GENERER L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES RELATIFS AU SEIN D'UN PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE A PARTIR DE QUESTIONS MATHEMATIQUES QUI DONNENT DU SENS

Yves MATHERON, Karine BERNAD, Farida MEJANI, Sébastien VELON

Résumé. Aux dires des professeurs de Collège, l'apprentissage des nombres relatifs soulève des difficultés qui perdurent jusqu'en 3e, révélées notamment par l'usage des règles opératoires. Nous postulons que ces difficultés sont la manifestation d'obstacles créés par la construction d'un sens erroné à propos des relatifs. Il est porté par les activités des manuels scolaires (températures, altitudes, etc.) et les élèves ne parviennent pas à s'en départir. Notre proposition constitue une alternative dont nous évaluons l'impact.

Des difficultés récurrentes qui interrogent le sens mis par les élèves sur les relatifs

Traiter du sens est toujours risqué car ce terme renvoie à des concepts mal définis, comme celui de compréhension, que l'on associe souvent à des qualités personnelles, acquises ou non. Leur objectivation est délicate. Au mieux, l'expression publique du rapport privé d'une personne à la reconnaissance d'une tâche donnée comme appartenant à un type de tâches déjà rencontré peut-il être évalué. Il se manifeste par l'engagement plus ou moins bien réussi de cette personne dans la technique associée : roquer au jeu d'échec lorsque la situation le nécessite, effectuer un changement de variable pour intégrer une fonction, etc. Il arrive alors que l'évaluateur, le professeur ou toute autre personne, prononce un jugement relatif à la compréhension : « il possède, ou ne possède pas, le sens du jeu », « il a, ou n'a pas, compris » dira-t-on. Dans le cas de l'apprentissage des nombres relatifs, nous sommes partis du constat empirique maintes fois énoncé par des professeurs – « les élèves ne comprennent pas quand il faut ajouter l'opposé, ajouter ou soustraire des valeurs absolues ou utiliser la règle des signes » –, pour nous poser la question du sens que les élèves attribuent aux nombres relatifs et à leurs opérations ; pour y répondre, tenter un autre type d'enseignement.

S'ils identifient sans doute des nombres relatifs dans des tâches de calcul simples comme le calcul de 5 – (-2), ou plus complexes, écrites 5 – (-2) × (+4) + (-7) en respectant l'écriture standard rencontrée dans les manuels, des élèves ne savent trop qu'en faire ; autrement dit ne savent à quelles techniques de calcul recourir. Ainsi 5 – (-2) est-il souvent déclaré égal à 3, tandis que l'engagement dans le deuxième calcul aboutit à diverses propositions. Dans le premier calcul, l'écriture ostensive d'une différence conduit certains des élèves vers la technique élémentaire qu'ils connaissent bien, donnant le résultat de la différence 5 – 2 en négligeant pour cela le signe du second terme. Ce qui « simplifie » l'appel mémoriel personnel à la technique adéquate, d'autant plus que dans un calcul comme 5 + (-2), perçu à juste titre comme une addition, il faut calculer… la différence 5 – 2. Dans les deux cas, discriminer entre les règles de calcul de sommes, différences ou produits apparaît d'une redoutable difficulté. Finalement, on peut s'interroger sur le sens que les élèves attribuent à de tels calculs scolaires et, plus précisément, aux nombres relatifs. Quels rapports ont-ils pu y établir à partir de la manière dont cela leur a été enseigné ? Avant toute chose, comment l'enseignement ordinaire organise-t-il la rencontre et le travail des élèves avec ces « nouveaux nombres » ?

L'impasse des métaphores s'appuyant sur les grandeurs et la confusion des sens

Avec l'arrivée des entiers négatifs disparaît l'identification possible au cardinal d'une collection qui confère un certain sens aux entiers naturels. Le recours au cardinal, en tant que mesure d'une grandeur (le nombre d'éléments d'un ensemble) était déjà devenu difficile lors de l'identification des fractions à la partition ou à la commensuration. Cependant, il était encore possible d'associer la fraction à la mesure d'une grandeur : la longueur par exemple. Certains auteurs des manuels actuels du secondaire pensent résoudre le problème du sens initial à conférer aux relatifs chez les élèves en commençant par « donner du sens » aux négatifs à travers la mesure d'autres grandeurs : les températures, les profondeurs, « les étages d'ascenseur »…

