LA GEOMETRIE DANS LE CADRE REPERE : UNE OCCASION DE TRAVAILLER LES LIENS ENTRE OBJETS GEOMETRIQUES, GRANDEURS ET NOMBRES

Aurélie Chesnais, Aurélien Destribats, Sophie Dutaut, Elodie Herrmann

Résumé. Dans la continuité des travaux du groupe IREM didactique de Montpellier, nous présentons dans ce texte une analyse des difficultés et des propositions d'enseignement concernant la construction de l'objet mathématique « repère cartésien » au collège, en vue de l'entrée dans la géométrie repérée au lycée.

Introduction

Les travaux menés au sein du groupe didactique de l'IREM de Montpellier depuis trois ans nous ont amenés à nous intéresser aux difficultés d'enseignement et d'apprentissages liées à la notion d'équation de droite, notamment comme objet emblématique de l'entrée dans la géométrie repérée en seconde. Nous avons pu identifier des pistes d'explication quant aux difficultés rencontrées par les élèves et les enseignants (cf. Cerclé et al., 2016).

L'une de nos hypothèses est que le repère cartésien n'est pas suffisamment *construit en tant qu'objet mathématique* au collège. Nous nous intéressons notamment à l'articulation des nombreux éléments issus de cadres différents qui le constituent : objets de nature géométrique comme le point, la droite, et des relations entre ces objets – alignement, parallélisme, perpendicularité… ; les nombres réels en lien avec la notion de grandeur : dans un repère orthonormé, l'abscisse d'un point (au signe près) est un nombre réel représentant la distance de ce point à l'axe des ordonnées ; enfin, des relations algébriques entre abscisse et ordonnée, caractérisant un objet géométrique, comme des équations, également liées à des fonctions.

La notion de demi-droite puis droite graduée (introduites en CM2 puis $6^{ème}$ et $5^{ème}$) préparent le travail sur le repère cartésien, introduit en cinquième. En troisième, le repère cartésien est un objet supposé connu des élèves, mais notre hypothèse est qu'il n'est pas maîtrisé au-delà de tâches relativement limitées, de l'ordre de la lecture graphique s'apparentant davantage à la « bataille navale » qu'à un travail mathématique. Ainsi, nous supposons que les différents composants du repère cartésien ne sont pas explicitement travaillés et que l'articulation des objets de différente nature n'est pas tout à fait établie à l'entrée en seconde, encore moins fonctionnelle. Or la présence de chacun des cadres mobilisés ainsi que leur articulation comportent des spécificités qui peuvent devenir des obstacles à un travail mathématique dans le repère cartésien. Notre travail précédent (Cerclé et al., op. cité) nous a ainsi permis d'identifier différentes problématiques : par exemple celles liées au fait qu'une droite est constituée d'une infinité de points, que chaque point du plan est entièrement déterminé par un couple de nombres réels, (eux-mêmes pouvant être interprétés comme mesures d'une grandeur) ; le fait de considérer des courbes représentatives de fonctions implique aussi la difficulté de l'articulation des registres de l'écriture algébrique et du graphique.

C'est pourquoi nous nous intéressons ici à la façon dont cet enjeu d'enseignement – la construction du repère cartésien en tant qu'objet mathématique – est pris en charge au collège. Nous proposons dans cet article de présenter tout d'abord des éléments concernant les programmes scolaires du collège (programmes de 2008, MEN 2008 et de 2015, MEN 2015) en lien avec les enjeux pointés ci-dessus, puis une exploration rapide de quelques manuels à propos de la droite graduée en cinquième (en lien avec la notion de nombres relatifs). Nous proposons ensuite de rendre compte de l'élaboration et l'expérimentation en classe d'une situation d'enseignement en troisième à propos de la relation entre fonctions linéaires, proportionnalité et géométrie, enfin de l'expérimentation de situations liées aux fractions en lien avec la demi-droite graduée en sixième.

Étude des programmes scolaires concernant la notion de repère cartésien

La réforme de 2015 instaurant des nouveaux programmes pour le collège (cycle 3 pour le cours moyen et la sixième, cycle 4 pour les classes de cinquième, quatrième et troisième), nous nous sommes intéressés à tous les éléments qui nous semblent en lien avec les enjeux cités ci-dessus et susceptibles d'éclairer les choix de l'institution par rapport à la construction de l'objet « repère cartésien » au collège. Nous nous appuyons également sur les précédents programmes (MEN, 2008) pour éclairer les choix qui semblent faits.

L'un des premiers éléments qui nous semble important est l'insistance portée dans ces nouveaux programmes à la question des *registres de représentation* et de leurs articulations.

Quelques exemples :

Dans les repères de progressivité, à propos de la proportionnalité : « La proportionnalité doit être traitée dans le cadre de chacun des trois domaines « nombres et calculs », « grandeurs et mesures » et « espace et géométrie ». » (p. 214) puis « Les activités autour de la proportionnalité prolongent celles du cycle 3. Au fur et à mesure de l'avancement du cycle, les élèves diversifient les points de vue en utilisant les représentations graphiques et le calcul littéral. En 3è, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème. » (p. 375).

