UN REGARD SUR LES NOMBRES A LA TRANSITION ECOLE – COLLEGE

Christine Chambris, Frédérick Tempier, Cécile Allard
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université de Cergy-Pontoise, Université Paris-Est Créteil, U. Rouen, U. Artois, U. Paris-Diderot.

Résumé.
La conférence consensus sur le nombre et le calcul qui s'est tenue à l'automne 2015 rappelle qu'à la sortie de l'école primaire un nombre important d'élèves ont des difficultés tant avec les entiers (grands nombres) qu'avec les décimaux. Pour comprendre ce qui se joue à la transition école-collège nous proposons une réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres articulant plusieurs points de vue (cognitif, institutionnel, épistémologique, sémiotique…). Deux enjeux apparaissent comme particulièrement importants : l'extension d'un système de numération des entiers de taille moyenne (i.e. jusqu'à 9999) aux grands nombres d'une part, aux décimaux d'autre part ; les rôles joués ou supposés joués par les fractions à l'école d'une part, au collège d'autre part. Les analyses révèlent des tensions de natures variées auxquelles aussi bien les élèves que les enseignants doivent faire face.

Introduction

Ce texte s'attache aux questions d'articulation dans l'étude des nombres à la charnière école-collège[1]. Son actualité est rendue d'autant plus vive que la nouvelle organisation institutionnelle constitue en un cycle unique les deux dernières années d'école et la première année du collège.

Pour planter le décor, avant de revenir plus longuement sur chacune d'elles par la suite, rappelons rapidement quelques données extraites de la conférence de consensus sur la numération[2] qui s'est tenue à l'automne 2015. Nous présentons trois exemples révélateurs de difficultés sur les trois types de nombres qu'on rencontre à la charnière école-collège : les fractions, les « grands nombres » entiers, les décimaux. Pour les élèves, ces nombres sont nouveaux au cycle 3 en ce sens que même s'ils les ont déjà rencontrés dans leur « vie quotidienne », voire dans certaines activités à l'école leur étude ne s'installe vraiment qu'au cycle 3. Leur apprentissage démarre au CM1, ce qui signifie que cela ne fait probablement pas plus qu'un an et demi que les élèves travaillent ces trois types de nombres quand ils arrivent en 6e. Chesné et Fischer (2015) ont rappelé qu'à l'issue de l'école primaire :

- environ le quart des élèves sont capables de dire que la fraction $\frac{1}{4}$ est égale à 0,25,
- un élève sur quatre ne sait pas écrire un grand nombre entier (supérieur à 10 000) en chiffres,
- les deux tiers des élèves ont des difficultés pour multiplier un nombre décimal, comme 35,2 par 100.

---

[1] Ce texte est publié dans une version peu différente dans le numéro 108 de la revue Repères-IREM.

[2] Organisée par le CNESCO (comité national d'évaluation du système scolaire), voir http://www.cnesco.fr/fr/conference-de-consensus-numeration/

Revenons sur chacun de ces exemples pour avancer sur ce qui est en jeu à la transition école-collège. Plusieurs enquêtes donnent le même taux de réussite pour la tâche « $\frac{1}{4} = ?$ »[3] où la fraction est à exprimer sous la forme d'une écriture à virgule : environ 27% des élèves en fin de CM2 ou en début de 6e sont capables d'indiquer que $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Cette tâche aurait-elle des caractéristiques qui la rendraient particulièrement difficile ? A première vue, elle semble absolument élémentaire tant il est clair qu'*un quart c'est 0,25*. En l'analysant un peu plus finement, on remarque qu'elle met en jeu non seulement des « nouveaux nombres » (les nombres non entiers de l'école) mais demande aussi de mettre en relation deux systèmes de signes : l'écriture avec barre de fraction et l'écriture décimale à virgule. Quelles sont les connaissances spécifiques de ces nouveaux nombres ? Quelles sont les connaissances relatives à chaque système de signe ? Quelles sont les connaissances relatives au passage de l'un à l'autre ? Qu'en est-il dans le cas particulier du nombre $\frac{1}{4}$?

Ecrire un nombre entier à 3 ou 4 chiffres ne semble pas poser de difficultés (réussite à 95%) à l'entrée en 6e alors que l'écriture de certains « grands nombres » est échouée par un élève sur quatre. Tous ces nombres sont entiers. Quelles sont donc les connaissances spécifiques des « grands nombres », nombres qui semblent pourtant partager l'essentiel, à savoir l'écriture positionnelle, avec les nombres plus petits ?

Pour finir, la multiplication par dix de 23 est réussie à 90% à l'entrée en 6e alors que la multiplication par cent de 35,2 est réussie à 32%. Pourquoi la réussite sur les entiers se transfère-t-elle si mal aux décimaux alors que le système de signes, là encore positionnel, est supposé être le système idéal pour que les opérations sur les non entiers se traitent bon an mal an comme celles sur les entiers ? De plus, dans quelle mesure la nature des nombres : entiers / non entiers introduit-elle une difficulté dans ce qui pourrait sembler n'être qu'un jeu d'écriture ?