Mais c'est alors repousser l'obstacle à plus tard, au moment où l'on enseignera les opérations sur les relatifs. Ces grandeurs sont en effet des grandeurs que l'on qualifie de « repérables », au contraire des grandeurs « mesurables ». La mesure de ces dernières, positive ou infinie et non pas négative, vérifie la propriété d'additivité : si $A \cap B = \varnothing$, alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Ce n'est pas le cas des grandeurs repérables, éventuellement associées à des négatifs. Une conséquence importante en découle : on ne peut pas opérer sur ces grandeurs, c'est-à-dire les ajouter, soustraire, multiplier, etc. Par exemple, considérant la grandeur « température », il est évidemment possible de comparer deux températures en comparant la hauteur d'une colonne d'alcool dans un thermomètre, et donc de dire si elles sont égales ou si l'une est inférieure à l'autre. Néanmoins, il est impossible d'ajouter les températures, de les soustraire (sauf à calculer leur variation, mais il s'agit alors d'une autre grandeur, comme dans le cas d'un déplacement sur une droite graduée) ou de les multiplier. Additionner des températures n'a pas de sens : lorsqu'on mélange deux liquides, en tant qu'« objets » pourtant deux à deux disjoints, le mélange, réunion des deux liquides, n'a pas pour température la somme des températures !

Le recours à la droite graduée s'appuie encore sur une grandeur seulement repérable et non pas mesurable, construite à partir des nombres que l'on nomme abscisses de points. Si l'on souhaite opérer à partir de cette grandeur, après qu'on a au préalable défini l'abscisse d'un point sur une droite, il est nécessaire d'en définir, et d'en enseigner, une autre : « le déplacement sur une droite » en tant que translation de vecteur dont la norme, qui donne la valeur absolue, indique la distance des deux points et dont le sens donne le signe. Mais le dit-on ? De même que sont passés sous silence la direction du vecteur et le fait que l'on travaille ainsi diverses translations sur les points d'une droite à partir des différences d'abscisses. Prédomine un implicite sur les changements de cadres (géométrique, numérique, de grandeur), lourd d'obstacles à venir, notamment lorsqu'il faudra multiplier deux relatifs.

La métaphore qui consiste à utiliser cette nouvelle grandeur, qu'on pourrait appeler « grandeur déplacement sur une droite », fonctionne à peu près bien auprès d'un nombre significatif d'élèves pour ce qui concerne l'addition : on compose des translations de points d'une droite. Elle se complexifie pour la soustraction (il faut changer le sens du déplacement indiqué par le signe du deuxième nombre) et se constitue en obstacle pour la multiplication des relatifs. En effet, la « grandeur déplacement » ainsi construite est une grandeur de dimension 1, or le produit de deux objets relevant de cette « grandeur » devrait être associé à une grandeur de dimension 2. Pour tenir compte de ce problème, des artifices didactiques que l'on trouve dans certains manuels, ont été proposés. Dans un repère orthonormé du plan, une fois que l'on a défini (comment ?) et que l'on a associé le produit de deux positifs à des points du premier quadrant, qu'on a fait de même pour le produit d'un négatif par un positif associé à des points du quatrième quadrant (respectivement le deuxième), on postule que par symétrie centrale (pourquoi ?) les produits doivent être négatifs dans le deuxième quadrant (respectivement le quatrième) et positifs dans le troisième ; ce dernier correspondant au produit de deux négatifs. Cette métaphore géométrique soulève de nombreuses questions auxquelles les adeptes de cette technique didactique n'apportent pas de réponse ; il suffit de croire ce que dit le professeur. Or la croyance est assez éloignée de la démarche scientifique à laquelle on attend que l'École acculture les élèves. Leur docilité à accepter parfois une telle « pseudo-explication » de la règle des signes ne signifie pas qu'ils ne se posent des questions à propos de tels mystères ayant conduit à de tels résultats. Certains finissent par se dire qu'en mathématiques, décidément, il suffit de faire car il n'y a rien à comprendre…

