

UNE SITUATION DE RECHERCHE POUR LA CLASSE: PAC-MAN CONTRE LES FANTOMES

Camille ANTOINE, Emmanuel BEFFARA, Rémi MOLINIER, Florence PAULIN, Iulia TUNARU

À propos des situations de recherche pour la classe

Les situations de recherche pour la classe (SiRC) ont pour objectif de mettre les élèves dans la peau d'un chercheur en mathématiques. L'idée est de les confronter à un problème, parfois non résolu par la communauté scientifique, afin de leur permettre des apprentissages mathématiques transversaux. Ces activités se distinguent par cinq critères, identifiés par Grenier et Payan:

- 1) Le problème est proche de questions mathématiques non résolues.
- 2) Le problème est facile d'accès, sa formulation est compréhensible et suscite la curiosité.
- 3) Des stratégies initiales existent qui ne requièrent pas de connaissances techniques pointues.
- 4) Il n'y a pas qu'un unique moyen de conduire la recherche, plusieurs stratégies sont possibles qui peuvent mener à diverses interprétations du problème et à des éléments de résolution variés, du côté de l'activité en elle-même comme des savoirs mathématiques en jeu.
- 5) Si une partie du problème peut être résolue, les stratégies développées conduisent à de nouvelles questions de recherche (souvent des variantes du problème initial).

En outre, les SiRC sont caractérisées par l'existence de *variables de recherche*, c'est-à-dire des paramètres du problème à fixer par les élèves. En ce sens, elles se prêtent bien à un travail mathématique transversal qui vise à l'apprentissage des compétences du socle commun, notamment *raisonner, chercher, modéliser et communiquer*.

Pour l'enseignant, la gestion de ce type d'activités demande une bonne maîtrise du problème soumis aux élèves pour pouvoir comprendre les stratégies développées par les élèves, leurs essais et leurs conjectures, mieux vaut s'être soi-même prêté à l'exercice au préalable, même sans avoir complètement résolu le problème.

En classe, l'activité se déroule en deux moments distincts. Dans un premier temps, assez long, l'enseignant a un rôle d'aide à la recherche. Il peut éclairer la consigne, expliquer le problème, relancer l'investigation en proposant des cas particuliers. Il ne doit surtout pas donner

la solution du problème, dire si les conjectures amenées sont justes ou fausses. Dans un second temps, il doit gérer la mise en commun des travaux des groupes, puis institutionnaliser la résolution du problème et l'activité mathématique sous-jacente.

Le groupe « Raisonnement, logique et Situations de Recherche pour la Classe » travaille depuis une bonne vingtaine d'années sur la construction de SiRC et leur expérimentation en classe. Une brochure est gratuitement en ligne sur le site de l'IREM de Grenoble (une version revue et corrigée est disponible à la vente) et des mallettes sont en cours de finalisation afin de circuler dans les établissements de l'académie de Grenoble (ou plus loin). Elles contiennent les documents nécessaires à la bonne prise en main par l'enseignant de certaines SiRC conçues par le groupe ainsi que le matériel pour les élèves.

Nous avons choisi de présenter l'une de nos SiRC les plus récentes, intitulée *Jeu de Pac-Man*, sur laquelle nous menons encore quelques expérimentations. Comme lors de l'atelier, nous présentons dans un premier temps le problème, ses caractéristiques et ses enjeux pour l'enseignement, ainsi qu'une résolution mathématique. Dans un deuxième temps, nous revenons sur l'atelier en lui-même qui s'est tenu en visio-conférence le 10 juin 2021. Enfin, nous concluons sur les expérimentations que nous avons pu conduire en classe, à différents niveaux allant du collège à la fin de la licence, et sur des éléments de gestion de l'activité pour les enseignants qui souhaiteraient la tester dans leurs propres classes.

Le jeu du Pac-Man

Présentation du jeu

L'idée de cette activité vient d'un article publié dans la revue *La Recherche* et intitulé Pac-Man contre les fantômes. Il s'agit d'un problème d'optimisation et de recherche d'une stratégie gagnante qui peut être proposé à tous les niveaux à partir du collège.

Le jeu de Pac-Man est un jeu à deux joueurs, qui se joue sur un graphe (ensemble de sommets reliés par des arêtes). Au début de la partie, le premier joueur (appelé **F** dans la suite) place un certain nombre de fantômes sur des sommets du graphe, le second (appelé **P** dans la suite) place Pac-Man sur un autre sommet. Les joueurs jouent ensuite à tour de rôle : **F** déplace les fantômes de son choix (chacun peut être laissé là où il est ou déplacé sur un sommet voisin) puis **P** déplace Pac-Man sur un sommet voisin ou le laisse immobile. Le jeu s'arrête si l'un des fantômes se retrouve sur le même sommet que Pac-Man, qui est alors capturé.

Nous avons choisi de proposer le jeu sur des graphes particuliers : les grilles rectangulaires à mailles régulières. Nous nous intéressons ici à la question suivante : étant donné une grille à maille régulière, quel est le nombre minimal de fantômes qui assure l'existence d'une stratégie gagnante pour le joueur **F** ?

En d'autres termes, on se demande combien il faut de fantômes au minimum pour capturer Pac-Man.

Caractéristiques en tant que SiRC

Le problème proposé réunit plusieurs caractéristiques des situations de recherche pour la classe.

- Il est articulé autour d'une question facile à comprendre et accessible à différents niveaux, du collège à la licence, mais de solution non évidente. À chaque niveau, on peut travailler des aspects différents d'une manière plus ou moins approfondie : recherche de stratégies, représentation du problème, recherche de preuves, construction d'une démarche algorithmique.
- Il y a une composante ludique dans la mise en situation du problème, ce qui encourage la participation de tous les élèves indépendamment de leurs acquis en mathématiques.
- Plusieurs stratégies de résolution sont possibles, dont des stratégies par essai et erreur.

- L'enjeu de vérité est à la portée des élèves (on ne connaît pas la solution *a priori*) et des conjectures leur sont accessibles par la recherche. Il s'agit ici de deux aspects peu présents dans la classe usuelle.
- Le travail demande une organisation sociale spécifique (travail en groupe, synthèse collective, institutionnalisation).
- Le problème général sur n'importe quel graphe est très complexe et des questions sont toujours ouvertes. On trouve d'ailleurs des articles de recherche récents autour de ce jeu ou des variantes.

Une stratégie à deux fantômes sur la grille rectangulaire

Dans le cas d'une grille rectangulaire réduite à une ligne ou une colonne, un seul fantôme suffit pour capturer Pac-Man. Le joueur **F** peut par exemple placer le fantôme au milieu et le déplacer en direction de Pac-Man. Ainsi, Pac-Man est coincé sur une partie de la ligne dont la longueur diminue strictement à chaque étape.

Pour une grille rectangulaire non réduite à une ligne ou une colonne, un seul fantôme ne garantit pas la victoire de **F**. En effet, on peut par exemple remarquer que, même si le fantôme est sur une case voisine de Pac-Man, ce dernier peut être déplacé de façon à ne plus être voisin du premier.

Nous proposons dans ce qui suit une stratégie gagnante pour **F** avec deux fantômes. En conséquence, le nombre minimal de fantômes qui assure la capture de Pac-Man est 2, sauf dans le cas d'une grille réduite à une ligne ou une colonne, auquel cas le nombre minimal est 1.

Notation et modélisation mathématique

On part d'une grille rectangulaire $(+ + 1) \times (. + 1)$ vue comme la grille donnée par tous les couples d'entiers $(/, 1) \in \mathbb{N}^n$ avec $0 \leq / \leq +$ et $0 \leq 1 \leq .$ (voir figure 1 pour un exemple).

