces cas portant sur les phrases porteuses de vérité ou non (Cas 1 : Maryvonne dit la vérité pour la 1^e phrase, ment pour la 3^e, Marcelin dit la vérité pour la 2^e phrase et ment pour la 4^e. Cas 2 : Maryvonne dit la vérité pour la 1^e phrase, ment pour la 3^e, Marcelin dit la vérité pour la 4^e phrase et ment pour la 2^e. Etc.). Pour chacun de ces cas, les élèves doivent raisonner par implication logique pour déterminer s'il y a ou non une incohérence dans et entre les 4 propositions ainsi obtenues.

Analyse de la quatrième activité RPP : « A tondre »

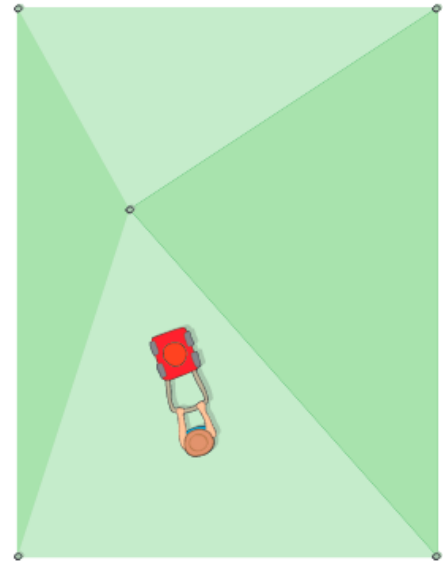
Voici l'énoncé de la quatrième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Anne et Florence doivent tondre un terrain rectangulaire.

Pour le partager en deux parties de même aire, Chris leur propose de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de relier ce point aux piquets plantés à chacun des quatre sommets du terrain.

Anne tondra la partie claire sur la figure, Florence la partie foncée.

Le partage est-il équitable ?



Ce problème met en jeu un raisonnement hypothético-déductif.

Les élèves sont ici amenés à raisonner de manière déductive à l'appui de propriétés concernant les formules d'aires de polygone, et/ou de découpages de la figure. Il est par exemple possible de découper le rectangle principal en 4 sous rectangles dont les côtés sont les côtés du rectangle principal ou leurs parallèles passant par le piquet. Chacun des sous rectangles est alors constitué de deux demi rectangles symétriques, l'un clair l'autre foncé. On en déduit alors que chacun des 4 sous rectangles est constitué pour moitié d'un triangle clair, pour moitié d'un triangle foncé et que le partage est donc équitable. Il est aussi possible de recourir à la formule d'aire d'un triangle. On peut ainsi considérer que le triangle supérieur de couleur vert clair a une aire égale à la largeur du rectangle multipliée par une partie de la longueur du rectangle, le tout divisé par 2 ; et que le triangle inférieur de la même couleur a lui une aire égale à la largeur du rectangle multipliée par le complément de la longueur du rectangle, le tout là aussi divisé par 2. La somme de ces deux aires est donc égale à la largeur du rectangle multipliée par la longueur de ce rectangle, divisée par 2. L'aire de la surface en vert clair correspond donc à la moitié de l'aire totale du terrain.

Analyse de la cinquième activité RPP : « Animal à découvrir »

Voici l'énoncé de la cinquième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Kim doit découvrir le nom d'un animal (en cinq lettres). Elle a proposé les noms ci-dessous, et a obtenu ces renseignements :

Noms d'animaux	Lettres justes bien placées	Lettres justes mal placées
CHATS	0	2
LIONS	1	0
TIGRE	2	0
PAONS	0	0
BŒUF	1	1
CHIEN	0	4

Quel est le nom de l'animal que Kim doit découvrir ?

Ce problème met en jeu un raisonnement par implication logique.