Dans la partie « Nombres et Calculs » (p. 371) :

Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre.	Rencontrer diverses écritures dans des situations variées (par exemple nombres décimaux dans des situations de vie quotidienne, notation scientifique en physique, nombres relatifs pour les mesurer des températures ou des altitudes). »

Enfin, dans le document d'accompagnement intitulé « Organisation et gestion de données, fonctions » :

> « **Changement de cadre**.
> L'étude des fonctions se prête particulièrement à un travail sur les compétences « représenter » et « modéliser ». À cet effet, il est pertinent de proposer des situations permettant des changements de cadre : tableau/graphique, formule/graphique, etc. »

Par ailleurs, notamment au cycle 3 (dans les nouveaux programmes, MEN 2015), on note une insistance sur le fait que les nombres sont des mesures, en particulier à propos des fractions et des nombres décimaux :

> Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi- droite graduée. (p. 201)

En dehors de ces éléments, il nous semble que les enjeux liés à la construction du repère cartésien et mentionnés précédemment sont très peu présents dans les programmes. En particulier, le repérage sur la droite graduée est évoqué dans les programmes comme « mode de représentation des nombres » (par exemple p. 77 à propos des relatifs au cycle 4) et la notion de repère cartésien comme objet mathématique est tout simplement absent des programmes.

Si l'on compare avec les programmes précédents, il semble même que les enjeux d'enseignement qui nous intéressent sont moins explicites actuellement. Par exemple, le programme de cinquième précédent mentionnait comme enjeu : « interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine » (MEN, 2008, p. 20), et « Déterminer la distance entre deux points d'abscisses données » (ibid.). Or, ces deux éléments ne figurent plus dans les nouveaux programmes. De même, on trouvait en troisième l'idée de « connaître et utiliser la relation y=ax entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire x -> ax. » (ainsi que son équivalent pour les fonctions affines), mais ces deux éléments ne font plus partie des programmes de collège de 2015.

Toutefois, malgré une absence de pointage explicite de ces enjeux, ils nous semblent sous-jacents à un certain nombre d'autres objectifs des programmes. Par exemple, si l'on considère la phrase suivante

> Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite. (MEN, 2015, p. 375)

On peut supposer que cela nécessite de travailler sur l'articulation entre les objets géométriques (droites), les grandeurs et leurs mesures, ainsi que les fonctions et leurs expressions algébriques. De même, un des ajouts des nouveaux programmes nous semble particulièrement lié aux enjeux que nous pointons, même si ces derniers ne sont pas explicités : il s'agit de la mention :

> En 3e, […] faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties […]. (Ibid., p. 375)

Nous montrerons plus loin comment nous proposons de nous emparer de cet enjeu, en lien avec des préoccupations liées à la construction du repère cartésien.

Droite graduée et nombres relatifs en cinquième

Nous proposons dans cette partie de montrer comment les programmes évoquent les enjeux liés au repérage en lien avec le thème des nombres relatifs, puis nous montrons à partir d'une étude rapide de onze manuels de cinquième et d'un exemple de production d'un enseignant stagiaire les difficultés et les enjeux du lien entre objets géométriques et numériques dans le cadre du repérage.

Le travail sur les nombres relatifs en cinquième était explicitement relié, dans les programmes de 2008, avec « la possibilité de graduer entièrement la droite, puis de repérer le plan » (MEN, 2008, p. 22). Dans les programmes de 2015, ne persiste que le fait qu'il existe diverses représentations des nombres (notamment le repérage sur la droite graduée) et que l'enjeu est de construire des liens entre les différentes représentations.

Le thème des nombres relatifs constitue donc en cinquième une opportunité de poursuivre la construction du lien entre objets numériques et géométriques, via les grandeurs et mesures, en travaillant sur la droite graduée et le repère cartésien. En particulier, l'un des enjeux qui nous semble important est la construction de la notion d'abscisse d'un point comme distance entre ce point et l'origine (au signe près), ainsi que le fait que la différence entre deux abscisses correspond (au signe près) à la distance entre les deux points correspondants. Cela suppose aussi de la lier à la notion de « distance à zéro ». Notons que cette dernière notion suppose l'extension de la notion de distance entre deux points à celle de distance entre deux nombres.

Or, comme nous l'avons précisé dans la partie précédente, la disparition de la mention concernant le rapport entre différence des abscisses de deux points et longueur du segment dans les nouveaux programmes ne va pas dans le sens d'une meilleure prise en charge...

Toutefois, le document ressource concernant les nombres relatifs associé au programme (MEESR, 2016) apporte des précisions : il est ainsi indiqué que « le nombre (-2,7)=0-2,7 repère le point situé à la distance 2,7 de l'origine, symétriquement par rapport à l'origine au point repéré par le nombre 2,7. Il est défini comme étant son opposé. Le nombre positif 2,7 est désigné comme étant la valeur absolue du nombre négatif (-2,7). » (MEESR, 2016, p. 3). Il est également ajouté que les changements de registre (i. e. le passage de l'écriture numérique au repérage sur la droite graduée) ont pour enjeu de « construire une « image mentale » de l'opposé » (ibid., p. 3).

Une étude rapide des manuels montre que ceci n'est pas interprété de la même manière par tous : on observe en effet une grande variabilité du traitement de ces éléments. Plus précisément, sur 11 manuels de cinquième[1] édités en 2016, on en trouve huit qui mentionnent la distance à zéro dans le chapitre sur les nombres relatifs (que ce soit pour définir les nombres relatifs, l'opposé d'un nombre ou pour énoncer les règles de comparaison). Par ailleurs, sur les cinq manuels qui proposent une définition de la distance à zéro, aucun ne fait le lien avec la soustraction des abscisses pour obtenir la longueur des segments. Enfin, à propos de la définition de l'opposé d'un nombre (ou de nombres relatifs opposés), cinq manuels se cantonnent au registre numérique (soit en faisant référence à une « partie numérique égale et [un] signe opposé », soit à la « somme égale à zéro ») ; cinq autres utilisent la distance à zéro ; le dernier donne une définition numérique puis fait référence à la distance à zéro en remarque.

