POUVOIR GENERIQUE D'UNE PREUVE

Véronique BATTIE[1]

Résumé. Les nouveaux programmes du Lycée mettent l'accent sur l'exploitation en classe de plusieurs preuves d'un même résultat, avec mention de plusieurs niveaux de détail. Dans cette présentation, nous tentons d'apporter un éclairage épistémologique et didactique propre aux preuves arithmétiques. Cela nous amène à introduire l'idée de pouvoir générique d'une preuve dans le prolongement de travaux internationaux en philosophie et didactique de la preuve en mathématiques.

Introduction

Avec les nouveaux programmes du Lycée, apparaît une claire invitation à exploiter en classe plusieurs preuves d'un même résultat mathématique. Sur la plateforme EDUSCOL du Ministère de la l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports, deux ressources ont été éditées avec le même intitulé « Raisonnement et démonstration » pour la classe de Seconde voie générale et technologique d'une part, et pour la classe de Première voie générale d'autre part. Dans ces deux ressources, dans une perspective de pistes à donner pour différencier l'enseignement, on peut lire :

> « Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours. » (Eduscol, 2019)[2]

La ressource pour la classe de Seconde est un document de 23 pages dont 16 sont dédiées à des problèmes et plusieurs preuves associées à chacun d'entre eux. La ressource pour la classe de Première comporte quant à elle 29 pages dont 19 sont dédiées à cela.
Dans le cadre de cette invitation, la proposition de travailler les démonstrations suivant « plusieurs niveaux de détail » est à souligner :

> « Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :
>
> - Niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
> - Niveau 2 : démontrer chaque étape du plan (avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun) ;
> - Niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive. » (Eduscol, 2019)

De plus, en écho à la conférence de N.Balacheff lors du précédent colloque CORFEM (Balacheff, 2019), il est remarquable que « l'exemple générique » soit mentionné :

---

[1] Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, S2HEP (EA 4148), Département de mathématiques.

[2] EDUSCOL. (2019). Raisonnement et démonstration. Ressources d'accompagnement du programme de Seconde voies technologique et générale et du programme de Première voie générale.

> « Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement n'entache pas une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas général. » (EDUSCOL, 2019)

Avec cette actualité des programmes du Lycée, des questions épistémologiques[3] et didactiques émergent :

- Comment mener une analyse comparative de preuves d'un même résultat ? quels critères adopter ?
- Quel sens épistémologique donner à « plan », « étape du plan », « idées générales » (Eduscol, 2019) ?
- Dans la perspective d'aller vers le « général » (Eduscol 2019) : "Not all proofs are equally amenable to a genuine generic version. Can we characterize the proofs (or parts thereof) that are so amenable?" (Leron, Zaslavsky, 2013)
- Pourquoi et comment mettre en scène en classe ou TD une activité mettant en scène plusieurs preuves d'un même résultat (activité multipreuves) ?

L'enjeu de cette présentation est d'essayer d'apporter des éléments de réponse dans le cas de l'arithmétique.
Dans une première partie, nous proposerons une analyse de plusieurs preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Cela nous amènera à introduire l'idée de pouvoir générique d'une preuve en écho aux travaux du philosophe M. Steiner (1978). Dans un second temps, nous présenterons un exemple d'activité multi-preuves à la transition Secondaire-Supérieur. En guise de conclusion, nous reviendrons sur les ressources EDUSCOL mentionnées dans cette introduction.

Vers une définition du pouvoir générique d'une preuve

Dans le raisonnement en arithmétique, nous distinguons deux dimensions épistémologiques : la dimension organisatrice et la dimension opératoire (Battie, 2009). La première s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. Cette dimension organise et structure les différentes étapes du raisonnement. Outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, on identifie au niveau de cette dimension le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble $\mathbb{N}$), la réduction à l'étude d'un nombre fini de cas (telle la disjonction de cas) et le jeu d'extension-réduction (propre aux anneaux factoriels). La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Nous identifions par exemple les formes de représentation choisies pour les objets (telle la décomposition unique en produit de nombres premiers en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique, les congruences), l'utilisation de théorèmes, les manipulations algébriques et l'ensemble des traitements relatifs à l'articulation entre l'ordre divisibilité (anneau $\mathbb{Z}$) et l'ordre naturel (ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$).