On déduit en effet par exemple de l'information donnée par la ligne correspondant à PAONS qu'aucune des lettres P, A, O, N et S n'apparaît dans le nom de l'animal que Kim doit découvrir. On déduit alors de la dernière ligne que les lettres C, H, I et E sont toutes présentes dans le nom cherché mais toute à une autre place que celles qu'elles occupent dans le mot « chien ». On poursuit alors de telles déductions jusqu'à en arriver aux cinq lettres formant le mot cherché, à savoir « biche ». Il n'y a ici aucune propriété, aucun théorème ni aucune définition mathématique à utiliser, il s'agit seulement de faire opérer le raisonnement déductif.

Analyse de la sixième activité RPP : « Puissances »

Voici l'énoncé de la sixième activité RPP que nous avons sélectionnée.

Quel est le dernier chiffre du nombre 2^{2021} ?

Ce problème met en jeu une démarche expérimentale et un raisonnement hypothético-déductif.

Les élèves peuvent ici procéder en cherchant le dernier chiffre des premières puissances de 2 et en repérant ainsi une régularité qu'il s'agit alors de généraliser au cas 2^{2021} . Les élèves doivent alors remarquer que les puissances de 2 se terminent successivement par 2, 4, 8 ou 6, et ce de manière régulière. La période étant de 4, ils doivent ensuite recourir à la division euclidienne de 2021 par 4 pour déterminer le dernier chiffre de 2^{2021} .

Ces différents exemples nous donnent l'occasion de souligner que ces différentes démarches et raisonnements ne sont pas forcément à l'œuvre de manière isolée dans un même problème mais peuvent être imbriqués les uns dans les autres ou bien se succéder au cours d'une même résolution.

Nous donnons maintenant un exemple d'opérationnalisation de ces éléments dans le cadre d'une formation continue.

Exemple d'opérationnalisation en formation continue

Éléments de contexte

Pour présenter le contexte de la formation continue, il convient de préciser que le programme scolaire de mathématiques est le même dans toute la suisse romande pour le primaire et le secondaire I. Cependant, certains cantons présentent des spécificités. Par exemple dans le canton de Genève, un cours spécifique qui cible exclusivement le développement des compétences des élèves en résolution de problèmes a été créé. Ce cours porte l'acronyme DMS pour « Démarches Mathématiques et Scientifiques » et est dispensé en 10^e et 11^e c'est-à-dire l'équivalent de la 4^e et 3^e du collège en France. En classe de 10^e, il est orienté spécifiquement sur les mathématiques. Il est proposé à la fréquence d'une séance de 45 minutes par semaine. La formation continue que nous présentons ici d'adresse à tous les enseignants qui donnent ce cours pour la 1^e fois.

Le point de départ de ce recyclage repose sur plusieurs constats : des difficultés des enseignants à définir des objectifs d'apprentissage pour ce cours de DMS, à organiser leur enseignement, à évaluer les apprentissages des élèves ; et une ressource peu claire, consistant en une liste de problèmes non organisée. Notre objectif de formateur est donc de proposer un outil pour choisir des problèmes et organiser la planification pour ce cours.

Description du contenu et du déroulé de la formation

La formation s'organise ainsi en différents temps que nous décrivons brièvement :

Tout d'abord une phase visant à montrer les limites de la ressource actuelle, notamment du point de vue de la classification des problèmes telle qu'elle est proposée. En effet, les problèmes de la ressource sont organisés par domaine mathématiques mais aussi en fonction des éléments

associés aux stratégies de résolution. Or cela nous semble peu pertinent car certains intitulés sont peu explicites, comme par exemple « initiation à la démonstration » qui est un intitulé très général et donc *in fine* peu opérationnel. La catégorie regroupant « Exemple / Contre-exemple » ne nous semble là encore pas opérationnelle. Pour illustrer ces difficultés auprès des participants, nous leur demandons de travailler sur quatre problèmes qui sont tous classés dans cette rubrique (voir annexe 1). On montre alors que dans le premier, il s'agit de faire des exemples jusqu'à trouver un contre-exemple ; dans le deuxième on fait quelques exemples qui permettent de tester la conjecture avant de passer à la validation de cette conjecture ; dans le troisième les exemples vont permettre de s'approprier le problème mais il sera nécessaire de passer à un raisonnement ; et dans le quatrième on peut faire le calcul et cela permet de trouver la réponse. En résumé, on constate des rôles très différents des exemples / contre-exemples et que les types de raisonnements mathématiques et de preuves ne sont pas les mêmes. En conclusion, nous montrons qu'il y a une grande diversité des objectifs travaillés à partir de ces problèmes pourtant classés dans la même catégorie.