La difficulté d'enseignement se trouve dans les mathématiques

L'usage très répandu des relatifs dans la culture contemporaine – tout un chacun a rencontré les températures en degrés Celsius du bulletin météorologique, possède ou connaît une personne ayant un compte en banque qui peut être « dans le rouge », donc négatif –, pousse les auteurs de manuels, et avec eux les professeurs dont les manuels constituent l'une des principales ressources, vers une transposition didactique pour les relatifs qui s'appuie sur des usages sociaux connus des élèves. Il existe une difficulté d'enseignement à propos des relatifs et l'usage des métaphores la renforce. On sait que celle consistant à associer le nombre zéro à « rien » avait déjà conduit Lazare Carnot à émettre des affirmations contestables, en utilisant lui-même le peu scientifique verbe « concevoir » :

> « Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? »

Si difficulté d'enseignement il y a concernant les relatifs, ce qui est le cas, celle-ci prend racine dans les mathématiques (savantes) elles-mêmes, et réside dans la construction de l'anneau $(\mathbf{Z}, +, \times)$; plus précisément, et dès le début du processus, dans la construction de $\mathbf{Z}$ à partir de $\mathbf{N}$. Le problème d'enseignement renvoie ainsi au choix de la transposition didactique à effectuer, en tenant compte du fait que la construction classique de $\mathbf{Z}$ repose sur les notions de relation et de classes d'équivalence. Ces deux notions, autrefois enseignées dès le Collège, ne sont plus explicitement au programme, même si les élèves les rencontrent « en acte » : par exemple à propos de fractions équivalentes ou de vecteurs égaux. Le professeur indique que « c'est la même fraction ou le même vecteur », alors que les élèves ont sous les yeux deux écritures fractionnaires constituées à partir de nombres différents ou encore, pour représenter deux vecteurs, des points du plan « origines et extrémités des flèches » tout à fait distincts, et donc logiquement désignés différemment. Le savoir mathématique n'est pas enseigné, dans ce cas la notion de relation d'équivalence pour des couples et les classes d'équivalence ainsi construites, mais l'objet est utilisé sans qu'il soit, non plus, identifié en tant que tel.

Dans un article ancien (1988), Guy Brousseau rendait compte d'une ingénierie relative à l'enseignement du sens de la division. Il indiquait que l'enseignement du sens soulevait diverses questions :

> « 1°) Comment provoquer la mise en œuvre pertinente et fonctionnelle des connaissances (l'aspect implicite de la compréhension)
> 2°) Comment gérer (accepter/rejeter, ignorer...) assumer et négocier (avec les élèves et le public) les erreurs provoquées par ce fonctionnement
> 3°) Comment reprendre en cours d'apprentissage un savoir fonctionnel et donc "mal fait" » […]

Pour le didacticien engagé dans la construction d'une ingénierie de développement visant l'étude des conditions de possibilité d'une amélioration d'un enseignement des mathématiques au sein du système, il s'agit de trouver une situation dévolue aux élèves qui permettent de faire rencontrer la notion sans que le sens qu'ils vont construire à son propos ne se constitue ultérieurement en obstacle. Autrement dit, il s'agit de s'affronter aux questions identifiées par Guy Brousseau pour y apporter des réponses, tout en tenant compte des contraintes systémiques induites par le programme : pour les relatifs, l'absence des notions de relation et de classe d'équivalence.

Si l'on reprend dans l'ordre les trois points mis en exergue par Guy Brousseau, il est tout d'abord nécessaire de trouver une situation fondamentale ou une question génératrice qu'on pourra dévoluer aux élèves, donc qui engage des connaissances dont ils disposent, mais qui leur fasse éprouver la nécessité « pertinente et fonctionnelle » des nombres relatifs ; ce que Guy Brousseau appelle « l'aspect implicite de la compréhension ». Il faudra ensuite négocier les erreurs provoquées par cette nouvelle connaissance, notamment celles provoquées par le double saut épistémologique que devront accomplir les élèves : l'un consiste à travailler sur des nombres en tant que classes d'équivalence, l'autre à opérer sur des nombres qui ne peuvent être associés à des mesures de grandeurs. Il faudra enfin reprendre, au cours du processus, un « savoir mal fait », parce qu'issu d'une transposition didactique qui, même au prix d'une certaine vigilance épistémologique, ne peut réduire complètement la distance qui le sépare du savoir savant.