La définition suivante de « nombres relatifs opposés », proposée par un enseignant de mathématiques stagiaire, illustre à nouveau les difficultés liées à l'articulation des cadres : « deux nombres relatifs sont opposés si la distance entre leurs abscisses et zéro est la même et s'ils sont de signe contraire. ». On notera que points et nombres sont confondus (la référence du déterminant « leurs » dans l'expression « leurs abscisses » ne peut renvoyer qu'aux nombres relatifs, alors qu'il devrait renvoyer à des points) ; d'autre part, il est fait mention de la distance entre deux nombres sans qu'elle ait été définie (elle est présentée comme une évidence déduite de la notion de distance entre 2 points).

Nous proposons dans la suite de ce texte des situations élaborées au sein du groupe IREM didactique de Montpellier et testées dans des classes, en troisième et en sixième, visant à prendre au moins en partie en charge les enjeux évoqués ci-dessus.

---

[1] Il s'agit des manuels : Delta (Belin), Deltamaths (Magnard), Dimensions (Hatier), Indigo (Hachette éducation), Kiwi (Hachette éducation), iParcours (Génération 5), Kwyk (Hachette éducation), Maths Monde (Didier), Myriade (Bordas), Sesamaths (en ligne) et Transmath (Nathan).

Fonctions affines, proportionnalité et géométrie en troisième

Le thème des fonctions affines en troisième est une bonne occasion de travailler l'articulation entre les différents cadres dans le repère cartésien et préparer la notion d'équation de droite prévue pour être abordée en seconde.
Cela s'inscrit en outre pleinement dans la mention des nouveaux programmes évoquant le fait de travailler « En 3e, […] le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties […]. ».

C'est pourquoi nous avons élaboré et testé en classe l'exercice suivant.

Dans le repère orthonormé d'origine O :

- M est le point de coordonnées (4 ; 3).
- P est le point de la droite (OM) qui a pour abscisse 7.

a) Quelle est l'ordonnée du point P ?

b) Le point $N(9;7)$ appartient-il à cette droite ?
Justifier votre réponse.

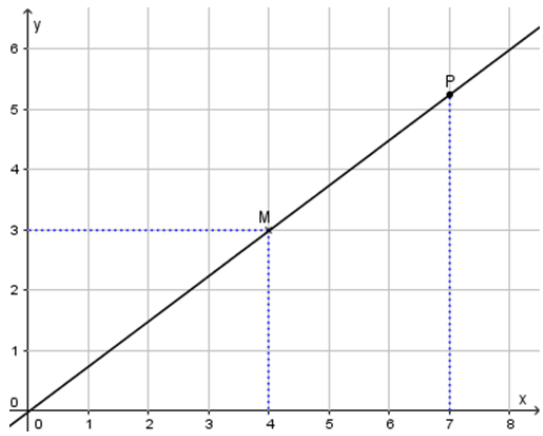


Fig. 1. Énoncé de l'exercice de troisième.

Nous avons choisi de proposer cet exercice en introduction au thème des fonctions linéaires et affines. Il s'agit de construire avec les élèves un premier lien entre fonctions linéaires, proportionnalité et Thalès, en amenant les élèves à justifier une partie de la caractérisation de l'appartenance des points à une droite par la relation entre abscisses et ordonnées (prémisses de l'équation de la droite comme relation algébrique caractéristique des coordonnées des points de la droite). Notons que cela entrait tout à fait en résonnance avec la préconisation des programmes en vigueur au moment de l'élaboration de la situation (programmes de 2008) : « Connaître et utiliser la relation $y = ax$ entre les coordonnées $(x;y)$d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \mapsto ax$ ». Précisons également qu'il ne s'agissait pas de démontrer l'équivalence liée à la caractérisation de la droite par son équation, mais seulement de mettre en évidence l'une des implications.

Enfin, l'exercice n'aborde pas explicitement la question de la généralisation du résultat observé dans un cas particulier dans le registre algébrique. Cette généralisation est prévue dans le projet d'enseignement pour être abordée dans un exercice ultérieur.

Dans l'objectif plus global de notre groupe concernant la notion d'équation de droite au lycée, cet exercice a principalement pour but de lier l'objet droite dans un repère cartésien à la proportionnalité et d'en proposer une justification, ce qui suppose d'articuler divers cadres : géométrique, grandeurs et mesures, fonctions, numérique. En particulier, il s'agit de faire intervenir les connaissances de géométrie « classique » (en l'occurrence le théorème de Thalès) dans un cadre repéré ; de même, il s'agit de renforcer le fait que les abscisses et ordonnées, dans le repère cartésien, correspondent à des mesures de grandeurs et non seulement à des « repères » (aspect « ordinal » des coordonnées), en poussant les élèves à les interpréter comme des longueurs (aspect « mesure » de la coordonnée).

Les prérequis sont, tout d'abord, la proportionnalité – dans le cadre numérique. Dans le cadre géométrique (classique), la notion de point appartenant à une droite, le théorème de Thalès dans une configuration simple. En ce qui concerne le repère cartésien, les élèves doivent savoir lire des coordonnées (abscisse et ordonnée) et savoir que tout point du plan est représenté par un unique couple de nombres (réels). Par ailleurs, il faut être capable d'interpréter l'abscisse et l'ordonnée d'un point comme des longueurs. En ce qui concerne ce dernier point, il constitue précisément pour nous un enjeu de la situation car nous pensons qu'il est probablement peu disponible chez les élèves.