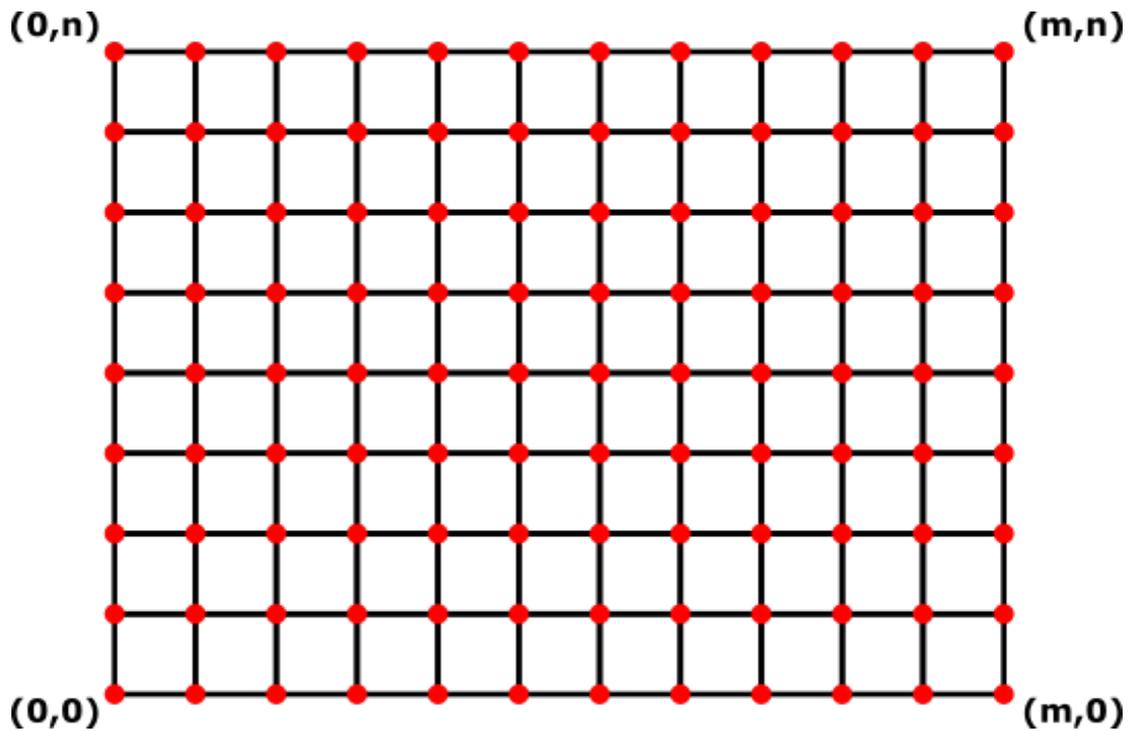


Figure 1 - Exemple de grille avec $m = 11$ et $n = 8$.

Sur cette grille évoluent deux fantômes et Pac-Man. Chacun se déplace d'un sommet à l'un de ses voisins, horizontalement ou verticalement.

Nous parlerons de **phase de jeu** pour l'enchaînement d'un déplacement de Pac-Man par **P** suivi d'un déplacement des fantômes par **F**. Les deux phases initiales du jeu sont particulières : la phase 0 correspond au placement des fantômes par **F**, puis la phase 1 au placement de Pac-Man par **P**, suivi du premier déplacement des fantômes par **F**.

Pour plus de lisibilité, nous distinguerons un fantôme bleu et un fantôme vert. Pour $t \geq 0$ ($t \geq 1$ pour Pac-Man), nous notons $(i_{\#}(t), j_{\#}(t))$, $(i_{\$}(t), j_{\$}(t))$ et $(i_{\%}(t), j_{\%}(t))$ les positions du fantôme bleu, du fantôme vert et de Pac-Man respectivement à l'issue la t -ième phase.

Détails de la stratégie proposée

On place les fantômes dans deux coins opposés. Ici, on pose comme sur la figure 2 le bleu en haut à gauche en $(0, n)$ et le vert en bas à droite en $(m, 0)$, ainsi on a $(i_{\$}(0), j_{\$}(0)) = (m, 0)$ et $(i_{\#}(0), j_{\#}(0)) = (0, n)$.

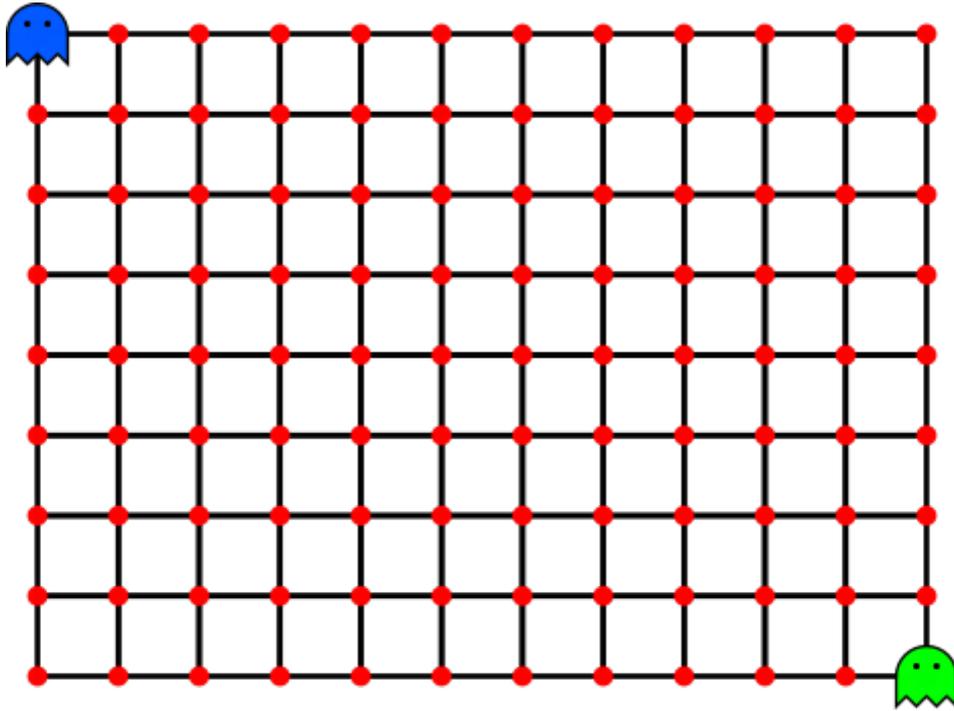


Figure 2 - Position initiale.

Remarque 1. La position initiale des fantômes n'a pas beaucoup d'importance et ce choix a été fait ici pour faciliter l'exposition de la stratégie.

Stratégie 1. Soit $t \geq 1$. Lors de la phase t , tant que Pac-man n'est pas capturé et juste après que P a joué (ou placé Pac-Man pour $t = 1$), F joue le fantôme vert de la façon suivante (on pourra se rapporter aux figures 3 et 4 pour des illustrations des déplacements):

- 1) [V1] Si $x_t(t-1) > x_0(t)$, alors F déplace le fantôme vert vers la gauche et $(x_t(t), y_t(t)) := (x_t(t-1) - 1, y_t(t-1))$.
- 2) [V2] Si $x_t(t-1) = x_0(t)$, alors F déplace le fantôme vert vers le haut et $(x_t(t), y_t(t)) := (x_t(t-1), y_t(t-1) + 1)$.
- 3) [V3] Si $x_t(t-1) < x_0(t)$, alors F déplace le fantôme vert vers la droite et $(x_t(t), y_t(t)) := (x_t(t-1) + 1, y_t(t-1))$.

et il joue le fantôme bleu de la façon suivante :

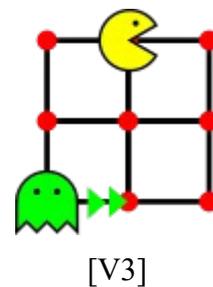
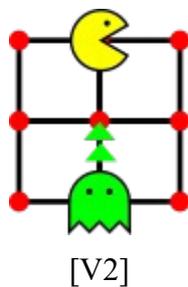
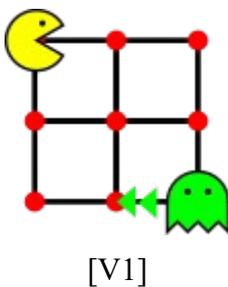


Figure 3 – Illustrations des déplacements pour le fantôme vert.

- 1) [B1] Si $1_{\#}(7-1) > 1_{\%}(7)$, alors **F** déplace le fantôme bleu vers le bas et $(/_{\#}(7), 1_{\#}(7)) := (/_{\#}(7-1), 1_{\#}(7-1) - 1)$.
- 2) [B2] Si $1_{\#}(7-1) = 1_{\%}(7)$, alors **F** déplace le fantôme bleu vers la droite et $(/_{\#}(7), 1_{\#}(7)) := (/_{\#}(7-1) + 1, 1_{\#}(7-1))$.
- 3) [B3] Si $1_{\#}(7-1) < 1_{\%}(7)$, alors **F** place le fantôme bleu vers le haut et $(/_{\#}(7), 1_{\#}(7)) := (/_{\#}(7-1), 1_{\#}(7-1) + 1)$.