Ces deux dimensions sont complémentaires et en interaction, et permettent d'analyser l'objet preuve à la fois en tant que produit et en tant que processus ((Battie, 2007) et (Gardes, 2013)).

[3] Au sens de M. Artigue (1989)

Au sein du vaste champ des recherches en didactique des mathématiques dédiées à la preuve ((Hanna, Knipping, 2020) et (Stylianides, Harel (Eds) 2018)), ce sont les travaux de U.Leron (1983) sur la structuration des preuves qui font le plus écho à notre outil épistémologique. Néanmoins, l'analogie se limite aux preuves ayant un seul niveau en termes de dimension organisatrice (Battie, 2007). Et, selon nous, sa structuration ne donne pas accès à ce que donne à voir une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire, à savoir la différence de nature du travail mathématique selon qu'il s'agisse d'une dimension ou l'autre et les interactions entre ces deux dimensions.

Analyse de preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Nous avons sélectionné quatre preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et nous allons les analyser en termes de dimensions organisatrice et opératoire dans une perspective comparative. Puis nous prolongerons cette étude en l'inscrivant dans une problématique de généralisation ; ce sera l'occasion de préciser en préalable le sens avec lequel nous allons vers le « général » (EDUSCOL, 2019).

Analyse comparative de preuves en termes de dimensions organisatrice et opératoire

Nous envisageons quatre preuves arithmétiques qui ont même dimension organisatrice principale, à savoir un raisonnement par l'absurde, et même traitement opératoire premier, à savoir élever au carré pour rendre disponibles les outils du champ mathématique concerné. A partir de là, les preuves vont différer en termes de dimensions organisatrice et opératoire.

Nous proposons les deux premières preuves suivantes :

> **Preuve 1.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi: si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$ Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ceci contredit le caractère irréductible de la fraction. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.
>
> **Preuve 2.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2 = a^2$ donc a^2 est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi: si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$ et donc a^2 est impair car égal à $2 \times 2(k^2 + k) + 1$ Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ainsi, à partir des entiers a et b, on obtient des entiers naturels a' et b' tels que $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$, $a' < a$ et $b' < b$. On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est en contradiction avec « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ces deux preuves ont en commun, mot/symbole pour mot/symbole, l'étape opératoire au sein de laquelle le caractère pair des entiers a et b est démontré (partie en italique). Et ainsi, la dimension organisatrice de ces deux preuves se complexifie avec l'apparition d'un raisonnement contraposée pour démontrer l'implication énonçant que si le carré d'un entier est pair alors l'entier lui-même l'est aussi. Elles diffèrent néanmoins dans le choix opératoire de travailler ou non sur la fraction $\frac{a}{b}$ via son représentant irréductible : la preuve 1 spécifie l'objet fraction, la preuve 2 ne le fait pas. Dans le cadre des interactions entre dimensions organisatrice et opératoire, la dimension organisatrice principale de la preuve 2 est spécifiée : c'est un raisonnement par l'absurde de type descente infinie qui est suivi. Et ainsi, la nature de la contradiction à laquelle on aboutit n'est pas la même pour chacune de ces preuves. Dans le cas de la preuve 2, « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie » est contredit. Dans le cas de la preuve 1, on arrive à une proposition et sa négation : « la fraction est irréductible » et « la fraction est réductible (en divisant par 2 numérateur et dénominateur) ».

Pour commencer à expliciter le lien avec les travaux de M.Steiner (1978), nous donnons ci-après l'une des preuves qu'il donne pour la non rationalité de $\sqrt{2}$:

> Consider the Pythagorean proof that the square root of 2 is not rational: $\$^2 = 2"^2$, with $\frac{!}{"}$ reduced to lowest terms, then $\$^2$ and thus a itself have to be even; thus $\$^2$ must be a multiple of 4, and $"^2$ - and thus b - mutilples of 2. Since therefore $\$^2 = 2"^2$ implies that both a and b must be even, contradicting our (allowable) stipulation that $\frac{!}{"}$ be reduced to lowest terms, it can be true, q.e.d. The key point here is the proposition that if $\$^2$ is even so is a. This can be verified by squaring an arbitrary odd number $2\$ + 1$ and showing that the result must be odd. » (Steiner, 1978)

En termes de dimensions organisatrice et opératoire, il s'agit d'une preuve équivalente à la preuve 1, l'accent étant mis sur l'implication énonçant que si le carré d'un entier est pair alors l'entier lui-même l'est aussi. Nous reviendrons sur ce point dans la suite de notre présentation.