La première question peut donner lieu à trois procédures distinctes :

1) Lecture graphique directe, avec une incertitude sur le résultat proposé. La réponse ne peut être qualifiée d'exacte et on peut s'attendre à une variété de réponses (liée à l'imprécision) de la part des élèves. Une variante pourrait consister à essayer de mesurer « le plus précisément possible » (ou ce que les élèves considèrent comme tel), par exemple en mesurant à la règle et en utilisant une échelle etc. Cette procédure est selon nous la plus fréquente puisque la lecture graphique de coordonnées de points est un type de tâche bien connu des élèves à ce niveau (et typique du travail dans ce registre).
2) Utilisation de la propriété vue en quatrième reliant l'alignement de points avec l'origine du repère et la proportionnalité des grandeurs représentées en abscisse et en ordonnée. Cette procédure est certainement moins facilement mobilisable que la précédente par les élèves d'autant plus qu'il est peu probable que ce type d'énoncé la leur évoque. Elle constitue une justification plus élaborée que la précédente.
3) Une procédure plus élaborée encore consiste à justifier le théorème de proportionnalité précédent en utilisant le théorème de Thalès. Cela suppose de « convertir » le problème en une tâche de géométrie classique. Cette procédure comporte toutefois des adaptations[2] de taille :
    - Il faut reconnaitre la configuration géométrique (adaptation A1) malgré le fait qu'elle est présentée dans un repère cartésien, puis nommer les points de cette figure (adaptation A2).
    - La condition de parallélisme des droites est à déduire des propriétés du repère orthonormé (adaptations A1, A4, A2 et A3). De même que les angles droits que les élèves peuvent identifier.
    - Les abscisses et ordonnées sont à considérer non pas seulement comme des repères mais comme des longueurs (adaptations A3 et A2), ce qui n'est pas a priori habituel pour les élèves dans le repère cartésien.

Compte tenu des nombreuses adaptations qu'elle comporte, nous pensons que cette dernière procédure ne sera pas mobilisée spontanément par les élèves mais elle reste celle visée. En effet, d'une part, elle permet de donner une justification du théorème admis en quatrième,

---

2 Nous entendons ici ce terme au sens de Robert (2005) : une adaptation d'une connaissance pour résoudre un exercice est « ce qu'il faut faire » avec cette connaissance pour l'appliquer dans ce cas. Elle correspond grossièrement à une « difficulté », même si on a déjà rencontré la connaissance en question auparavant. Les adaptations sont classées en six catégories : reconnaissances (partielles) des modalités d'application des notions – typiquement la reconnaissance d'une configuration qui n'est pas la configuration « de base » pour appliquer un théorème – (A1), l'introduction d'intermédiaires tels que notations, points, expressions (A2), les mélanges de plusieurs cadres ou notions et les changements de points de vue (A3), l'introduction d'étapes (A4), l'utilisation de questions précédentes dans un problème (A5), l'existence de choix, forcés ou non (A6).

d'autre part, les adaptations qu'elle contient permettent précisément de faire travailler les élèves sur l'articulation des différents cadres dans le repère cartésien et préparent ainsi à la géométrie repérée.

Remarquons que le coefficient de proportionnalité qui émergera de l'application du théorème de Thalès (qui peut être interprété comme un agrandissement – ou une réduction, selon le rapport considéré), ne correspond pas au coefficient de proportionnalité entre les abscisses et les ordonnées des points ; il ne correspond donc pas au coefficient directeur de la droite. En effet, le point de vue engageant un raisonnement par le théorème de Thalès lie les abscisses (et ordonnées) de deux points donnés sur la droite par un coefficient multiplicatif alors que l'équation de droite lie l'abscisse à l'ordonnée d'un point quelconque appartenant à la droite par un autre coefficient multiplicatif. Ce dernier peut être trouvé par une généralisation du théorème de Thalès appliqué à un point d'abscisse x appartenant à la droite. Cela complique le passage à la formule de caractérisation des points de la droite, mais nous n'aborderons pas ici cette question, reportée dans notre scénario à une étape ultérieure.

La seconde question porte sur la contraposée de la propriété présente dans la première et peut ainsi donner lieu à la procédure suivante :

1) En admettant qu'il existe un unique point de la droite (OM) ayant une abscisse de 9, puis en considérant le point Q d'abscisse 9 appartenant à la droite (OM), on trouve (en appliquant le raisonnement de la question précédente) que l'ordonnée du point Q est 6,75. Le point N proposé ayant une ordonnée de 7, ne peut donc pas appartenir à la droite (OM).
2) Une seconde procédure est encore applicable en utilisant les théorèmes de Thalès et Pythagore : par le théorème de Pythagore, on prouve que $OM = 5$ et $= \sqrt{130}$. En appliquant la réciproque du théorème de Thalès et puisque les rapports $\frac{9}{4} = 2{,}25$ et $\frac{\sqrt{130}}{5} \approx 2{,}28$ ne sont pas égaux malgré le parallélisme, c'est que nécessairement une condition d'entrée du théorème de Thalès n'est pas satisfaite : l'alignement.

La seconde procédure est a priori hors de portée des élèves, puis qu'elle combine les différentes adaptations de la première question et les difficultés inhérentes à la logique d'un raisonnement par contraposée. Elle présente toutefois l'intérêt de mettre en avant le rôle possible du théorème de Thalès dès lors que l'on cherche à caractériser l'alignement de deux points avec l'origine dans un repère cartésien.

3) Notons que l'on peut également anticiper des procédures de type graphique : on peut prolonger la droite ainsi que l'axe des abscisses pour accéder à l'abscisse 9, puis vérifier par lecture graphique. Cependant, la lecture graphique est limitée par la dimension de la fenêtre représentée (on ne voit pas ce qu'il y a au-delà) et par la taille du tracé (deux points peuvent être déclarés distincts, mais on ne peut pas les déclarer confondus (Rogalski, 1984). On peut considérer que cette procédure constitue le réflexe premier de tout élève mais que les contraintes du registre graphique ne permettent pas de valider les réponses. Il nous apparaît important de ne pas négliger ces démarches qui soulèvent la question de la validité des lectures graphiques, et des particularités de ce registre. Ces enjeux sont d'ailleurs selon nous à travailler dans la logique de la distinction entre dessin et figure (Laborde et Capponi, 1994) travaillée en géométrie.