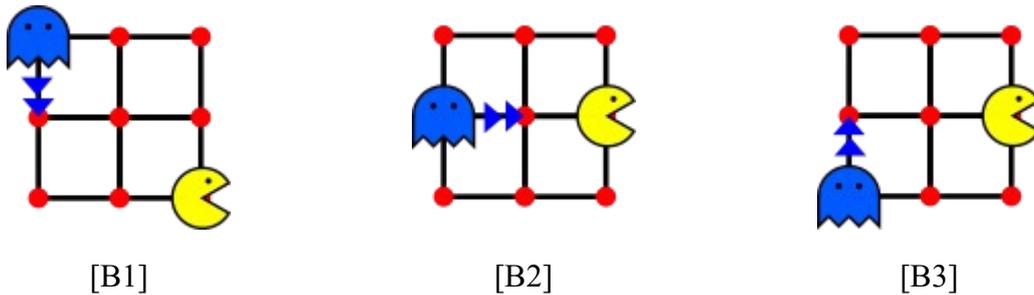


Figure 4 – Illustrations des déplacements pour le fantôme bleu

Remarque 2. La stratégie 1 présentée ici ne se veut pas du tout optimale en nombre de coups mais elle a l'avantage de se justifier assez facilement.

Le lecteur pourra aussi remarquer que, dans la stratégie 1, les déplacements des deux fantômes sont indépendants l'un de l'autre. Cependant, les cas [B1], [B2] et [B3] sont le symétrique par rapport à la première diagonale (d'équation $1 = /$) des cas [V1], [V2] et [V3].

La stratégie 1 est très simple à mettre en place lors d'une partie et le choix du déplacement d'un fantôme ne demande que la connaissance de sa position relative à Pac-Man juste avant de jouer.

La philosophie de la stratégie est la suivante (on pourra se rapporter aux figures 3, 4, 5 et 6 pour la voir en action). Le joueur **F** cherche à aligner ses fantômes sur Pac-Man, selon les lignes pour le fantôme bleu et selon les colonnes pour le fantôme vert.

Dès que l'un des fantômes s'est aligné avec Pac-Man, le joueur **F** déplace ensuite celui-ci de façon à garder l'alignement ou à le rapprocher de Pac-Man. Par exemple, si c'est le fantôme bleu qui s'est aligné avec Pac-Man, et que le joueur **P** déplace Pac-Man verticalement, le joueur **F** déplacera lui aussi le fantôme bleu verticalement pour préserver l'alignement. Par contre, si le joueur **P** déplace Pac-Man horizontalement, l'alignement est maintenu et le joueur **F** peut déplacer le fantôme bleu horizontalement en direction de Pac-Man.

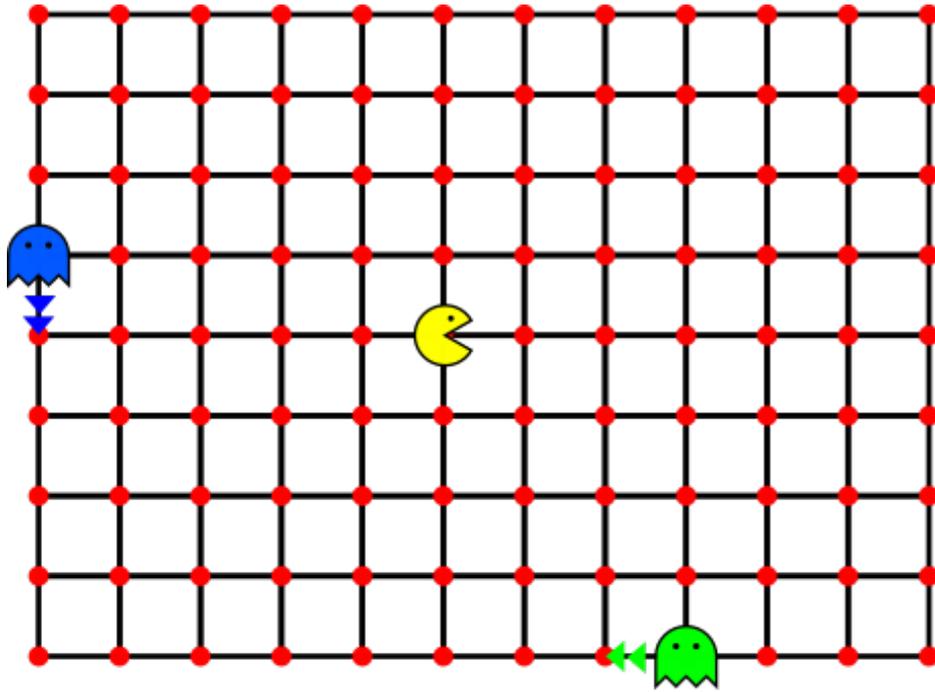


Figure 5 - Exemple 1 de coup du joueur F. Ici il cherche à aligner les fantômes avec Pac-Man.

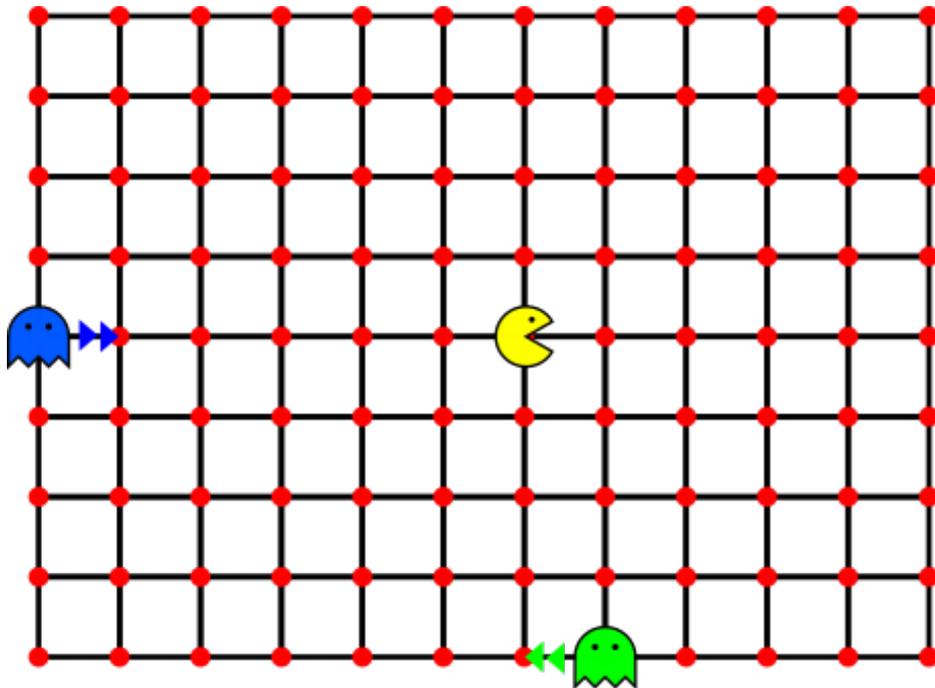


Figure 6 - Exemple 2 de coup du joueur F. Ici le fantôme bleu est aligné et peut alors se rapprocher tandis que le fantôme vert continue à s'aligner avec Pac-Man.

Au final, Pac-Man est coincé dans un rectangle dont les côtés sont donnés par les bords du plateau pour les côtés du haut et de droite, les deux autres côtés sont donnés par la ligne contenant le fantôme vert et la colonne contenant le fantôme bleu. La figure 9 illustre cette zone

sur un exemple. L'aire de ce rectangle devient nulle et on aboutit ainsi à la capture de Pac-Man. Tout ceci est détaillé et démontré dans la section suivante.

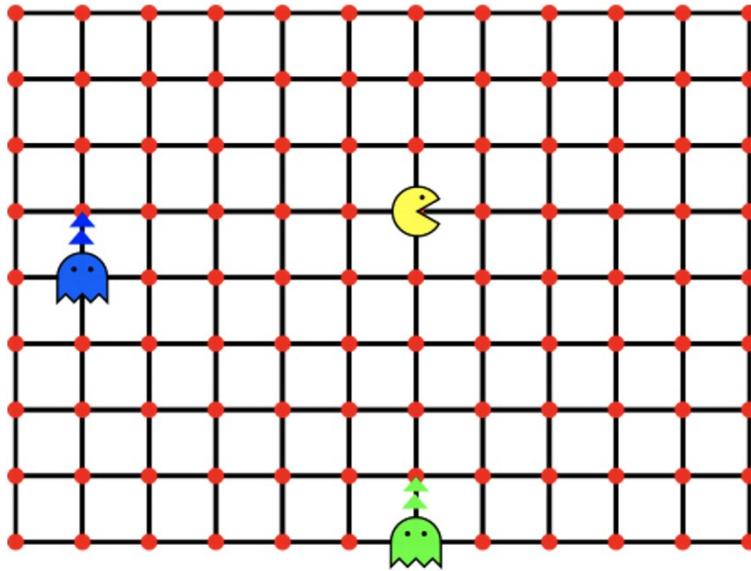


Figure 7 - Exemple 3 de coup du joueur *F*. Ici Pac-Man s'est déplacé verticalement et a donc brisé l'alignement avec le fantôme bleu qui va devoir rectifier l'alignement. Le fantôme vert, bien aligné, peut se rapprocher de Pac-Man.