Nous poursuivons avec la preuve suivante :

> **Preuve 3.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{!}{"}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on $2 = \frac{!^"}{"^"}$ et, $\frac{!}{"}$ étant irréductible, $\frac{!^"}{"^"}$ l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors $\$^2$ et $"^2$ n'en ont pas non plus). L'égalité $2 = \frac{!^"}{"^"}$ impose $'^2 = 1$ donc $\$^2 = 2$, ce qui est en contradiction avec « 2 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$ ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

De même que la preuve 1, l'objet fraction est spécifié via son représentant irréductible mais le raisonnement ensuite sur la fraction $\frac{!^!}{"^!}$ et non sur les entiers en jeu. Cette différence du côté de la dimension opératoire conduit à une contradiction inédite par rapport aux preuves 1 et 2 dans la mise en œuvre du raisonnement par l'absurde. De plus, contrairement aux preuves 1 et 2, la dimension organisatrice ne se complexifie pas. Et cela s'inscrit dans les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire car la non-complexification de la dimension organisatrice a pour origine une encapsulation[4] au niveau de la dimension opératoire : une « boîte noire » apparaît en admettant l'implication « si a et b n'ont pas de facteur commun alors $!^2$ et $"^2$ n'en ont pas non plus ».

Pour finir, nous donnons ci-après une quatrième preuve :

> **Preuve 4.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{!}{"}$ d'où $2"^\# = \$^\#$. On appelle) l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a et ! celui de b. D'après l'égalité précédente on a $1 + 2- = 2.$, ce qui est en contraction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.
>
> **Preuve 4 écrite avec la notation propre à la valuation p-adique.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{!}{"}$ d'où $2"^\# = \$^\#$. Ainsi

[4] Nous empruntons ce mot à l'informatique sans qu'ici l'information soit intentionnellement cachée.

$1 + 2/\cdot(") = 2/\cdot(\$)$, ce qui est en contraction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Dans cette preuve, ni l'objet n'est spécifié (on ne travaille pas sur le représentant irréductible de la fraction comme dans les preuves 1 et 3), ni le raisonnement par l'absurde ne l'est (comme cela est fait dans la preuve 2). Contrairement aux preuves 1 et 2, la dimension organisatrice ne se complexifie pas et, contrairement à la preuve 3, cela ne renvoie pas à une encapsulation de la dimension opératoire (aucun résultat n'est admis en cours de route). Une spécificité apparaît du côté de la dimension opératoire : on travaille sur les entiers via leur décomposition unique entre produit de nombres premiers.

Pour continuer à faire le lien avec les preuves mises en scène dans les travaux de M.Steiner, nous reproduisons l'extrait suivant :

> « By using the Fundamental Theorem of Arithmetic - that each number has a unique prime power expansion - we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively. For in the prime power expansion of $\$^2$ the prime 2 will necessarily appear with an even exponent (double exponent it has in the expansion of a), while in $2"^{\#}$ its exponent must needs be odd. So $\$^2$ never equals $2"^{\#}$, q.e.d. » (Steiner, 1978)

Cette preuve est équivalente à la preuve 4 en termes de dimensions organisatrice et opératoire.

Analyse comparative de preuves dans une perspective de généralisation

Un résultat général en jeu est le suivant : Soit n un entier naturel, une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{\#}$ soit rationnel est que n soit un carré d'entier. L'enjeu est de prouver que la condition est nécessaire. Et nous posons la problématique épistémologique suivante : quelle(s) preuve(s) parmi les quatre preuves étudiées donne(nt) l'accès le plus aisé à une preuve du caractère nécessaire de la condition mentionnée ? C'est en ce sens que nous prolongeons dans une perspective de généralisation l'analyse comparative précédemment menée.