Analyse a posteriori

L'exercice a été mené par un enseignant du groupe et filmé dans deux classes de troisième. Le déroulement observé confirme une grande diversité des procédures employées par les élèves. Ainsi, la lecture graphique reste grandement majoritaire dans les deux classes, le recours à la proportionnalité apparaît dans une proportion d'un élève sur huit, et la mobilisation de connaissances géométriques a été observée chez un seul élève, sans arriver à la mener à terme (identification d'une configuration de Pythagore, calcul de OM dans la question 1). Le questionnement de la précision de la lecture a été fortement présent, allant jusqu'à des techniques ayant recours à la règle graduée, et les élèves ont donné une variété de réponses approchées sans arriver à valider une réponse définitive. Ce fut l'occasion pour l'enseignant d'aborder l'imprécision engendrée par des lectures graphiques lors d'une mise au point collective. En ce qui concerne les réponses s'appuyant sur la proportionnalité, l'enseignant a exigé des élèves une justification. Le déroulement montre qu'à ce stade, l'enseignant a pris à sa charge une grande part des adaptations nécessaires afin de permettre aux élèves de reconnaître une configuration de Thalès : la configuration classique a été repassée au feutre sur l'énoncé projeté au tableau, puis le vidéoprojecteur a été éteint afin de *faire apparaître* la figure géométrique dans le registre plus classique de la feuille blanche. Il est intéressant de noter que même à ce moment-là, certains élèves ayant reconnu la situation de Thalès ont été incapables de mener la résolution à terme car il manquait, selon eux, les mesures de la figure. Nous interprétons cet obstacle comme révélant la non-disponibilité (anticipée dans l'analyse a priori) du fait que les coordonnées (positives) d'un point correspondent à des longueurs.

La seconde question a montré que de nombreux élèves avaient effectivement pensé à prolonger la droite, mais que les contraintes du registre graphique faisaient obstacle à la validation de la valeur trouvée. Par ailleurs, la preuve liée à la procédure 1 est largement restée à la charge de l'enseignant et son intérêt semble avoir été peu perçu par les élèves pour lesquels la justification liée à la proportionnalité suffisait.

En conclusion, nous pensons que cette situation possède un potentiel certain par rapport aux enjeux d'enseignement qui nous intéressent dans cet article, mais qu'elle présente également certaines difficultés de mise en œuvre. Le rôle de l'enseignant est nécessairement conséquent si l'on veut aboutir à la procédure incluant l'utilisation du théorème de Thalès. La gestion de la variété des procédures et l'invalidation des procédures par lecture graphique, notamment, présente certaines difficultés, de même que le fait d'amener la nécessité de la justification de la proportionnalité à l'aide du théorème de Thalès[3]. Enfin, l'adaptation liée à la mobilisation des connaissances de géométrie classique dans le cadre repéré reste a priori nécessairement à la charge de l'enseignant, sauf peut-être si elle a déjà été travaillée en amont. De même (en tout cas pour certains élèves) pour le fait d'identifier les abscisses comme codant des longueurs.

Demi-droite graduée et fractions en sixième

Organisation de la progression

La progression en 6ème autour des fractions dans la classe dans laquelle l'expérimentation a été menée est inspirée de la brochure de l'IREM de Lyon intitulée « la sixième entre fractions et décimaux » et datant de novembre 1999[4] (Anselmo et al., 1999). Nous présentons ci-dessous l'expérimentation de certaines de ces situations ainsi que d'autres conçues par le groupe (inspirées de la brochure) : les situations proposées dans la brochure sont ainsi

---

3 Notons que, lors d'une expérimentation de cette situation en formation d'enseignants stagiaires, la hiérarchie des différentes procédures n'est pas apparue non plus comme évidente pour les stagiaires.

4 La date relativement ancienne de la publication n'en rend pas le contenu moins pertinent actuellement selon nous, malgré les divers changements de programmes.

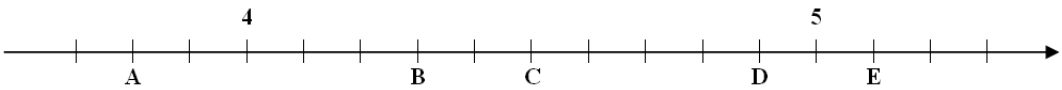
revisitées par le prisme de la question de la construction du repère cartésien comme objet mathématique.

Dans un premier temps de la progression, des bandes dites « bandes unités » sont partagées en demis, quarts, cinquièmes etc. à l'aide de pliages et d'un guide-âne, et plusieurs écritures fractionnaires équivalentes de l'unité sont rencontrées. Les segments mesurés et tracés à l'aide de ces bandes peuvent être plus grands qu'une unité.

Le travail se poursuit ensuite par des constructions de règles graduées à l'aide des bandes unités (placement du 0, du 1 et graduations régulières). Ces règles servent à mesurer et à tracer des segments. C'est à ce moment-là qu'un « glissement » vers la droite graduée et la notion d'abscisse s'opère : la droite est ainsi graduée à l'aide des règles et la notion d'abscisse d'un point est institutionnalisée comme « nombre qui sert à repérer un point sur une demi-droite, c'est la distance de ce point à l'origine de la demi-droite ».

Des écritures équivalentes d'un même nombre (décompositions en entier et fractions) sont également rencontrées à cette occasion.

<u>Exercice 3 :</u> Trouve l'abscisse des points A, B, C, D, E.