Dans un deuxième temps, nous présentons des éléments théoriques qui nous amènent à caractériser les différentes démarches et modes de raisonnements, de manière plus synthétique par rapport à la manière dont nous les avons présentés plus haut dans ce texte.

Nous proposons ensuite quelques problèmes que les participants doivent résoudre et pour lesquels ils doivent identifier les démarches et raisonnements en jeu de manière qu'ils se les approprient. Cela correspond à ce que nous avons présenté dans la partie précédente.

Nous arrivons alors sur un temps de travail autour de la question de la planification. Nous proposons alors, pour chaque démarche ou type de raisonnement, un certain nombre de problèmes (5 ou 6) issus des ressources institutionnelles ou non. On divise les enseignants en autant de groupes qu'il y a de démarches et de raisonnements. Chaque groupe travaille ainsi sur un ensemble de problèmes relevant d'une démarche ou d'un type de raisonnement, l'objectif étant de réfléchir à une organisation de ces problèmes d'un point de vue temporel (dans quel ordre les proposer). Il est ainsi demandé aux enseignants de : résoudre les différents problèmes en gardant des traces des solutions ou de leur recherche ; sélectionner un ou des problèmes pour l'évaluation certificative ; proposer une organisation possible pour les autres problèmes.

Nous donnons ci-dessous un exemple de ce qu'un groupe travaillant sur les problèmes mettant en jeu une démarche expérimentale a produit (Figure 1). On voit l'ordre prévu des problèmes et l'utilisation envisagée de chacun d'eux (entraînement ou évaluation) ainsi que quelques éléments complémentaires.