Un Parcours d'Etude et de Recherche sur les nombres relatifs

Lorsqu'elle est utilisée pour concevoir des ingénieries de recherche et de développement, la notion de Parcours d'Etude et de Recherche (PER) permet d'organiser *a priori* les réponses aux trois questions évoquées par Guy Brousseau concernant un possible enseignement du sens ; plus modestement, concernant une certaine vigilance épistémologique autorisant la mise en place de conditions didactiques favorables à l'évitement de la constitution d'obstacles chez les élèves.

Comme on sait, et sans entrer plus avant dans les détails (on se reportera pour cela à Chevallard, 2009), le terme « Parcours » renvoie à la volonté d'éviter un découpage du savoir du programme en diverses parties, les chapitres, apparaissant disjointes aux yeux des élèves. On souhaite éviter ainsi ce qui peut leur apparaître comme une absence de liens, et donc une absence de cohérence d'ensemble des mathématiques enseignées au niveau d'un secteur ; dans notre cas, le secteur de l'algèbre. Les termes « Étude et Recherche » renvoient à la volonté d'engager la classe dans la recherche de réponses à des questions qui lui sont dévolues, qu'elle étudiera parce qu'elle les aura rencontrées comme des nécessités et dont elle éprouvera la validité des réponses. La mise en place d'un parcours s'étalant sur plusieurs mois, voire sur plusieurs années, et la nécessité de valider les réponses construites par la classe, offrent la possibilité d'une négociation des erreurs et d'une reprise d'un « savoir mal fait » ; les deux derniers points de la citation de Guy Brousseau. Dans un PER, les élèves ont donc, sous la direction d'un professeur, la responsabilité d'étudier, de travailler, de rechercher et de progresser dans le savoir sur une période beaucoup plus longue que lors de l'enseignement, souvent d'un bloc, d'un seul chapitre.

Au départ existe une situation ou encore une question génératrice dont la recherche de réponse est dévolue à la classe. Il s'agit de se servir du milieu des connaissances antérieures et stabilisées des élèves pour donner du sens à la question et les engager dans la recherche. Son déroulement conduit à apporter une ou des réponses qui peuvent être partielles, ou encore qui peuvent susciter de nouvelles questions. L'enrôlement des élèves s'appuie sur la nécessité de trouver une technique plus économique pour la tâche problématique portée par la question génératrice. Génératrice, dans le sens où elle va générer l'entrée dans le parcours sur les nombres relatifs, la question est la suivante : ***Q : « Comment simplifier un programme de calcul du type : " à un nombre, on ajoute un second puis on soustrait un troisième " ? »***

Celle-ci n'est évidemment pas proposée telle quelle à la classe, mais rencontrée à partir de tâches que les élèves connaissent mais qui, en jouant sur la variable didactique constituée de la taille des nombres, deviennent problématiques. Ainsi leur propose-t-on les tâches t_i telles que celles-ci : « calculer mentalement 2016 + 478 – 477 ou 2016 + 478 – 479 ». Sans le recours à l'écriture du calcul, réaliser correctement ces tâches est difficile pour des élèves en début de 5e. Ils n'ont guère appris qu'un calcul dans lequel il n'y a que des additions et des soustractions se mène dans le sens de l'écriture, de gauche à droite. Les élèves savent contractuellement que lorsqu'une tâche problématique de cette nature leur est proposée, on attend d'eux qu'ils utilisent, pour la résoudre, leurs connaissances antérieures et leur métis (leur ruse) et que la réponse constituera le savoir visé attendu. Après quelques minutes de recherche, constatant qu'ils éprouvent des difficultés pour mener à bien ce calcul, l'observation attentive des termes du calcul demandé les conduit assez facilement à percevoir qu'existe une différence de 1 entre les deux derniers termes et à s'en servir. Ils proposent alors d'ajouter ou de soustraire 1 au premier nombre.