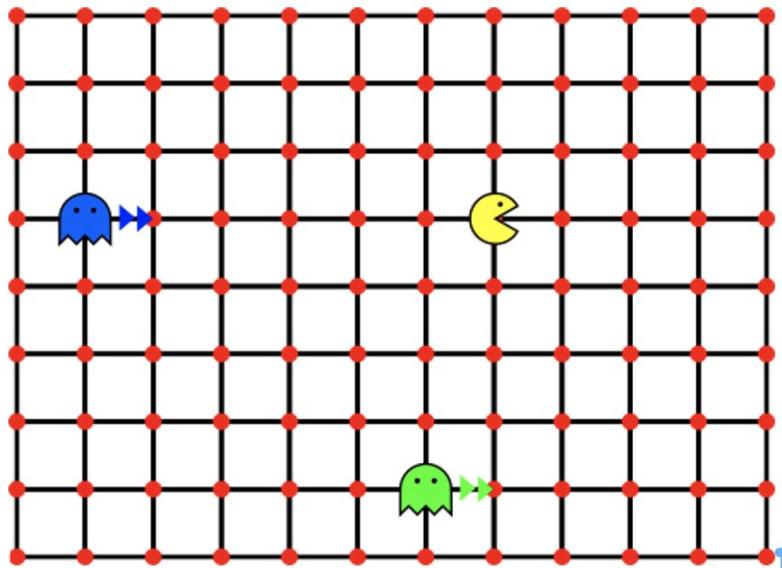


Figure 8 - Exemple 4 de coup du joueur *F*. Ici Pac-Man s'est déplacé vers la droite ce qui a brisé l'alignement avec le fantôme vert. Ce dernier rectifie donc l'alignement tandis que le fantôme bleu, bien aligné, se rapproche

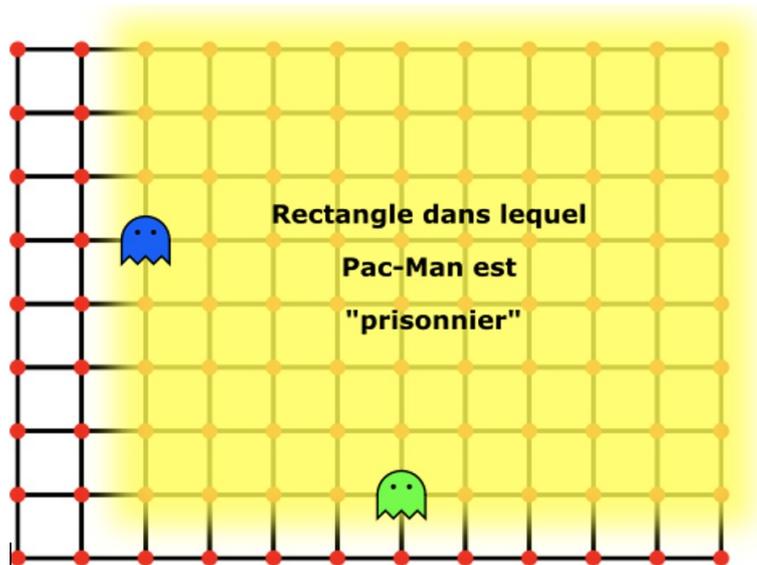


Figure 9 - Illustration représentant, dans cet exemple, le rectangle dans lequel Pac-Man peut se trouver.

Preuve détaillée

Dans la suite, on suppose que le joueur **P** se contente de respecter la règle de jeu et que le joueur **F** suit scrupuleusement la stratégie 1. Trois situations disjointes peuvent alors survenir :

- L'un des fantômes au moins capture Pac-Man ;
- Lors d'une phase de jeu la stratégie 1 impose au joueur **F** un déplacement interdit par la règle du jeu ;
- Le jeu ne se termine pas.

Ici un **déplacement interdit** est un mouvement non autorisé par la règle du jeu d'un des fantômes ou du Pac-Man. Plus précisément, le déplacement d'un des fantômes ou de Pac-Man sur un sommet qui n'est pas voisin de sa position actuelle ou qui est en dehors du rectangle $[0, +] \times [0, .]$. Il faut donc vérifier que, peu important les déplacements de Pac-Man, les situations (b) et (c) ne se réalisent jamais et que seule la situation (a) peut survenir.

Comme indiqué à la Remarque 2, les conditions de déplacement des fantômes dans la stratégie 1 sont symétriques par rapport à la première diagonale. **Ainsi, excepté pour la Proposition 2, nous effectuons les démonstrations pour le fantôme vert, celles pour le fantôme bleu s'obtenant par symétrie.**

Nous commençons par quatre lemmes qui permettent de comprendre l'évolution des positions relatives des fantômes par rapport à Pac-Man au cours d'une partie. Nous montrons ensuite dans la Proposition 1 que la situation (b) n'arrive jamais et dans la Proposition 2 que seule la situation (a) peut survenir.

Résultats préliminaires

Premièrement, on démontre que, dès qu'un fantôme s'est aligné avec Pac-Man, à toutes les fins de phases de jeu suivantes, cet alignement est préservé.

Lemme 1. Soit $7 \geq 1$ et supposons que la partie n'est pas terminée à la fin de la phase 7.

Si $/_{\$}(7) = /_{\%}(7)$, alors $/_{\$}(7 + 1) = /_{\%}(7 + 1)$.

De même, si $1_{\#}(7) = 1_{\%}(7)$, alors $1_{\#}(7 + 1) = 1_{\%}(7 + 1)$.

Proof. Si $\nu_0(7) = \nu_\$(7)$, en fonction du coup de \mathbb{A} , on a $\nu_0(7+1) = \nu_\$(7) - 1$, $\nu_0(7+1) = \nu_\$(7)$ ou $\nu_0(7+1) = \nu_\$(7) + 1$. Ainsi, dans chaque cas, en suivant la stratégie 1, \mathbb{A} joue selon [V1], [V2] ou [V3] respectivement et on a $\nu_\$(7+1) = \nu_0(7+1)$.

Deuxièmement, on démontre que, en fin d'une phase de jeu, le fantôme vert ne se retrouve jamais sur une colonne à gauche de Pac-Man (il reste sur la droite ou sur la même colonne). De même le fantôme bleu ne se retrouve jamais sur une ligne en dessous de Pac-Man (il reste en dessus ou sur la même ligne).

Lemme 2. Pour tout $7 \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $\nu_0(7) \leq \nu_\$(7)$ et $\nu_0(7) \not\geq 1_\#(7)$.

Proof. Démontrons par récurrence sur 7 que pour tout $7 \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $\nu_0(7) \leq \nu_\$(7)$.

Initialisation ($7 = 1$). On a $\nu_\$(0) = +$ et, comme la grille est de taille $(+ + 1) \times (. + 1)$, $\nu_0(0) \leq +$. On a alors trois cas.

Soit \mathbf{P} place Pac-Man sur le fantôme vert et la partie est terminée.

Soit $\nu_0(1) = +$ et $1_\$(1) > 0$. Dans ce cas, en suivant la stratégie 1, \mathbf{F} joue selon [V2] et déplace le fantôme vert en $(\nu_\$(1), 1_\$(1)) := (+, 1)$. Ainsi on a bien $\nu_0(1) \leq \nu_\$(1)$.

Soit $\nu_0(1) < +$. Dans ce cas, et en suivant la stratégie 1, \mathbf{F} joue selon [V1] et déplace le fantôme vert en $(\nu_\$(1), 1_\$(1)) := (+ - 1, 0)$. Ainsi, on a encore $\nu_0(1) \leq \nu_\$(1)$.

Hérédité. Démontrons que pour tout $7 \geq 1$, si la partie n'est pas terminée à la fin de la phase 7 et si $\nu_0(7) \leq \nu_\$(7)$, alors $\nu_0(7+1) \leq \nu_\$(7+1)$. Soit donc $7 \geq 1$ et supposons que la partie n'est pas terminée à la fin de la phase 7 . Supposons que $\nu_0(7) \leq \nu_\$(7)$ et distinguons deux cas : $\nu_0(7) = \nu_\$(7)$ et $\nu_0(7) < \nu_\$(7)$.

Si $\nu_0(7) = \nu_\$(7)$, on applique le Lemme 1.