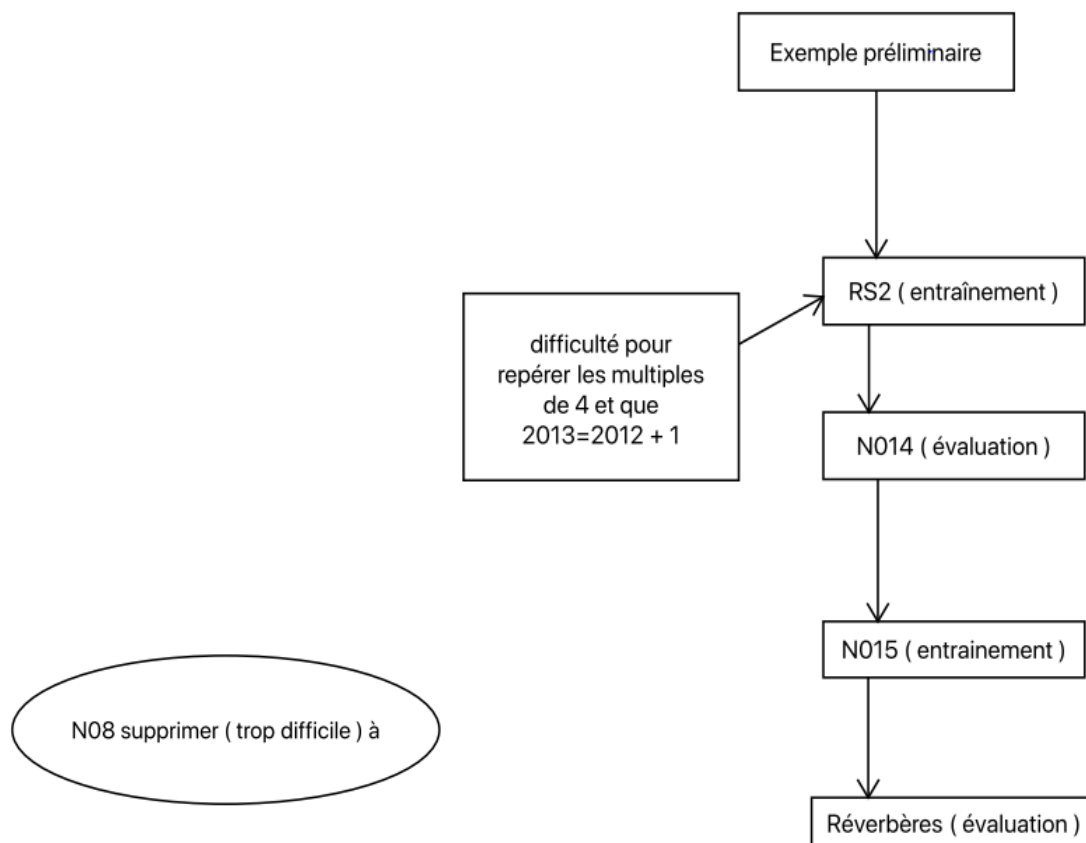


Figure 1. Exemple de planification locale d'un groupe d'enseignants travaillant sur des problèmes mettant en jeu une démarche expérimentale

A l'issue de ce travail, les productions des groupes sont mutualisées de telle sorte que chaque participant dispose des 25 problèmes accompagnés d'éléments de résolution et de pistes de planification telles que proposées par chaque groupe.

Pour finir nous évoquons la question de la planification à l'échelle d'une année. Nous envisageons plusieurs options, sans que cela ne soit exhaustif, pour travailler ces différents démarches et raisonnements :

- Option 1 : Proposer consécutivement plusieurs problèmes qui mettent en jeu la même démarche ou raisonnement avant de passer à un autre type de démarche ou raisonnement ;
- Option 2 : Alternier à chaque nouveau problème les démarches ou raisonnements en jeu, en veillant à changer l'ordre ;
- Option 3 : Regrouper les problèmes par démarche ou raisonnement en jeu, en travaillant cependant tout au long de l'année la démarche expérimentale de sorte qu'elle constitue un fil rouge.

Nous schématisons ces différentes options dans la figure ci-dessous (Figure 2), chaque couleur représentant un type de démarche ou de raisonnement.

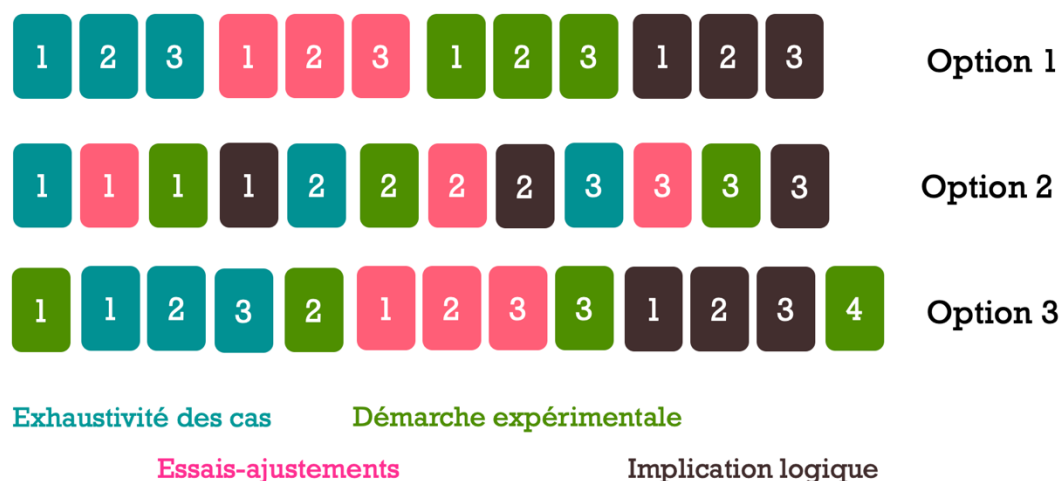


Figure 2. Différentes options pour la planification

A l'issue de cette formation, les participants repartent donc avec des critères mathématiques de classement et d'organisation des problèmes qu'ils ont pu s'approprier et qui sont en lien avec des apprentissages pouvant être visés en résolution de problèmes ; et avec une sélection de problèmes issus de diverses ressources, notamment institutionnelles, classés en fonction de ces objectifs d'apprentissage.