Ils se sont ainsi engagés dans un moment didactique relatif à la constitution d'une technique que l'on pourrait décrire de la manière suivante. ***Technique*** : « pour calculer mentalement dans des tâches de ce type, il suffit de calculer la différence des deux derniers termes et de l'ajouter ou de la soustraire au premier. » Le professeur demande alors de justifier mathématiquement que cette technique est mathématiquement cohérente : « a-t-on le droit de faire ainsi ? » Diverses réponses sont données par les élèves. Elles reviennent à user de la décomposition additive d'un nombre et d'une associativité « en acte », comme dans : 2016 + 478 – 479 = 2015 + (1 + 478) – 479 = 2015 + 0 – 0 = 2015. Les élèves se sont ainsi engagés dans un îlot déductif, ou encore dans un moment ***technologique*** permettant de justifier et produire la technique. Il est alors opportun de conclure cette phase par un moment d'institutionnalisation locale. Ayant sollicité les élèves pour dresser le bilan du travail mené, le professeur met en ordre au tableau les propositions données : **Conclusion : « ajouter 478 à un nombre puis lui soustraire 479 revient à soustraire 1 ».**

On continue l'exploration des tâches du même type pour conclure dans un second temps : « **Les programmes de calcul +478 – 479 ; +3 – 4 ; +7,5 – 8,5, etc. sont équivalents et on les note -1 : +478 – 479 = +3 – 4 = +7,5 – 8,5 = -1.** »

Il existe donc une infinité de programmes de calcul qui équivalent à -1. L'organisation mathématique de référence que nous avons construite consiste à considérer les nombres relatifs comme des classes d'équivalence. Didactiquement transposée, elle engage à travailler sur des polynômes du type $P(x) = x + b - c$, où x, b et c sont des entiers naturels. La simplification du calcul dans ce polynôme conduit à transformer $+ b - c$ en opérateur additif que l'on identifie à un nombre relatif[1]. Au cours des stages de formation continue que nous organisons, aussi bien dans le cadre de l'IFE que dans celui de l'IREM d'Aix-Marseille, il est fréquent que l'on nous demande pourquoi faire travailler les élèves sur des programmes de calculs ? Cette question, légitime, renvoie à des phénomènes d'oubli propres au système éducatif, plus particulièrement au système d'enseignement des mathématiques. Formulée par des sujets d'une telle institution – des professeurs –, elle n'en constitue qu'un révélateur. La réponse, si l'on se réfère à une histoire et une épistémologie de l'algèbre élémentaire, tient au fait que les nombres relatifs, nommés « nombres algébriques » jusqu'au début du XXe siècle, relèvent de l'algèbre, et que celle-ci, lorsqu'on met à distance une vision structuraliste *a posteriori* portée par les « mathématiques modernes », est historiquement née comme science

---

[1] On trouvera un développement mathématique et didactique plus approfondi de notre proposition à l'adresse suivante : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-entree-dans-l-algebre-par-les-nombres-relatifs/

des calculs sur les programmes de calcul. On retrouve l'exposé de la fonctionnalité première assignée à l'algèbre élémentaire dans les Élémens de Clairaut (1760) : l'une des raisons d'être de l'algèbre tient à la résolution « sans répétition » des problèmes qui, antérieurement, sollicitaient de longs programmes de calculs. L'algèbre élémentaire permet donc de réaliser d'importantes économies dans le calcul. C'est cette fonction que l'on fait éprouver « en acte » par les élèves lorsqu'on les engage dans l'étude des nombres relatifs. On continuera à la faire vivre tout au long du cycle 4 : à travers la nécessité des expressions polynômiales comme modèles de programmes de calcul, dans la résolution d'équations et d'inéquations, dans l'étude des variations de programmes de calcul algébrisés, autrement dit au seuil de l'étude des fonctions.

De la question génératrice aux diverses questions cruciales qui en découlent, moteurs de l'avancée du temps didactique

Le professeur peut alors apporter une nouvelle notation qui soutient le travail mathématique dans lequel sont engagés les élèves et ouvre la voie à l'institutionnalisation de la définition des nombres relatifs. Puisque la réponse a été apportée à la question générant l'entrée dans l'étude des nombres relatifs, on institutionnalise à la fois l'économie procurée – il n'est d'ailleurs plus nécessaire d'écrire le premier nombre du calcul, la variable x du polynôme – et la notation qui désigne cette économie : un nombre entier dont l'écriture est précédée d'un signe + ou – et qui est un opérateur additif. On note ainsi et temporairement : ….+ 7 – 10 = … – 3 ; … + 8 – 6 = … + 2 ; etc.