Si $\nu_0(7) < \nu_\$(7)$, en fonction du coup de \mathbf{P} , on a $\nu_0(7+1) = \nu_\$(7)$ ou $\nu_0(7+1) < \nu_\$(7)$. Dans chaque cas, en suivant la stratégie 1, \mathbb{A} jouera selon [V2] ou [V1] respectivement. Ainsi, dans chaque cas on a bien $\nu_\$(7+1) \leq \nu_0(7+1)$.

Le Lemme 3 démontre que le fantôme vert ne quittera la ligne toute en bas ($1 = 0$) que lorsqu'il sera aligné avec Pac-Man. De même le fantôme vert ne quittera la colonne toute à gauche ($\nu = 0$) que lorsqu'il sera aligné avec Pac-Man.

Lemme 3. Soit $7 \geq 1$.

Si $1_\$(7) > 0$ alors $\nu_\$(7) = \nu_0(7)$.

De même, si $\nu_\#(7) > 0$, alors $1_\#(7) = 1_\nu(7)$.

Proof. Soit $7_\&$ la première phase de jeu où $1_\$(7_\&) > 0$. Comme $1_\$(0) = 0$, $7_\& \geq 1$, on a forcément $1_\$(7_\& - 1) = 0$ et à la phase $7_\&$, \mathbf{F} a déplacé le fantôme vert verticalement (selon [V2]). On avait donc $\nu_\$(7_\& - 1) = \nu_0(7_\&)$ et on a maintenant $\nu_\$(7_\&) = \nu_0(7_\&)$. Ainsi, en vertu du lemme 1, $\nu_\$(7) = \nu_0(7)$ pour tout $7 \geq 7_\&$.

Enfin, ce dernier lemme démontre que le fantôme vert ne se retrouve jamais sur une ligne au-dessus Pac-Man (il reste en dessous). De même le fantôme bleu ne se retrouve jamais sur une colonne à droite de Pac-Man (il reste à gauche).

Lemme 4. Pour tout $7 \geq 1$ et jusqu'à la fin de la partie, on a $1_\nu(7) \geq 1_\$(7)$ et $\nu_0(7) \not\leq \nu_\#(7)$.

Proof. Supposons qu'il existe 7 tel que $1_\nu(7) < 1_\$(7)$ et soit $7_\&$ le plus petit 7 tel que la partie ne soit pas terminée à la fin de la phase 7 et $1_\nu(7) < 1_\$(7)$. Notez que, au vu de la position initiale du fantôme vert, $7_\& \geq 1$. Comme $1_\nu(7_\&) < 1_\$(7_\&)$, on a $1_\$(7_\&) > 0$ et, par le Lemme 3 $\nu_0(7_\&) = \nu_\$(7_\&)$. De plus, par minimalité de $7_\&$, on a $1_\$(7_\& - 1) \leq 1_\nu(7_\& - 1)$ et donc $1_\$(7_\&) - 1_\nu(7_\&) \leq 2$.

Si $1_\$(7_\&) - 1_\nu(7_\&) = 2$ (cf figure 10), comme c'est la première fois que cette différence est strictement positive, c'est que le fantôme vert et Pac-Man se sont déplacés verticalement. Donc à la fin de la phase $7_\& - 1$, ils étaient sur la même case ce qui est absurde.

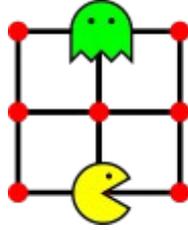


Figure 10 - illustration d'une position où $1_{\$}(7_{\&}) - 1_{\%}(7_{\&}) = 2$. Par minimalité de $7_{\&}$, on aurait forcément, à la fin de la phase $7_{\&} - 1$, les deux pièces sur le sommet central.

Si $1_{\$}(7_{\&}) - 1_{\%}(7_{\&}) = 1$ (cf figure 11), alors, par minimalité de $7_{\&}$ et au vu des déplacements autorisés par la règle du jeu, seules les deux configurations suivantes peuvent survenir à la fin de la phase $7_{\&} - 1$.

- i. Soit $1_{\$}(7_{\&} - 1) - 1_{\%}(7_{\&} - 1) = -1$ et alors, lors de la phase $7_{\&}$ le joueur **P** déplace forcément Pac-Man vers le bas sur la position du fantôme vert ce qui est absurde.
- ii. Soit $1_{\$}(7_{\&} - 1) - 1_{\%}(7_{\&} - 1) = 0$ et alors, comme forcément $/_{\$}(7_{\&} - 1) \neq /_{\%}(7_{\&} - 1)$ (sinon la partie serait déjà terminée à la phase $7_{\&} - 1$), on a par le Lemme 3 $1_{\%}(7_{\&} - 1) = 1_{\$}(7_{\&} - 1) = 0$. Ainsi, qu'importe le déplacement de Pac-Man, comme la partie ne se termine pas à la phase $7_{\&}$, on a forcément $/_{\$}(7_{\&}) \neq /_{\%}(7_{\&} - 1)$ et alors le fantôme vert se déplace selon [V1] ou [V3], i.e il se déplace horizontalement. En particulier, $1_{\$}(7_{\&}) = 0$ ce qui est absurde.

Les résultats principaux

Proposition 1. La stratégie 1 n'aboutit jamais à un déplacement interdit.

Proof. Les déplacements [V1], [V2] et [V3] sont des déplacements d'une case vers la gauche, le haut et la droite respectivement. Ainsi, les seuls déplacements interdits qui pourraient être joués à une phase 7 sont

- 1) [V1] quand le fantôme vert est sur la colonne de gauche ($/_{\$}(7) = 0$),
- 2) [V2] quand le fantôme vert est sur la dernière ligne ($1_{\$}(7) = .$) et
- 3) [V3] quand le fantôme vert est sur la colonne de droite ($/_{\$}(7) = +$).

Le cas (1) n'arrivera jamais car, si le fantôme vert est sur $/_{\%}(7 + 1) \geq 0 = /_{\$}(7)$, **F** jouera selon [V2] ou [V3] mais jamais [V1]. Le cas n'arrivera jamais non plus car, si le fantôme vert est sur la dernière ligne, les lemmes $3/_{\$}(7 - 1) = 4/_{\%}(7 - 1) + 1$ et $1_{\%}(7 - 1) \leq 1_{\$}(7 - 1) \leq 1$ et ainsi la partie aurait dû se terminer à la phase $7 - 1$. Enfin, le cas (3) est lui aussi impossible si le fantôme vert est sur la colonne de droite, car $/_{\%}(7) \leq +$ et $1_{\%}(7) \leq 1_{\$}(7)$, donc **F** jouera selon [V1] ou [V2] mais jamais [V3].

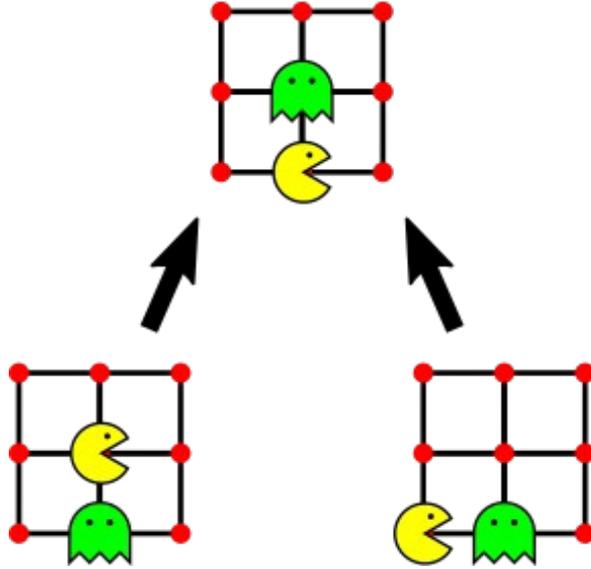


Figure 11 - illustration d'une position où $1_{\S}(7_{\&}) - 1_{\%}(7_{\&}) = 1$ en haut. Les deux illustrations en dessous représentent les positions possibles à la fin de la phase $7_{\&} - 1$. On peut alors voir que ce n'est pas possible.

Proposition 2. La partie s'arrête en un temps fini.

Proof.

Étape 1 : il existe $7_{\S} \leq +$ tels que pour tout $7 \geq 7_{\S}$, $/_{\S}(7) = /_{\%}(7)$.

D'après le Lemme 2, on a, pour tout $7 \geq 0$, $0 \leq /_{\%}(7) \leq /_{\S}(7)$. De plus, pour tout $7 \geq 0$, si $/_{\%}(7) < /_{\S}(7 - 1)$ alors **F** joue le fantôme vers selon [V1], c'est à dire vers la gauche et donc $/_{\S}(7) = /_{\S}(7 - 1) - 1$. Ainsi, il existe $7_{\S} \leq +$ tels que, $/_{\S}(7_{\S}) = /_{\%}(7_{\S})$. On conclut ensuite avec le Lemme 1

Étape 1bis : il existe $7_{\#} \leq .$ tels que pour tout $7 \geq 7_{\#}$, $1_{\#}(7) = 1_{\%}(7)$.