Sondage auprès des enseignants à l'issue de la formation

Notre objectif à l'origine de cette formation était que les enseignants soient ainsi mieux outillés pour enseigner la résolution de problèmes dans le contexte spécifique d'un cours centré exclusivement sur cet aspect du travail mathématique.

Des sondages effectués plus tard dans l'année auprès des enseignants ayant suivi la formation montrent que, parmi les enseignants ayant répondu au sondage (12 répondants sur les 18 participants à la formation), une majorité (9 sur 12) déclare avoir utilisé les démarches et raisonnements pour sélectionner les problèmes à proposer aux élèves au cours de l'année. Un peu moins (7 sur 12) s'en est servi pour organiser sa progression annuelle. Seuls 3 enseignants déclarent ne s'être basés ni sur la planification élaborée pendant la formation, ni plus largement, sur les démarches et modes de raisonnement pour élaborer leur planification annuelle. Enfin, la moitié des enseignants déclare en avoir fait usage pour déterminer des éléments à institutionnaliser.

Conclusion

La prise en compte des démarches et raisonnements en jeu lors de la résolution des activités RPP nous semble permettre de soutenir l'activité des enseignants à travers le choix des problèmes sur lesquels faire travailler les élèves, leur planification, l'évaluation, l'identification d'apprentissages possibles et les processus d'institutionnalisation associés.

Nous souhaitons maintenant engager une recherche de type collaboratif avec des enseignants dispensant le cours de DMS à l'appui notamment, outre les raisonnements et démarches, de différents éléments ayant fait l'objet de précédentes recherches (régulations, heuristiques) en vue d'étudier finement deux processus complémentaires, la dévolution et l'institutionnalisation, avec une perspective d'élaboration d'un outil pour la formation.

Références bibliographiques

- Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren édition.
- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique* [Didactique des Mathématiques]. Université Paris 7 Diderot.
- Bonafé, F. (1993). Les narrations de recherche, un outil pour apprendre à démontrer. *Repères IREM*, 12, 5-14.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
- Chevallier, A. (1992). Narration de recherche : Un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, 33, 71-79.
- Conférences Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2019). *Aide-mémoire*. LEP.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. (Peter Lang).
- Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* [Thèse de doctorat en mathématiques générales]. Université Claude Bernard - Lyon I.
- Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris Diderot.
- Grenier, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : Enjeux et défis pour le 21^e siècle. Actes du colloque EMF2012* (p. 1354-1364).
- Grenier, D., & Payan, C. (2002). Situation de recherches « en classe » : Essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand Guerrier & C. Tisseron (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 189-205).
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 31-59.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat en éducation]. Université du Québec.
- Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Gauthiers-Villars.
- Sauter, M. (1998). Narration de recherche : Une nouvelle pratique pédagogique. *Repères IREM*, 30, 9-21.

1. Toujours premier ?

Dans l'expression $n^2 - n + 1$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre premier ?

2. Le carré d'un nombre pair

Si n est un nombre pair, n^2 est-il toujours un nombre pair ? Justifie ta réponse.

8. Les nombres glissants

Un nombre glissant est un nombre qui peut se décomposer en la somme de deux entiers naturels non nuls, pas nécessairement distincts, tels que la somme de leurs inverses s'écrive avec les chiffres du nombre de départ, dans le même ordre et précédés de 0 et d'une virgule.

Exemple : $20 = 10 + 10$ et $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,20 \rightarrow 20$ est donc un nombre glissant.

Quels sont les nombres glissants à deux chiffres ?

10. 2010

Nicolas a additionné les entiers successifs, de 1 à p , avec sa calculatrice. Il a trouvé 2010. Son professeur lui déclare : « Tu en as oublié un ! ». Lequel ?

10. 2010

Nicolas a additionné les entiers successifs, de 1 à p , avec sa calculatrice. Il a trouvé 2010. Son professeur lui déclare : « Tu en as oublié un ! ». Lequel ?