L'idée qui émerge après le travail de la technique consistant à trouver l'opérateur additif résumant le programme de calcul, est soit portée par quelques élèves, soit amenée par le professeur. Elle prend la forme d'une nouvelle question, cruciale : « ***Que se passe-t-il si on compose ces opérateurs ?*** » Par exemple : – 3 + 2 qui revient à soustraire 3 à un nombre puis lui ajouter 2 ? Et + 2 – 3 = ? – 5 + 5 – 1= ; + 7 – 4 – 3 = ; etc. Autrement dit, « en oubliant » le premier nombre, la variable x de $P(x) = x + b – c$. Un nombre important de calculs de ce type est donné. Ainsi l'idée se fait jour que ces entités, des opérateurs additifs, se comportent un peu comme des nombres. On a alors tendance à oublier le sens qui leur était primitivement donné. A ce processus, classique en mathématiques et en algèbre, Anna Sfard (1991) a donné le nom de « réification » :

> 1. C'est seulement quand une personne atteint la capacité à concevoir une notion comme un objet à part entière que nous dirons que le concept a été réifié. La réification est donc définie comme un changement ontologique –une soudaine capacité de voir quelque chose de familier sous un jour totalement nouveau. 2. Voir une entité mathématique comme un objet, c'est être capable de se référer à elle comme si elle était une chose réelle–une structure statique, existant quelque part dans l'espace et le temps. Cela signifie également être capable de reconnaître l'idée « d'un coup d'œil » et de la manipuler comme un tout, sans entrer dans les détails. 3. Sans la capacité à donner quelque explication aux procédures formelles algébriques, les élèves sont peu susceptibles d'être en mesure de faire face soit à des questions non standard, soit à des idées algébriques plus avancées qui seront introduites dans l'avenir, au moins à certains d'entre elles.

Une nouvelle question cruciale mérite alors d'être posée : ***« Si ces entités étaient effectivement des nombres, qu'est-ce qu'on pourrait faire avec ? Pour cela, recherchons ce que c'est qu'un nombre, à quoi ça sert, ce qui se fait avec des nombres. »*** Les élèves répondent que l'on effectue des opérations sur les nombres, qu'on les compare. Lorsque le professeur demande de « fabriquer » de telles opérations avec des opérateurs désignant l'ajout ou la soustraction de 2 et 7, les élèves proposent des écritures telles que : 7 + (-2) ; 7 – (-2) ; 7 + (+2) ; 7 – (+2) ; -7 + (+2) ; -7 + (-2) ; etc. Ces écritures renvoient à des tâches problématiques : comment construire une addition et une soustraction pour calculer sur ces entités ? L'identification des positifs à leur valeur absolue, qui a été justifiée lorsque l'on a calculé sur ces entités, et l'assimilation du + de l'opérateur positif à une addition (respectivement du – à une soustraction) amènent les élèves à calculer sans peine 7 + (+2) ; 7 – (+2) ; -7 + (+2). On a en effet : 7 + (+2) = 7 + 2 = 9 (ou +9) ; 7 – (+2) = 7 – 2 = 5 (ou +5) ; -7 + (+2) = -7 + 2 = -5. Mais qu'en est-il pour un calcul comme 7 + (-2) ? C'est une nouvelle question cruciale dévolue à la classe. Si des réponses sont spontanément apportées par des élèves – qui donnent pour résultats 5, 9 ou -9 –, celles-ci sont mises au débat mathématique en classe ; autrement dit à l'apport d'une justification mathématique pour le résultat annoncé. Une fois de plus, les techniques antérieurement utilisées sont rappelées en mémoire par certains élèves. Il suffit de décomposer additivement : 7 + (-2) = 5 + 2 + (-2). L'écriture ostensive 2 + (-2) pousse les élèves à affirmer que cette somme est nulle. C'est une nouvelle affirmation qui mérite d'être démontrée ; d'où une nouvelle question cruciale : ***« Est-ce que 2 + (-2) = 0, et au-delà, est-ce que la somme de deux nombres opposés, si tant est que ce soit des nombres, ce qui ne fait à ce moment plus guère de doute dans la classe, est nulle ? »***