<u>Exercice 4 :</u> Sur la droite graduée ci-dessous, place B d'abscisse $\frac{1}{3}$, C d'abscisse $\frac{13}{9}$,et D d'abscisse $\frac{14}{18}$.

Indique sur la même droite l'abscisse des points A, E et F.

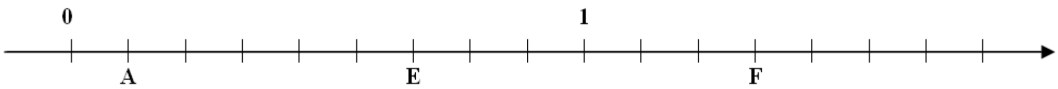


Fig. 2. Exercices 3 et 4 extraits de la brochure.

Dans ces exercices, la demi-droite graduée comporte des abscisses déjà placées et des points dont il faut trouver les abscisses.

La portion de droite représentée dans l'exercice 3 ne présente qu'une seule unité complète, entre 4 et 5. Les points d'abscisses 1 et 2 ne sont volontairement pas visibles sur cette portion, ce qui rend la tâche plus complexe par rapport aux exercices précédents dans lesquels le point d'abscisse 0 est généralement présent, à gauche. La résolution suppose ainsi que les élèves identifient la longueur d'une unité et interprètent 4 et 5 comme des grandeurs (distances à zéro), c'est-à-dire deux abscisses de points. Un élève pour qui ces repères ne correspondent pas à des grandeurs ne peut résoudre l'exercice correctement.

Le va-et-vient entre les registres graphique et géométrique permet ainsi de faire le lien entre le nombre comme distance à 0 et le nombre en tant repère d'un point sur une droite graduée.

L'exercice 4, moins déroutant, permet de révéler si les élèves arrivent facilement à graduer en tiers et en 18ème une droite déjà graduée en 9ème, les égalités d'écritures étant alors mises en évidence : 1/9 =2/18 etc. En effet, le concept de fraction partage a été abordé au cours moyen et travaillé à cette occasion. Les égalités d'écritures sont mises en évidence géométriquement par le placement des nombres sur la demi-droite graduée et l'articulation entre les cadres géométrique et numérique permet de justifier les égalités. On a ainsi ici un bon exemple d'enrichissement du numérique par le registre graphique.

Analyse a posteriori

Dans l'exercice 3, les élèves ont été tentés de faire comme si 0 était « au début de la demi-droite » et graduer en quarts car il y a 4 parts entre ce point et le premier nombre noté : 4 (cf. figure 3. Dans ce cas-là les nombres 4 et 5 ne servent que de repères et ne sont pas interprétés comme des distances à l'origine étant donné que celle-ci n'est pas visible.

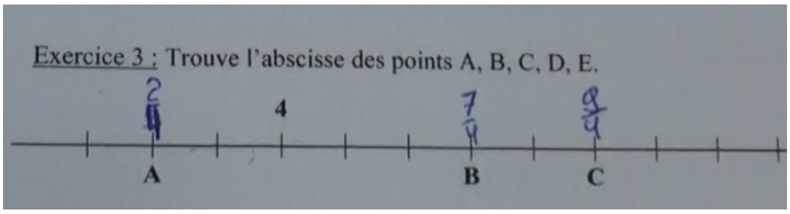


Fig. 3. Production dans laquelle les abscisses 4 et 5 ne servent que de repères.

Certains élèves repèrent l'unité entre 4 et 5 car ce sont deux nombres entiers consécutifs et se rendre ainsi compte que les graduations sont des dixièmes. Mais le lien entre le nombre 4 et la distance à 0 n'a pas été fait par certains élèves qui ont ainsi proposé 2/10 pour l'abscisse de A.

Enfin certains élèves ont perçu l'unité entière entre 4 et 5 et ont utilisé ces nombres comme distances à 0 en comptant les parts à partir de 4 et en « remontant » sur la droite, ainsi l'abscisse obtenue pour A a été 38/10 (cf. figure 4)

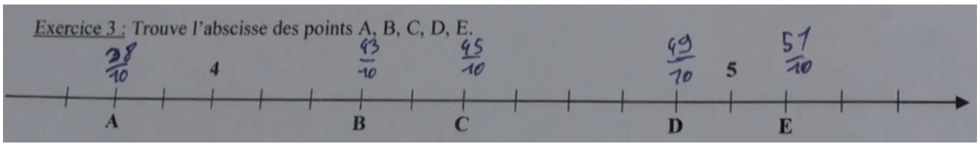


Fig. 4. Production dans laquelle l'abscisse de A est 38/10.

Dans l'exercice 4 les erreurs sont moins fréquentes et les graduations en tiers et en dix-huitièmes ont été facilement obtenues. La pratique plus ancienne pour l'élève de ce type de tâche explique peut-être que les obstacles soient mieux franchis.

Exercices conçus par le groupe

Pour cette deuxième série d'exercices, le lien très fort entre la fraction représentant une quantité (aspect mesure) et la fraction comme nombre servant de repère (aspect ordinal) est permanant. L'élève doit trouver à combien de carreaux correspond la quantité ½ par exemple puis la reporter à partir d'un point repéré par un nombre de telle sorte à trouver l'endroit où les points d'abscisse 0 et 1 se situent.

C'est clairement cet aller-retour entre les notions qui est visé dans ces exercices pour que le lien se fasse et qu'une notion n'existe pas sans l'autre : c'est le sens de l'abscisse d'un point qui permet d'établir un lien entre le nombre comme repère et la distance à l'origine d'un point (en lien avec la distance à zéro d'un nombre).

Tout ce travail préalable sur la droite graduée permet de faire le lien entre la géométrie « classique » et les nombres et de construire ainsi le futur repère cartésien comme objet mathématique (dans l'optique notamment de faciliter l'entrée des élèves dans la géométrie repérée).