Revenons sur l'étape opératoire des preuves 1 et 2 :

> Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2"^{\#} = \$^{\#}$ donc $\$^2$ est pair ; par contraposée on montre que a l'est aussi : si a n'est pas pair alors il existe un entier k tel que $\$ = 2\% + 1$et donc $\$^2$ est impair car égal à $2 \times 2(\%^{\#} + \%) + 1$ Il existe donc un entier a' non nul tel que $\$ = 2\$^{\%}$; d'où $2"^{\#} = 4(\$^{\%})^{\#}$ ou encore $"^2 = 2(\$')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair.

On peut l'exploiter dans le cas d'un autre entier non carré parfait mais la dimension organisatrice se complexifie. Illustrons cela avec 3 dans le cadre de l'écriture d'une preuve arithmétique de l'irrationalité de$\sqrt{3}$: il s'agit de démontrer par contraposée que pour tout entier a, si $!^2$ est divisible par 3 alors a est divisible par 3. Ainsi, une disjonction de cas apparaît pour considérer la non-divisibilité par 3 et une nouvelle dimension organisatrice s'imbrique dans le raisonnement par contraposée, ce dernier s'inscrivant dans un raisonnement par l'absurde. C'est ce qu'exprime à sa façon M.Steiner :

> « Consider the Pythagorean proof [preuve 1] that the square root of 2 is not rational […] The key point here is the proposition that if a^2 is even so is a. […] Indeed for each prime p, one can separately verify that if p divides a^2 it must divide a also, though the proofs become more and more complex […] » (Steiner, 1978)

On comprend alors en quoi il est problématique de généraliser à partir des preuves 1 et 2. Et pour mettre en relief les interactions susceptibles d'exister entre les dimensions organisatrice et opératoire, soulignons que si l'implication en jeu dans l'étape opératoire commune aux preuves

1 et 2 est démontrée en utilisant le premier théorème d'Euclide[5], d'une part aucune complexification de la dimension organisatrice n'apparaît pour traiter le cas d'un autre entier non carré parfait, et d'autre part on peut accéder à une preuve du résultat général.

Quant aux preuves 3 et 4, nous accédons respectivement aux preuves suivantes du résultat général :

> Supposons que √%soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que √% =!/", on suppose de plus que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on % =! "/" " et, !/" étant irréductible, ! "/" " l'est aussi (on admet que si a et b n'ont pas de facteur commun alors $ 2 et " 2n'en ont pas non plus). L'égalité % =! "/" " impose ' 2 = 1 donc $ 2 = 0.
>
> Supposons que √%soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que √% =!/" d'où %&̸ = $ #. Supposons par l'absurde que n ne soit pas un carré : il existe alors p premier tel que /((0) impair. Et d'après l'égalité précédente on /((0) + 2/((") = 2/ (($), ce qui est en contradiction avec « un nombre impair ne peut être égal à un nombre pair ». En conclusion, n est un carré.

La dimension organisatrice de la preuve obtenue à partir de la preuve 4 est plus complexe que celle obtenue à partir de la preuve 3. En effet, un raisonnement par l'absurde apparaît. Néanmoins, on rappelle que du côté de la dimension opératoire de la preuve 3, un résultat est admis et on retrouve cette caractéristique dans la preuve générale. Si on s'impose de ne pas admettre de résultat au cours de la preuve (mis à part les théorèmes fondamentaux tel le théorème fondamental de l'arithmétique en jeu dans la dimension opératoire de la preuve 4), la dimension organisatrice de la preuve obtenue à partir de la preuve 3 est susceptible de se complexifier suivant comment on démontre le résultat admis. Par exemple, on peut suivre un raisonnement par contraposée en démontrant que « si ! 2 et " 2 ont un facteur en commun alors a et b aussi ». Du côté de la dimension opératoire, on pourra utiliser le premier théorème d'Euclide dont le lien avec le théorème fondamental de l'arithmétique est fort.