Cela se démontre de la même manière que l'étape précédente.

Soit $7_{\&} = \max(7_{\S}, 7_{\#})$.

Étape 2 : Pour tout $7 > 7_{\&}$ et tant qu'aucun fantôme n'a capturé Pac-Man, on a $1_{\S}(7) = 1_{\S}(7 - 1) + 1$ ou $1_{\#}(7) = 1_{\#}(7 - 1) + 1$.

Comme $7 > 7_{\&} = \max(7_{\S}, 7_{\#})$, on a $/_{\S}(7 - 1) = /_{\%}(7 - 1)$ et $1_{\#}(7 - 1) = 1_{\%}(7 - 1)$. Ainsi, si **P** déplace Pac-Man horizontalement et que la partie n'est pas terminée après son coup, **F** jouera le fantôme bleu selon [B2] et $1_{\#}(7) = 1_{\#}(7 - 1) + 1$, et si **P** déplace Pac-Man verticalement et que la partie n'est pas terminée après son coup, **F** jouera le fantôme vert selon [V2] et $1_{\S}(7) = 1_{\S}(7 - 1) + 1$.

Conclusion

Les Lemmes 2 et 4 nous assurent que pour tout $7 \geq 0$, $(/_{\%}(7), 1_{\%}(7)) \in [/_{\#}(7), +] \times [1_{\S}(7), .]$. Or d'après l'étape précédente, l'aire entière du rectangle $D_7 := [/_{\#}(7), +] \times [1_{\S}(7), .]$ décroît strictement à chaque phase de jeu à partir de la phase $7_{\&}$. Enfin, dès que l'aire de D_7 s'annule, les trois personnages sont alignés et, comme pour tout $7 \geq 7_{\&}$, $/_{\S}(7 - 1) = /_{\%}(7 - 1)$ et $1_{\#}(7 - 1) = 1_{\%}(7 - 1)$, Pac-Man se retrouve sur la case d'un fantôme et est capturé.

Remarque 3. On peut déduire de la preuve précédente le majorant $\max(+, .) - 1 + + + . - 1$ pour le nombre de phases de jeu pour une partie où **F** joue en suivant la stratégie 1

Déroulé de l'atelier

Lors de l'atelier, nous avons d'abord présenté le problème aux participants afin de les placer dans la position des élèves. Plusieurs petits groupes se sont donc formés et ont cherché à apporter une réponse au problème. Comme l'atelier s'est déroulé à distance, les participants ont interagi en discutant et en dessinant sur des tableaux partagés.

Les résultats obtenus sont de la même nature que ceux obtenus lors des expérimentations en classe : le fait que deux fantômes suffisent sur une grille rectangulaire est énoncé par tous les groupes et les stratégies décrites reprennent les arguments géométriques attendus. Compte tenu du temps disponible (environ 30min), on n'a pas tenté d'avancer vers la formulation de démonstrations. Cette phase d'étude en position d'élèves a été conclue par une mise en commun des résultats.

Dans un second temps, nous avons présenté la stratégie exposée ci-dessus et des éléments de preuve, les résultats expérimentaux détaillés plus loin et évoqué les aspects liés à la gestion de l'activité en classe. Cette partie de la présentation a mené à une phase de discussion sur l'usage en classe de cette situation, et des situations de recherche en général.

Retours d'expériences

Des tests en L3 de mathématiques

Nous avons proposé cette activité sur le jeu du Pac-Man à des étudiants de troisième année de licence de mathématiques deux années consécutives (fin 2019 et fin 2020). A cause du contexte sanitaire, la deuxième expérimentation a eu lieu en ligne.

Première expérimentation en classe

La SiRC est proposée aux étudiants intéressés pendant la dernière séance de travaux dirigés du premier semestre en troisième année de licence de mathématiques. Le public est donc assez particulier avec des jeunes suffisamment motivés par les mathématiques pour se lancer dans une licence de cette discipline. Ils ont un niveau mathématique avancé et sont volontaires. La séance dure une heure et quarante-cinq minutes.

Les étudiants sont disposés en cinq petits groupes (de trois à cinq élèves) et la situation est proposée dans le cas général en travaillant sur une grille rectangulaire quelconque. La plupart des groupes disent vite qu'un fantôme ne suffit pas et conjecturent que deux fantômes suffisent. Un groupe, en essayant de raisonner sur les degrés de liberté de Pac-Man (le nombre de déplacements possibles à chaque coup), a plus de difficulté à exclure la possibilité qu'il faille trois voire quatre fantômes et des divergences d'opinion émergent entre ses membres.

Même si les élèves pensent avoir déterminé le bon nombre de fantômes, ils n'arrivent pas à trouver les arguments pour le démontrer. Ils essaient de travailler sur la distance entre Pac-Man et les fantômes (c'est à dire la longueur du plus court chemin le long des arêtes entre Pac-Man et l'un des fantôme) et proposent des arguments comme on peut toujours réduire la distance entre Pac-Man et les fantômes. Cependant l'argumentaire reste flou et ne peut servir de preuve. Nous leur proposons alors d'explicitier plus proprement une stratégie pour les fantômes et d'essayer de montrer dans un second temps qu'elle est bien gagnante.

L'élaboration d'une stratégie demande un peu de temps mais les groupes y parviennent. Deux stratégies apparaissent majoritairement : l'une est celle proposée dans cet article et l'autre consiste à placer les fantômes en diagonale et à coincer Pac-Man dans un coin. Sur la première stratégie, non sans difficulté, un argument d'aire (comme proposé précédemment) ou de distance entre Pac-Man et les fantômes ou entre Pac-Man et les bords (ce qui revient plus ou moins à la même chose) émerge pour justifier que la stratégie aboutit bien à la capture de Pac-

Man. Pour la deuxième stratégie en revanche, même si elle semble être gagnante, les arguments essayés n'aboutissent pas.

En fin de séance, certains groupes expérimentent sur la bande (en autorisant par exemple les fantômes et Pac-Man à traverser le bord droit pour arriver sur le bord gauche au même niveau et vice et versa) ou le tore (en autorisant de même entre le haut et le bas de la grille), dont des exemples sont donnés sur la figure 12, ou encore sur une grille à maille triangulaire. Néanmoins, le manque de temps ne leur permet pas d'aboutir à des éléments de stratégie ou de preuve.

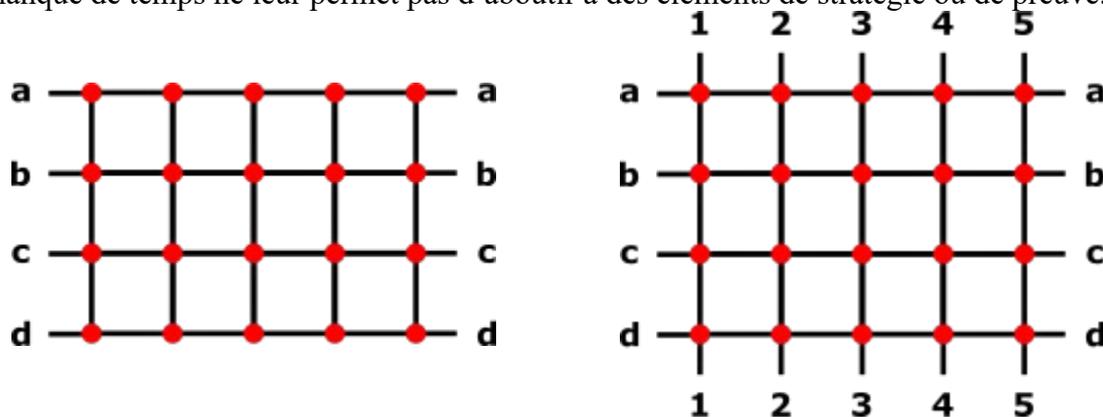


Figure 12 - Un exemple de bande (à gauche) et de tore (à droite). Chaque demie-arrête du bord doit être reliée à la demie-arrête à l'opposé avec la même lettre ou le même numéro.