La proposition que nous avons élaborée, qui contient le déroulé de l'ingénierie didactique dont ne pouvons exposer que quelques prémisses dans ces lignes, est enseignée dans des classes « bien réelles » depuis presque une dizaine d'années. Elle se trouve dans le document en ligne mentionné en note de bas de page 1 auquel le lecteur curieux pourra se reporter. On imagine sans peine les autres questions cruciales à examiner qui constituent autant de moteurs de l'avancée du temps didactique ; ou plutôt, d'un temps qu'on pourrait désigner comme temps de l'étude porté par la recherche. Les réponses à ces questions constituent une partie des mathématiques du programme : définitions de l'addition, de la soustraction, de l'ordre, du produit et du quotient de deux relatifs. A la différence de l'ordinaire de l'enseignement tel qu'on l'observe dans les classes, et qui n'a guère pour support qu'une adaptation d'activités trouvées dans les manuels, ces parties du programme, souvent considérées comme des techniques à apprendre – et vues par nombre d'élèves comme étant par conséquent sans comprendre – ont été rencontrées par les classes et explorées comme d'authentiques réponses mathématiquement justifiées, à des questions portées par des recherches collectivement assumées. Les conditions sont alors réunies pour que ces techniques opératoires prennent du sens pour un nombre significatif d'élèves.

Conclusion

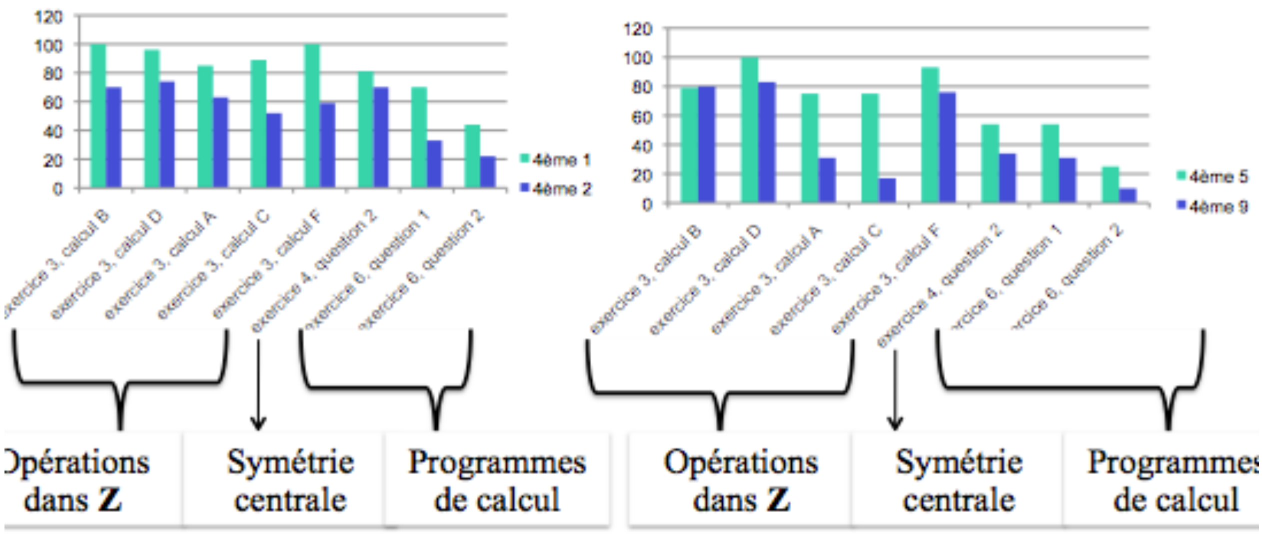
L'exemple d'un PER dont la description ne peut être ici que sommairement ébauchée s'inscrit dans un ensemble plus vaste de PER couvrant des parties du programme du cycle 4. Outre l'enseignement des nombres relatifs, il s'agit de l'enseignement de l'algèbre sur tout le cycle, d'une reprise de l'ingénierie de G. et N. Brousseau « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » pour enseigner le produit d'un entier par une fraction et le produit de deux fractions, des cas d'égalité des triangles débouchant sur l'étude des isométries du plan et leur utilisation, du théorème de Thalès en lien avec l'homothétie et la similitude.