Avec l'exploitation aisée de la preuve 4 par rapport aux preuves 1 et 2 pour une généralisation, nous reprenons et complétons la citation précédente de M. Steiner :

> « Consider the Pythagorean proof [preuve 1] that the square root of 2 is not rational […] The key point here is the proposition that if a^2 is even so is a. […] Indeed for each prime p, one can separately verify that if p divides a^2 it must divide a also, though the proofs become more and more complex […]. But by using the Fundamental Theorem of Arithmetic [preuve 4] […] we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively.[…] Generally, the same proof shows that a^2 can never equals nb^2, unless n is a perfect square (so that all exponents in its prime power expansion will be even). » (Steiner, 1978)

Et c'est en ce sens que M.Steiner qualifie l'équivalent (en termes de dimensions organisatrice et opératoire) de la preuve 4 de « generalizable proof ». C'est D.Tall (1979) qui introduira en didactique des mathématiques cette idée sous la nouvelle appellation « generic proof ». Dans l'Histoire de la didactique des mathématiques, l'idée de preuve générique est antérieure à celle d'exemple générique ((Mason, Pimm, 1984), (Balacheff, 1988)).

[5] Appellation en référence à (Hardy, Wright, 2007) : Si p est un nombre premier et p divise ab alors p divise a ou p divise b.

Pouvoir générique d'une preuve

L'analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire des preuves 1 à 4 faite dans une perspective de généralisation, nous amène à introduire l'idée de pouvoir générique d'une preuve. Ici, il s'identifie au sein de la dimension opératoire de la preuve 4 : la forme de représentation choisie pour travailler sur les entiers, à savoir leur écriture unique en produit de nombre premiers. Et une hiérarchie des preuves en termes de pouvoir générique apparaît. Par ordre croissant on a ex-æquo les preuves 1 et 2, puis la preuve 3, et ensuite la preuve 4.

Le mode d'emploi est le suivant :

1. On procède à une « dé-encapsulation » : on prouve les résultats admis dans la dimension opératoire de chaque preuve.
2. On évalue ensuite le niveau de complexité en termes de dimensions organisatrice et opératoire de la preuve résultat de ce procédé ; comme on l'a montré ici, un des critères essentiels pour jauger ce niveau de complexité est le nombre d'imbrications au sein de la dimension organisatrice.
3. On suit la règle suivante : moins la preuve obtenue par dé-encapsulation est complexe, plus cette preuve est susceptible d'avoir un pouvoir générique élevé.

Pour tenter de définir de façon décontextualisée l'idée de pouvoir générique, nous pouvons faire parler l'écho avec les travaux de M. Steiner :

> « Our proof that $\$^2 = 2"^2$, which uses the prime power expansions of a and b (and 2) [preuve 4], conforms to our description, since the prime power expansion of a number is a characterizing property. It's easy to see what happens, moreover, when 2 becomes 4 or any other square; the prime power expansion of 4, unlike that of 2, contains 2 raised to an even power, allowing $\$^2 = 2"^2$. In the same way we get a general theorem: the square root of n is either an integer or irrational. Generalizing further, almost the same reasoning gives us the same for the $!^{"h}$ root of n. » (Steiner, 1978)

Ce que M. Steiner appelle la « characterizing property » est précisé dans la suite de sa publication :

> « My proposal is that an explanatory proof makes reference to a characterizing property of an entity or structure mentioned in the theorem, such that from the proof it is evident that the result depends on the property. »

Ainsi, nous proposons d'exprimer le pouvoir générique d'une preuve en termes d'accessibilité (distance) à ce que M. Steiner (1978) défini comme la « characterizing property », après avoir procédé à la dé-encapsulation en jeu dans l'application du mode d'emploi présenté précédemment.

Il est toutefois important de clarifier que l'introduction (de nature épistémologique) de l'idée de pouvoir générique d'une preuve s'inscrit dans une perspective didactique centrée sur la preuve et le processus de preuve, et non dans une perspective philosophique d'explication mathématique dans laquelle s'inscrit les travaux de M.Steiner.

Activité multi-preuve à la transition Secondaire-Supérieur

Dans le prolongement de l'analyse épistémologique faite précédemment, nous présentons une activité multi-preuves conçue à partir des preuves 1 à 4. Elle est proposée à la transition Secondaire-Supérieur en invitant les élèves-étudiants à travailler en groupes.