Deuxième expérience en ligne

Cette deuxième expérimentation est proposée dans le même contexte universitaire l'année suivante, à ceci près qu'en raison de la crise sanitaire, elle se déroule en ligne. Nous utilisons la plate-forme Zoom dont l'université possède une licence. Après une brève présentation commune du problème, nous créons des salons distincts dans lesquels se répartissent les étudiants afin de faciliter le travail de groupe. Ceux-ci sont invités à travailler sur une grille fournie en format pdf : dans chaque groupe, un étudiant prend le rôle de maître du jeu et partage son écran sur lequel est ouverte la grille dans un logiciel qui lui permet de concevoir et de déplacer des symboles représentant les fantômes et Pac-Man. Cet étudiant a ainsi la charge de simuler le jeu, en fonction des actions demandées par ses camarades. Après un temps de prise en main, chaque groupe réussit à trouver une bonne manière de fonctionner (certains recréent même la grille fournie dans le logiciel de leur choix). Notons tout de même que le temps réel passé à travailler sur la situation de recherche en est plus ou moins affecté dans les groupes. Enfin, n'étant que deux animateurs pour encadrer cette activité, la navigation entre les cinq groupes est moins spontanée et peut-être moins pertinente.

Nous proposons l'activité sous un format un peu différent que lors de la première expérimentation. Dans un premier temps, les étudiants disposent d'une petite grille et de quatre fantômes. Ce cas particulier est très rapidement balayé par tous les groupes qui remarquent que les fantômes gagnent toujours. En attendant la suite, un groupe essaie même de trouver la manière de disposer les fantômes pour être sûr de gagner en un minimum de coups. Cette première phase nous permet également de gérer les premières difficultés liées au distanciel. Dans un second temps, nous leur distribuons une fiche présentant le problème général avec une indication : on pourra commencer par une ligne, puis deux, puis trois, etc. Lancés sur la résolution générale, rares sont les groupes qui se sont servis de cette aide à la recherche.

Une fois lancée l'activité dans les cinq groupes, la phase de recherche est assez similaire à celle observée l'année précédente, avec la même difficulté pour exhiber une stratégie. Il est à noter qu'un groupe ayant suivi l'indication arrive plus facilement à exhiber des stratégies en battue (voir figure 13) et à justifier qu'elles aboutissent bien à la capture de Pac-Man mais seulement pour un nombre de lignes compris entre un et quatre. Ils conjecturent que plus le nombre de lignes est élevé, plus le nombre de fantômes nécessaires croît. Cette conjecture fautive est néanmoins cohérente avec leur stratégie en battue qui est plus compliquée (mais possible) à mettre en place avec une grille ayant beaucoup de lignes.

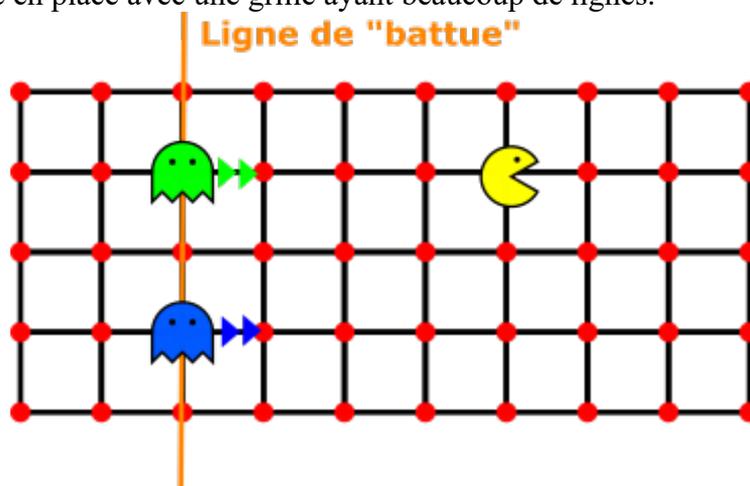


Figure 13 - Illustration de la stratégie en battue. Les fantômes se mettent en colonnes et forment une ligne de battue infranchissable par Pac-Man. Ils peuvent ensuite acculer Pac-Man sur le bord.

Test de l'activité dans une classe de 3ème

L'activité a été proposée dans une classe de 3ème avec 29 élèves répartis en 7 groupes. On indique aux élèves qu'ils vont travailler sur une situation de recherche pendant cette séance. La fiche avec la règle du jeu et la petite grille sont sur les tables. Les élèves sont invités à lire les règles du jeu et le but de l'activité. Un échange s'ensuit pour s'assurer que tout le monde a compris ces règles et ce qui est demandé.

Grille E × F

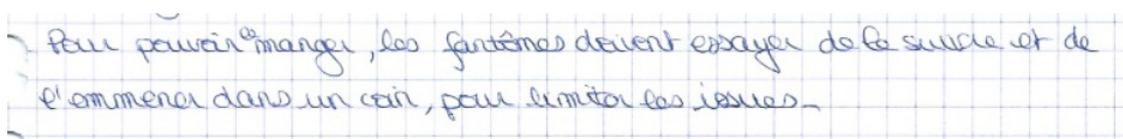
Les groupes se mettent rapidement au travail sur la grille 5 × 4. Tous les groupes constatent qu'avec quatre fantômes Pac-Man perd rapidement. Certains remarquent qu'ils n'utilisent pas tous les fantômes pour gagner, donc ils les enlèvent. Ils arrivent tous à constater que deux fantômes suffisent pour gagner et sont aussi nécessaires car un seul fantôme ne suffit pas (dans ce cas, le fantôme et Pac-Man se courent après indéfiniment).

Un bilan est fait à ce moment-là. Une grande grille est ensuite distribuée sur feuille A3, avec des caches pour en modifier les dimensions.

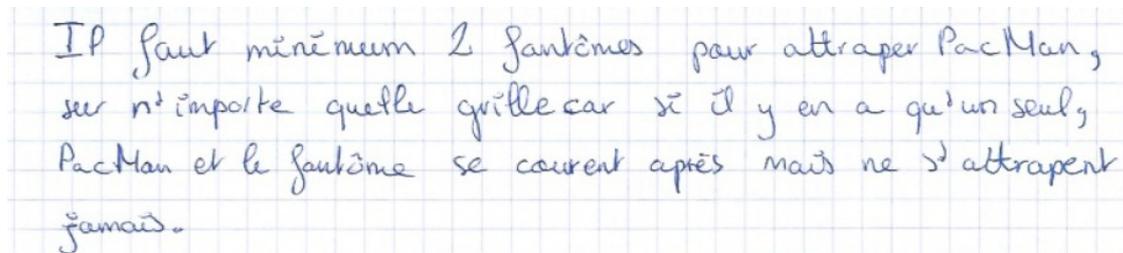
Autres grilles rectangulaires

Les élèves testent sur d'autres grilles. La plupart des groupes choisit des grilles de taille aléatoire, sans méthode particulière. D'abord des plus grandes, puis plus petites puis encore plus grandes. Ils constatent que les parties sont plus longues lorsque la grille est plus grande. Tous les groupes sauf un arrivent à la conclusion qu'il faut deux fantômes pour attraper Pac-Man, même si au départ plusieurs ont pensé que plus la grille serait grande, plus il faudrait de fantômes.

Voici quelques extraits de leurs remarques et arguments (on pourra en trouver d'autres en annexes) :



Pour pouvoir manger, les fantômes doivent essayer de le suivre et de l'emmener dans un coin, pour limiter les issues.



IP faut minimum 2 fantômes pour attraper Pac Man, sur n'importe quelle grille car si il y en a qu'un seul, Pac Man et le fantôme se courent après mais ne s'attrapent jamais.

On a aussi entendu :

- On essaie d'amener un fantôme sur la même ligne que Pac-Man.
- Quand Pac-Man est au milieu, il a quatre chemins possibles. Au bord, il a trois chemins possibles. Dans un coin, il a deux chemins possibles.

Il est évident pour les élèves que les fantômes peuvent toujours se rapprocher de Pac-Man. Les élèves s'« agacent » lorsqu'on leur demande ce que signifie « se rapprocher » ainsi que d'expliquer comment faire. Un groupe finit par dire qu'il faut faire diminuer la longueur du chemin entre le(s) fantôme(s) et Pac-Man.

Grille où un seul fantôme suffit

Trois groupes abordent cette question. Ils trouvent la ligne (ou grille $\cdot \times 1$) et un triangle.

D'autres expérimentations

La situation a aussi été proposée à un groupe de trois élèves de troisième lors d'un stage qu'ils effectuaient à l'Institut Fourier, le laboratoire de mathématiques fondamentales de Grenoble. Là encore, exhiber une stratégie est un point délicat à appréhender. Cependant, l'indication de regarder des grilles avec peu de lignes facilite le travail. Les jeunes, sur une matinée de trois heures résolvent le problème et vont même plus loin en étudiant la bande et le tore.