Par la même occasion, l'un des enjeux de ces exercices est d'aborder la notion de fraction comme partage, grandeur et nombre repère. Nous nous sommes donc interrogés sur la construction du statut de nombre que pourraient prendre les fractions en étant positionnées sur la demi-droite graduée : nous n'entrerons pas dans les détails de ces réflexions mais nous faisons l'hypothèse que le travail proposé y contribue.

L'énoncé a volontairement été conçu très ouvert avec la possibilité de placer ou non les points d'abscisses 0 et 1. Les deux « nombres repères » de la première droite sont en écriture fractionnaire de même dénominateur (deux) ; un entier et une fraction constituent ceux de la deuxième droite, de façon à inciter l'élève à donner une écriture fractionnaire équivalente à deux pour résoudre l'exercice. Enfin, la troisième droite comporte deux nombres en écriture fractionnaire n'ayant pas le même dénominateur pour mettre en évidence des écritures fractionnaires équivalentes d'un même nombre.

<u>Exercice</u> : Sur chacune des droites graduées, si cela est possible placer le point d'abscisse 0, et le point d'abscisse 1.

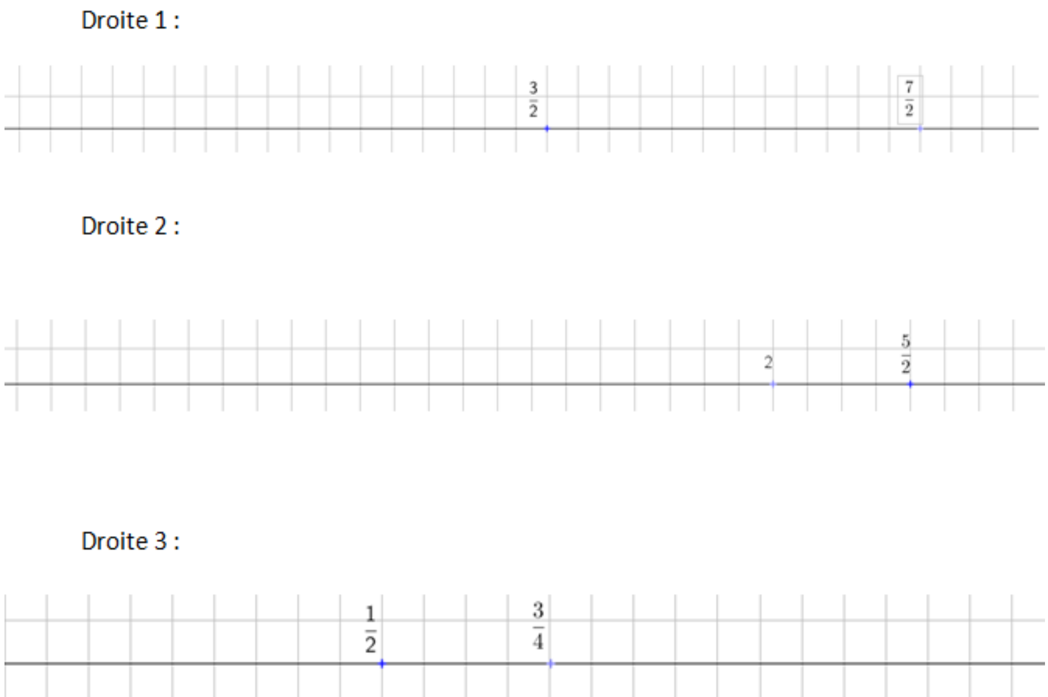


Fig. 5. Énoncé de l'exercice conçu par le groupe.

La tâche liée à la deuxième droite est apparue plus simple[5] à la plupart des élèves qui ont ainsi commencé par elle. On peut supposer que la proximité des deux nombres choisis y a contribué. Les élèves ont assez facilement découvert que la quantité 1 /2 était quantifiée par 4 petits carreaux. Pour autant, certains élèves ont placé d'emblée le 0 au début de la demi-droite puis les autres nombres en partant de ce point en considérant que 1 /2 correspondait à 4 petits carreaux. Une incohérence est alors apparue quant à la position du nombre 2. « Remonter » à partir du nombre 2 vers la gauche n'a pas semblé naturel dès le départ à ces élèves-là.

D'autres ont « sauté » le nombre 2 et ont placé 4 /2 à quatre carreaux avant ce nombre et sont remontés ainsi jusqu'au nombre supposé 1. C'est alors qu'ils se sont rendu compte que l'unité comprise entre les nombres 1 et 2 n'était pas de la même taille que celle comprise entre

---

5 Même si le fait qu'ici, le point d'abscisse 0 soit loin d'être très à gauche sur le dessin a pu perturbé certains élèves.

1 et 2. Le nombre 2 dans ce cas a gardé seulement un statut de nombre repère dans un premier temps (cf. figure 6)

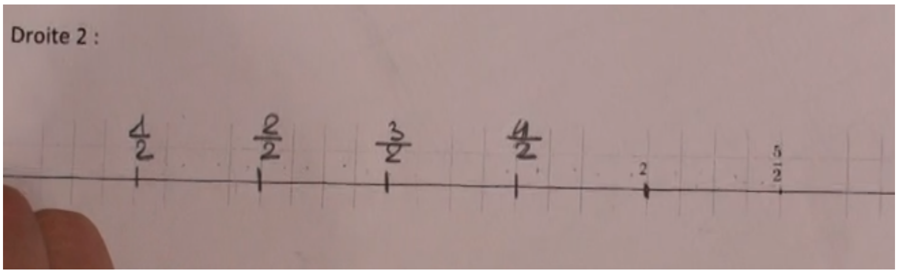


Fig. 6. Production dans laquelle 2 a seulement un rôle de repère.