Conception de l'activité

L'activité est composée de deux séances : les preuves ne sont fournies que lors de la deuxième séance. Les consignes formulées auprès des élèves-étudiants sont les suivantes pour la première séance :

> « On rappelle qu'un nombre est rationnel si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a entier et b entier naturel non nul. »
>
> 1) Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
> 2) Selon votre groupe, le nombre $\sqrt{2}$ est-il rationnel ou non rationnel ? Justifier votre réponse le plus rigoureusement possible.
> 3) A votre avis, pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est-il rationnel ? Tenter de démontrer votre conjecture.

Et pour la deuxième séance :

1) De quelle preuve vos idées du ... sont-elles les plus proches ?
2) Choisir la preuve qui vous permet le plus facilement de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et écrivez la preuve associée.
3) On peut se demander pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel ; Complétez la phrase suivante : «$\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est ....». Tenter de démontrer cette équivalence en vous inspirant de la preuve qui vous semble la plus facile à adapter.

Les enjeux didactiques de cette activité sont centrés à la fois sur le raisonnement et la preuve en mathématiques, via une analyse comparative de preuves d'un même résultat, et sur des contenus d'arithmétique en jeu à la transition Secondaire-Supérieur. En termes de limites didactiques, nous n'avons pas avec cette activité la rencontre heureuse mentionnée par G. Hanna (2018) :

> « [...]it its often possible to find the happy concurrence in which a proof enlightens both the process of proving and the broader mathematical context with which it deals. » (Hanna, 2018)

En effet, cette activité ne donne pas accès aux propriétés permettant de manipuler les réels (Durand-Guerrier, 2019). En termes d'explication mathématique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, les preuves arithmétiques sont limitées. Et cela découle de la traduction du problème dans le domaine de l'arithmétique :

> « […] de nombreux problèmes d'irrationalité peuvent être étudiés au sein de l'arithmétique. […] Ainsi (P) « $\sqrt{2}$ est irrationnel » signifie (Q) « $a^2 = 2b^2$ n'a pas de solution entière » et apparaît donc comme un théorème réellement arithmétique. Nous pouvons poser la question « $\sqrt{2}$ est-il irrationnel ? » Sans sortir du champ de l'arithmétique et nous n'avons pas besoin de poser la question « quelle est la signification de $\sqrt{2}$? ». L'interprétation du symbole isolé $\sqrt{2}$ n'est pas nécessaire puisque nous avons donné un sens à (P) en le définissant comme étant la même chose que (Q). » (Hardy, Wright, 2007)

On peut étudier le problème arithmétique en jeu (résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $a^2 = 2b^2$) sans disposer des nombres réels.

Au cœur de la conception de ce type d'activités, il y a la sélection par l'enseignant(e) des preuves fournies aux élèves-étudiants. Cette sélection nécessite de pouvoir mener une analyse comparative entre les preuves, mettre à jour le « plan », les « étapes du plan », les « idées générales » (Eduscol, 2019). Et, comme nous l'avons montré dans la première partie de cette présentation, une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire avec l'idée de pouvoir générique apparaît comme solution.

Eléments d'analyse a posteriori

Nous donnons à présent de façon synthétique les éléments-clefs d'analyse a posteriori en référence à (Battie, 2015) et à notre pratique enseignante en 1ère année de Licence mathématiques.

On constate tout d'abord qu'élèves et étudiants vont de façon privilégiée vers les preuves 3 et 4, preuves à haut pouvoir générique. Ce constat va dans le sens des travaux de D.Tall (1979) (repris dans (Tall et all, 2012)). Et cela est d'autant plus remarquable quand on sait que la preuve communément rencontrée dans l'enseignement Secondaire renvoie à la preuve 1 et non aux preuves 3 et 4. Les preuves génériques dans l'enseignement sont « infrequently used » (Hanna et al, 2012) avec un potentiel didactique « virtually unrecognized and unexploited in the Teaching of number theory » (Rowland, 2002). Cela est d'autant plus regrettable face à la préférence spontanée des élèves-étudiants pour les preuves de ce type.