Enfin, le problème a fait l'objet d'un stage d'un mois pour un étudiant de deuxième année de licence de mathématiques. Le but de son stage était de donner différentes stratégies à deux fantômes et de justifier que celles-ci aboutissent à la capture de Pac-Man. Le stagiaire a ainsi pu mettre en évidence une petite dizaine de stratégies différentes.

Bilan

Des éléments pour la gestion de cette SiRC en classe

Comme nous l'avons fait lors de l'atelier, nous présentons dans cette section les moments clés qui, au vu de nos expérimentations, ressortent à chaque expérimentation de cette SiRC. Il est à noter que l'appropriation préalable du problème par l'enseignant est recommandée puisqu'elle lui permet d'appréhender au mieux les différentes stratégies proposées par ses élèves.

Les élèves sont répartis en groupe (jusqu'à quatre élèves par groupe). Une fiche décrivant la règle du jeu est donnée à chaque groupe ainsi qu'un jeton Pac-Man et quatre jetons fantômes. Suite à différentes expérimentations en classe, il apparaît que les élèves parviennent mieux à résoudre le problème quand l'activité se déroule en deux temps.

En premier lieu, il s'agit de les faire travailler sur une petite grille (par exemple 4×5) sur laquelle ils peuvent se familiariser avec les règles du jeu et faire quelques premières

observations. Il est assez naturel pour eux de ne pas utiliser les quatre fantômes disponibles sur cette petite grille et une majorité de groupes constate aisément que deux sont suffisants pour attraper Pac-Man à coup sûr tandis qu'un seul fantôme ne peut attraper Pac-Man. Parfois, certains groupes s'interrogent sur l'influence de la position initiale des fantômes. Ce questionnement peut les amener à tester le plus grand nombre possible des positions initiales ; des arguments de symétrie de la grille les aident alors à raisonner par exhaustivité des cas.

Dans un second temps, on fournit aux élèves une plus grande grille et on laisse à leur disposition des jetons fantômes supplémentaires s'ils en font la demande. On incite les élèves à faire varier la taille de la grille à l'aide de caches (des feuilles de papier font l'affaire pour en réduire les dimensions). Le passage à une grille de plus grande taille soulève souvent une première difficulté : les élèves considèrent que le nombre de fantômes nécessaires à la capture de Pac-Man augmente avec la taille de la grille. Les stratégies mises en œuvre à ce stade de l'activité sont souvent encore balbutiantes. Certains groupes peuvent ainsi se perdre dans de longues parties sans parvenir à dégager de procédure efficace pour coincer Pac-Man. Une bonne indication consiste alors à leur suggérer d'étudier des cas particuliers, notamment des grilles de taille $1 \times .$, $2 \times .$, $3 \times .$ etc. Une telle aide permet souvent aux élèves de prendre du recul sur le problème et de commencer à dégager des stratégies.

Comme le montrent les retours d'expérimentation présentés précédemment, l'énoncé clair d'une stratégie et de sa justification est la difficulté majeure pour les élèves. La question même de la justification, en termes d'une quantité qui décroît (aire, distance entre Pac-Man et les fantômes...), peut être compliquée à comprendre, puisque, comme le disent souvent les élèves, ça se voit que Pac-Man va être attrapé. Il s'agit alors de repréciser ce que l'enseignant attend, à savoir une suite d'instructions qui donne les déplacements des fantômes en fonction de celui de Pac-Man. Il est intéressant de noter que les arguments déployés par les élèves sont souvent divers et que la stratégie présentée dans cet article n'en est qu'une parmi plusieurs. La dernière phase de l'activité peut donc être constituée d'une mise en commun des différentes stratégies proposées par les élèves et de la discussion de leur validité. L'enseignant peut conclure en présentant celle détaillée précédemment, mais cette présentation ne doit pas constituer une correction qui rendrait obsolètes les stratégies dégagées par les élèves. L'enseignant peut enfin faire une synthèse des mathématiques en jeu dans cette SiRC.

Il est de plus à noter que, comme pour toute SiRC, l'activité ne se déroule pas de la même manière selon les niveaux. Des élèves en troisième année de licence de mathématiques comprennent bien mieux la nécessité de prouver qu'une stratégie est gagnante pour les fantômes que des collégiens. L'enjeu de la situation n'est donc pas tout à fait le même en collège puisqu'il faut d'abord faire sentir aux élèves que des arguments vagues ne sont pas des preuves mathématiques et ne peuvent garantir la validité de ceux-ci. C'est un équilibre à trouver pour l'enseignant : on ne peut attendre d'eux qu'ils écrivent une démonstration mais il faut s'assurer qu'une majorité d'entre eux ait compris la pertinence de l'énoncé d'une stratégie dans une forme presque algorithmique et soit capable d'exprimer une argumentation qui repose sur une quantité décroissante. L'enjeu de dévolution non plus n'est pas tout à fait identique : une expérimentation ultérieure à l'atelier en classe de sixième laisse à penser que la phase de sortie du jeu, nécessaire pour entrer dans une résolution mathématique, pourrait être plus longue pour de plus jeunes élèves. Cela pourrait aussi s'expliquer par la connaissance des élèves du jeu vidéo original de Pac-Man, qui peut amener quelques perturbations dans l'acceptation de la règle spécifique de cette SiRC. Nous espérons pouvoir l'expérimenter à nouveau, notamment en lycée, afin d'étoffer nos hypothèses.

Apports pour les élèves

Au-delà de l'aspect ludique et du plaisir à faire des maths autrement, les élèves et étudiants mobilisent des connaissances et compétences mathématiques spécifiques. Même si certaines

connaissances ne peuvent pas être approfondies ou institutionnalisées à tous les niveaux, les élèves se familiarisent avec des concepts d’optimisation, de stratégie gagnante, de condition nécessaire et condition suffisante. De plus, la symétrie est un concept facilement mis en valeur à tous les niveaux. En ce qui concerne les compétences, les élèves peuvent être amenés à :

- Chercher : expérimenter à tâtons, manipuler, étudier exhaustivement sur des petites grilles, conjecturer;
- Représenter : utiliser un dessin ou un graphe ;
- Raisonner : construire des exemples ou des contre-exemples, construire une preuve suite à une argumentation, construire une démarche algorithmique ;
- Communiquer : expliquer et décrire précisément une stratégie, mener collectivement une investigation en confrontant des idées et des argumentations, narrer une recherche.

Références bibliographiques

Godot, K. (2005). Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs. (Thèse de doctorat). Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situation de recherches “en classe” : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier, C. Tisseron, Institut de recherche sur l’enseignement des mathématiques, & Association pour la recherche en didactique des mathématiques (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques : année 2002* (pp. 189–203). Paris : IREM, Université Paris VII : A.R.D.M.

Groupe Logique, Raisonnement et SiRC. (2017). *Situations de recherche pour la classe : pour le collège et le lycée... et au-delà* (IREM de Grenoble, Ed.).

Mansuy, R. (2016, juillet). Pac-Man contre les fantômes. *La Recherche*, 513.

ANNEXE

Voici quelques productions d’élèves lors de l’expérimentation en troisième.

4 fantôme: Pac-man perd à chaque parties quand il y a 4 fantômes.
 3 fantôme: Pac-man perd à chaque parties quand il y a 3 fantômes.
 2 fantôme: Pac-man perd à chaque fois mais ça prend du temps.
 1 fantôme: ça ne marchera pas car ils se courent après.
 Les fantômes gagnent en se rapprochant le plus possible du Pac-man pour l'amener contre un mur ou un coin.

Si PacMan ne peut se déplacer qu'en horizontal et en vertical, les fantômes font de même jusqu'à ce qu'ils le bloquent dans un angle de la grille si il n'y a que 2 fantômes.

Pour que les fantômes gagnent à deux, ils devraient aller dans la direction où Pac-Man est en se rapprochant de lui et pour éviter de le corner contre les bords, mais il est aussi possible de le corner en mettant les fantômes sur 2 des 4 diagonales à côté de Pac-Man.

Les stratégies des fantômes ce sont, qu'ils se resserment en faisant déplacer PacMan vers les coins de la grille.

2 - Lors des parties, cela ne change à rien malgré la taille de la grille mais la durée de la partie change en fonction du nombre de fantômes qui veulent manger PacMan, donc les parties durent plus longtemps plus que la grille est grande.

Les stratégies des fantômes ce sont, qu'ils se resserment en faisant déplacer PacMan vers les coins de la grille.

Si il y a seulement 1 fantôme, PacMan et le fantôme vont se corner après car même si PacMan est bloqué dans un angle avec un fantôme en diagonale, il lui suffit de passer son tour pour pouvoir s'échapper après que le fantôme soit soit monté soit descendu.