La conception de PER ne peut être une entreprise solitaire, menée par des professeurs isolés. On touche en ce point à l'organisation du métier de professeur vu le plus souvent comme relevant d'un exercice solitaire, au sein duquel quelques-uns, plus doués que d'autres, auraient inventé ou se seraient appropriés de « bonnes pratiques » qu'il faudrait alors imiter. Changer l'enseignement courant pour aller vers un autre type, très différent car bâti sur l'engagement des élèves dans des recherches aboutissant aux mathématiques du programme en tant que réponses, suppose que l'on se départisse de ces idées venues d'une forme de romantisme éducatif.

Il faut en effet au préalable, et pour concevoir des PER, mener une enquête de nature épistémologique sur le savoir à enseigner : d'où vient-il, quelles sont les questions que les Hommes se sont posées et qui l'ont engendré ? Des réponses doivent être apportées à des questions didactiques : peut-on transposer les questions qui sont autant de raisons d'être du savoir et sinon, au sein des contraintes de programme et compte tenu des connaissances antérieures des élèves, peut-on trouver des questions à l'origine du savoir et qui puissent être investies par les élèves ? Une fois la question génératrice élaborée, porteuse d'au moins une tâche problématique, vers quelles questions cruciales qui impulseront une dynamique au processus de recherche, a-t-elle des chances de conduire ? Quelles sont les difficultés internes aux mathématiques qu'on enseigne (les obstacles épistémologiques liés aux modélisations) et quelles sont les difficultés que l'on rencontrera au plan didactique (comment diriger une recherche par les élèves) ?

Ces questions apparaissent cruciales au moment où les évaluations des connaissances mathématiques des élèves, qu'elles soient nationales (CEDRE) ou internationales (TIMSS, PISA), montrent qu'une importante proportion d'une classe d'âge échoue en mathématiques ; et cela dès le cours moyen. Si des raisons de nature sociale ne peuvent être écartées, des causes explicatives de cette situation peuvent aussi être trouvées dans la manière dont les mathématiques sont enseignées. Donner les moyens de résoudre les questions énoncées dans le paragraphe qui précède nécessite de s'attaquer sérieusement à la formation professionnelle enseignante afin qu'existent dans les classes des conditions grâce auxquelles apprendre des mathématiques retrouve du sens chez les élèves. On le voit, on touche alors à l'organisation du système et à la nature du métier d'enseignant.

Enseigner sous forme de PER a-t-il des chances d'améliorer l'apprentissage des élèves ? Nous donnons pour conclure quelques résultats tirés de l'évaluation de classes après enseignement sous forme de PER. Elles ont été au préalable appariées à l'issue d'un pré-test. Les classes de 4^{e} 1 et 4^{e} 2 sont des classes fortes à l'origine de même niveau ; les classes de 4^{e} 5 et 4^{e} 9 sont des classes révélées moyennes à faibles selon les mêmes modalités en pré-test. En vert et pour les bâtons situés à gauche, les classes enseignées par PER de 4^{e} 1 et 4^{e} 5 ; en bleu et pour les bâtons situés à droite les classes témoins de 4^{e} 2 et 4^{e} 9. La réussite est évaluée en pourcentage. Ces quatre classes de 4^{e} sont testées en septembre sur une partie du programme enseigné l'année scolaire précédente en 5^{e}. Leur composition en 4^{e} est celle qui était la leur en 5^{e} ; cette clause est constitutive de l'engagement de l'administration du Collège dans l'expérimentation.



Les items évalués étaient les suivants :

- pour les nombres relatifs, les calculs suivants : A = -6 – (-5) = ; B = 7 + (-4) = ; C = 8 – (-3) = ; D = -10 + 3 = ; E = -1 – 5 = ; F = -3 + 5 – 4 =
- placer le symétrique d'un point par rapport à un autre sur une figure où les deux sont donnés
- pour les programmes de calcul, écrire sous forme d'expression algébrique un programme de calcul écrit en français, et comparer deux programmes de calcul

Bibliographie

Brousseau, G. (1988). *Représentations et didactique du sens de la division*. http://guy-brousseau.com/2593/representations-et-didactique-du-sens-de-la-division-1988/. Consulté le 18 février 2017

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER. Problèmes et avancées.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161. Consulté le 18 février 2017

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques, une approche didactique à caractère anthropologique*, Presses Universitaires de Rennes

Sfard, A. (1991). *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, No. 1 (Feb., 1991), pp. 1-36