De plus, l'enrichissement du milieu (Brousseau, 1990) avec les preuves fournies est confirmé. On observe en particulier une lecture active de ces preuves de la part des élèves-étudiants. Néanmoins, le risque d'une compréhension superficielle est une réalité et cet élément rejoint les travaux de T.Rowland (2002) en didactique de l'arithmétique :

« I believe that the accounts given here of my work with undergraduates offer grounds for considerable optimism regarding the possibility of students "seeing" the generality we intend them to see in arguments based on particular cases. At the same time, it warns us against naïve complacency: we cannot be sure what they will see, and they may see considerably less than we might hope. » (Rowland, 2002)

Le risque mentionné induit un rôle de l'enseignant(e) particulièrement délicat dans ce type d'activités. Il s'agit en effet de veiller à une compréhension authentique des preuves fournies et de mettre à jour l'illusion d'authenticité de certaines des preuves produites par les élèves-étudiants. Une piste est de porter à la discussion, éventuellement au débat, les preuves produites par les élèves-étudiants afin de repousser les limites de ce que donne à voir une production écrite.

Retour sur les ressources EDUSCOL en guise de conclusion

Revenons sur les ressources EDUSCOL citées en introduction pour la classe de Seconde (EDUSCOL, 2019) à la lumière des éléments apportés dans cette présentation. Nous nous centrons sur les pages 6 à 8, consacrées à « Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel » avec la sélection des extraits suivants au fil de la lecture.

La première démonstration proposée dans cette ressource est équivalente à la preuve 1 en termes de dimensions organisatrice et opératoire. Dans l'extrait ci-dessous, le prérequis mentionné correspond à l'étape opératoire commune aux preuves 1 et 2 où l'on établit que les entiers a et b sont pairs. Plus précisément, il s'agit de la complexification de la dimension organisatrice avec l'apparition d'un raisonnement par contraposée pour démontrer l'implication « si le carré d'un nombre entier est pair alors l'entier lui-même l'est aussi » :

« Prérequis, motivation.

- Les élèves démontrent que le carré d'un nombre impair est impair. Ils en déduisent que si un carré est pair, alors le nombre est pair, par l'absurde. Ce résultat est utile dans la démonstration 1.
- […] »

Il est très regrettable qu'il y ait confusion entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée : « le carré d'un nombre impair est impair » renvoie à la contraposée de « si un carré est pair alors le nombre est pair » et non à un raisonnement par l'absurde. Le lecteur intéressé par une étude didactique de cette dimension organisatrice, en particulier pour des éléments d'étude institutionnelle relative au Lycée, pourra consulter (Bernard et al., 2018).

Nous poursuivons avec l'extrait suivant :

> « Différentes démonstrations possibles. Le professeur peut dans un premier temps exposer le principe du raisonnement par l'absurde : on pose que $\sqrt{2} = \frac{'}{)}$, avec $\frac{'}{)}$ fraction irréductible. On essaie d'aboutir à une contradiction. On remarque d'abord que l'hypothèse implique (# = 2) #.
> 1. On raisonne avec la parité : l'égalité (# = 2) # implique que ! ^{2} est pair, ce qui implique que (est pair (voir le premier prérequis) ; donc (= 2(' avec (' entier ; on en tire 4((')# = 2) #, donc $1^2 = 2(2')^2$, ce qui permet de déduire que) est pair lui aussi. Contradiction.
> […] »

Les différentes preuves envisagées dans cette ressource se limitent à un travail opératoire via le représentant irréductible de la fraction en jeu. Les auteurs ferment donc la porte à toute preuve dont la dimension opératoire ne spécifie pas l'objet fraction. Cette limitation du champ des possibles est d'autant plus regrettable que la preuve 4 en particulier, à haut pouvoir générique, est ainsi exclue d'office.