En conclusion, dans les exercices présentés, le nombre positionné sur la droite graduée revêt à la fois deux statuts : celui de repère et celui de mesure. C’est à la charge de l’élève d’utiliser celui qui convient au bon moment pour résoudre le problème posé. Les erreurs rencontrées lors de ces exercices mettent en relief que l’articulation entre ces deux statuts n’est pas toujours suffisamment maîtrisée par les élèves. Par rétroaction du milieu l’élève est rapidement confronté à son erreur et travaille ainsi le passage d’un statut à un autre en réajustant ses réponses. Il nous semble indispensable que cette articulation soit travaillée et ce type de tâche sur la droite graduée offre une occasion de le faire.

Conclusion

Les investigations que nous avons menées au niveau du collège, à la suite du travail réalisé précédemment au niveau du lycée (cf. Cerclé et al., 2016) nous permettent de confirmer que l’appropriation de l’objet mathématique « repère cartésien » (incluant notamment l’idée de repérage et l’articulation entre des objets géométriques, numériques et des grandeurs) n’est pas évidente pour les élèves. Nous faisons l’hypothèse (largement étayée par diverses observations) que cela représente une difficulté en vue de l’entrée dans la géométrie repérée en seconde et notamment pour l’apprentissage de la notion d’équation de droite, centrale à ce niveau, à la charnière entre géométrie, analyse et algèbre.

Nous avons également montré que certains thèmes d’enseignement peuvent fournir de bonnes opportunités de travailler sur ces enjeux au collège. Ainsi, la construction progressive de la droite graduée et du repère cartésien en lien avec la construction des nombres, en sixième et cinquième, ainsi que le travail sur les fonctions linéaires et affines en troisième présentent des occasions à saisir pour initier la construction du repère cartésien au croisement des divers cadres et registres qui y interviennent.

Nous avons également identifié que, malgré ce fait, les programmes d’enseignement actuels pointent peu ces enjeux – même moins que les programmes précédents – et qu’ils semblent a priori peu pris en charge dans l’enseignement (même si des études complémentaires devraient être menées pour l’affirmer de façon nette et qu’il n’est par ailleurs pas possible de généraliser).

Nous avons ainsi proposé des situations d’enseignement associées aux thèmes pointés ci-dessus et montré le potentiel qu’elles portent pour travailler l’articulation des cadres et registres dans l’a construction du repère cartésien. Les expérimentations menées nous amènent notamment à plaider pour un travail plus précoce et plus fréquent dans les classes de collège sur la mobilisation des connaissances géométriques « classiques » dans le cadre repéré[6], même si une part du travail (notamment la construction de la droite comme droite des réels et non seulement la droite d'Euclide dans le repère cartésien) ne peut que rester à la charge du lycée.

Il reste néanmoins à organiser une progression de cet apprentissage tout au long du collège et à bien identifier quels peuvent être les acquis et quels sont les enjeux qui restent en seconde pour l'entrée dans la géométrie repérée et le travail en analyse dans le repère cartésien (en particulier en lien avec les fonctions).

Enfin, terminons pas une ouverture à de futurs travaux, sous forme de question. En articulation avec le travail que nous proposons pour construire le repère cartésien, en réfléchissant « dans l'autre sens », ces supports ne permettraient-ils pas aussi d'enrichir la construction des nombres, notamment via un travail sur le nombre comme mesure de grandeurs ?

Bibliographie

Anselmo B., Bonnet, M., Colonna, A., Combier, G., Latour, J., Planchette, P. (1999). *La sixième entre fractions et décimaux*, IREM de Lyon.

Cerclé V., Chesnais A., Gosselin E., Leberre J., Nyssen L. (2016). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et registres à propos des équations de droites. *Actes du XXIIème colloque CORFEM*, Nîmes, 11-12 juin 2015.

Rogalski, J. (1984). Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions. In A. Giordan, J.-L. Martinand (Éds.), *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifiques, Actes des sixièmes Journées internationales sur l'éducation scientifique*, (pp. 379-388). Paris : UER Didactique, Université Denis Diderot - Paris 7.

Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 14/1-2, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ministère de l'Éducation Nationale (2008). *Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août* 2008.

Ministère de l'Éducation Nationale (2015). *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*.

Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (2016). *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs*, document ressource de mars 2016, consulté sur le site *www.eduscol.education.fr.*

Robert A. (2005). Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré, *Petit x*, 67, pages 63-76.

Liste des manuels

Delta, Mathématiques cycle 4 2016. (2016). Éditions Belin Éducation.

Deltamaths cycle 4, 5ème. (2016). Éditions Magnard.

[6] Nous avons ainsi commencé à expérimenté d'autres situations que celles présentées ici, notamment en quatrième, autour de la mobilisation du théorème de Pythagore dans le cadre repéré.

Collection Dimensions, Mathématiques Cycle 4. (2016). Éditions Hatier.
Mission Indigo mathématiques cycle 4 / 5ème. (2016). Éditions Hachette Éducation.
Kiwi mathématiques cycle 4 / 5è. (2016). Éditions Hachette Éducation.
Collection iParcours, Maths, cycle 4, 5è. Génération 5.
Kwyk maths 5ème. (2016). Éditions Hachette Éducation.
Maths Monde, cycle 4. (2016). Éditions Didier.
Myriade Maths, cycle 4, 5è. (2016). Éditions Bordas.
Sesamath, le manuel de cycle 4. (2016). Éditions en ligne. http://manuel.sesamath.net/
Transmath cycle 4, 5è. (2016). Éditions Nathan.