Le niveau 1 des différents niveaux de détail mentionnés en introduction de la ressource est spécifié :

> « Pistes de différenciation.
> - Proposer une des trois preuves, au choix, en donnant l'idée. Les élèves consignent dans leur cahier celle qui leur convient le mieux.
> - Tous les élèves peuvent s'approprier le raisonnement par l'absurde et se contenter du plan d'une des démonstrations (niveau 1).
> - Le niveau 1 (plan) La structure de la démonstration peut se formaliser ainsi, en dégageant le principe du raisonnement par l'absurde :
>   * supposer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ;
>   * déduire une relation (# = 2) #, où (et) sont des entiers non nuls premiers entre eux ;
>   * déduire des propriétés de (et) par l'une des trois méthodes ;
>   * aboutir à une contradiction. »

En tentant de centrer ce niveau 1 sur le raisonnement par l'absurde, des éléments propres à la dimension organisatrice et d'autres spécifiques à la dimension opératoire sont amalgamés. Contrairement à l'objectif visé, cela n'aide pas à dégager la structure de la démonstration qui selon nous relève spécifiquement de la dimension organisatrice. De plus, cet amalgame ne donne pas à voir la différence de nature du travail mathématique selon qu'il s'agisse d'une dimension ou d'une autre.

Enfin, lorsqu'il s'agit de proposer des prolongements à l'étude de la non-rationalité de $\sqrt{2}$, une véritable rupture épistémologique apparaît :

> Approfondissements possibles.
> - Étudier si $\sqrt{3}$ rationnel ou non, ou $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. Remarque : lorsque % n'est pas un carré, la première démonstration permet de démontrer que $\sqrt{\%}$ n'est pas rationnel, avec la décomposition en facteurs premiers et la divisibilité.
> - […] »

Car, comme nous l'avons montré dans notre analyse des preuves 1 à 4, la première démonstration (l'équivalent de la preuve 1) est étrangère au choix opératoire de travailler sur les entiers via leur décomposition en facteurs premiers. Ce choix opératoire correspond à la « characterizing property », au pouvoir générique en jeu ici, donc la première démonstration de cette ressource ne peut être une candidate judicieuse pour démontrer le résultat général.

Nous terminons en ouvrant sur la transition Lycée-Université avec le regret de ne pas retrouver pour la classe de Terminale l'invitation identifiée pour les classes de Première et Seconde quant à l'exploitation en classe de plusieurs preuves d'un même résultat mathématique. Le potentiel didactique des activités multi-preuves nous semble indéniable. Et, avec la préférence spontanée des élèves et étudiants pour les preuves génériques, des activités multi-preuves de type « generic proving » (Leron, Zaslavsky, 2013) sont à explorer.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1989). Epistémologie et didactique. Cahiers de l'IREM de Paris (3).

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2019) L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. XXVIe Colloque CORFEM, Jun 2019, Strasbourg, France. hal-02981131

Battie, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: between organizing and operative dimensions, in Lin F., Hsieh F.-J., Hanna G., De Villiers M. (Eds.) Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education (pp. 71-76). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, Recherches en didactique des mathématiques, 27(1), 9-44.

Battie, V. (2015). Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de terminale C&E au Gabon. Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques, 12.

Bernard, D., Gardes D., Gardes M.-L., Grenier D. (2018). Une étude didactique du raisonnement par l'absurde pour le Lycée. Petit x, 108, 5-40.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. Recherches en didactique des Mathématiques, 9(3), 309-336.

Durand-Guerrier, V. (2019) Travailler avec les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques. XXVIe Colloque CORFEM, Jun 2019, Strasbourg, France.

Gardes, M.-L. (2013). Etude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. Thèse de l'Université Lyon 1.

Glaeser, G. (1999). Introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. La Pensée Sauvage.

Hanna, G. & Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. Journal of Educational Research in Mathematics, Special Issue, 001-013. Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. The American Mathematical Monthly, 90(3), 174-184.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In (Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) 2018).

Hardy, G.-H., Wright, E.-M. (2007). Introduction à la théorie des nombres. Vuibert.

Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. The American Mathematical Monthly, 90(3), 174-184.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and method. For the learning of Mathematics, 15(3), 277-289.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. Educational Studies in Mathematics, 91(1), 37-53.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In Campbell, S. R., & Zazkis, R. (Eds.), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction (pp.157-183). Westport: Ablex Publishing.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. Philosophical Studies, 34, 135–151.

Stylianides, A. J. & Harel, G. (Eds.) (2018). Advances in mathematics education research on proof and proving. An international perspective. Springer.

Tall, D.O. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of √2. In Proceedings of PME 3 (pp.203-205). Warwick, UK: University of Warwick.