Pour résumer, au cycle 3, les élèves rencontrent de nouveaux nombres : les nombres non entiers. Ces nouveaux nombres se présentent sous deux systèmes de signes différents qu'ils vont devoir articuler : l'écriture avec barre de fraction et l'écriture décimale positionnelle. En outre, ils poursuivent l'étude des entiers avec les « grands nombres » écrits avec l'écriture décimale positionnelle. L'écriture des fractions est un nouveau système de signes pour les élèves du cycle 3. En revanche, l'écriture positionnelle est un objet étudié au cycle 2. Au cycle 3, il s'agit d'en envisager deux types d'extensions : aux grands nombres entiers et aux décimaux. Chacune de ces études (nouveaux nombres, nouveau système de signes, double extension d'un système de signes déjà là) est amorcée à l'école et doit être « reprise », c'est-à-dire poursuivie, au collège. Ainsi, la scène, déjà complexe, se déroule sur fond de transition institutionnelle.

Ces différents types de nombres seront abordés successivement, fractions, grands nombres entiers, puis décimaux, selon différents points de vue visant à élucider les connaissances et les difficultés des élèves, les savoirs en jeu et les pratiques des enseignants, en tentant de mettre en évidence des éléments sensibles sur le plan de la transition institutionnelle.

---

[3] Chesné et Fischer (2015) indiquent que « cette tâche est présentée sous différentes formes selon les évaluations : production écrite dans l'[évaluation nationale] CM2, deux réponses égales à entourer dans l'[évaluation nationale] 6e et QCM avec 4 réponses possibles dans le test PACEM. » (p. 33) Dans ce texte, comme dans (Fischer et Chesné 2015), nous ne distinguons pas les différentes versions de l'exercice et considérons qu'il s'agit de la même tâche, dans tous les cas notée « $\frac{1}{4} = ?$ ».

1. Les fractions

Analyse de la tâche « $\frac{1}{4} = ?$ », à la charnière école-collège

Examinons maintenant différentes techniques élémentaires qui permettent de passer de l'écriture $\frac{1}{4}$ à l'écriture 0,25 ? [4]

Appui sur des connaissances mémorisées impliquant le langage courant

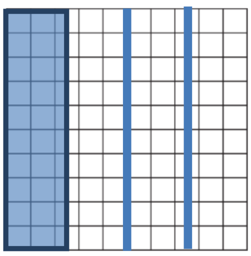
Si l'élève sait lire « 1/2 » comme « un demi », mais aussi « $\frac{1}{4}$ » comme « un quart », s'il connaît par cœur quelques correspondances, en particulier « et demi », c'est « virgule 5 » ; « quart », c'est « virgule 25 » mais aussi parfois « virgule 75 ». Il peut ainsi s'appuyer sur sa connaissance des équivalences entre $\frac{1}{4}$ et « un quart » et entre 0,25 et « un quart » pour associer $\frac{1}{4}$ et 0,25. Cet appui sur le langage courant pour le passage d'un système de signe à l'autre fonctionne pour quelques nombres. Pour l'élève qui ne connaît pas ces référents par cœur, il faut effectuer un autre raisonnement. Voyons ceux qui sont envisageables à la charnière école-collège.

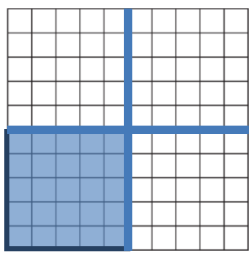
Equivalence de fractions

L'élève peut (s'il s'agit d'une réponse proposée[5]) transformer 0,25 en $\frac{25}{100}$ et comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$. Comment alors comparer les fractions $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$? Une première condition pour établir l'égalité est de connaître la relation : $100 = 4 \times 25$.

A l'école, en principe, les élèves ne savent pas que multiplier ou diviser par un même nombre numérateur et dénominateur permet d'obtenir des fractions équivalentes et ne peuvent donc écrire $\frac{25}{100} = \frac{25 \times 1}{25 \times 4} = \frac{1}{4}$.

En revanche, ils peuvent s'appuyer sur des représentations, ce qui se pratique en principe sur des petits nombres comme 2 tiers équivalent à 4 sixièmes. Dans le cas qui nous intéresse la situation est plus délicate parce que les nombres sont assez grands. Pour réussir, il faut déjà savoir que 4 quarts, c'est aussi 100 centièmes, c'est aussi une unité puis s'appuyer sur une représentation *ad hoc* –et certaines le sont moins que d'autres (fig. 1)- pour conclure en observant que 25 centièmes et un quart sont la mesure d'une même grandeur dans la même unité (fig .2). Un appui sur $100 = 4 \times 25$ peut aussi permettre d'arriver à cette conclusion, par exemple sur une droite graduée en quarts d'unité, en raisonnant sur le fait qu'il ne peut y avoir que 25 centièmes (4×…=100) entre deux graduations (fig. 3).





---

[4] Cette analyse est largement (et librement) inspirée de CREM (2011a) et, pour ne pas alourdir le texte, est réduite au seul sens : de l'écriture fractionnaire vers l'écriture décimale.

[5] Cela montre que les différentes manières de poser la question ne sont pas tout à fait équivalentes.

Fig. 1 *Fig. 2*

Fig 3

S'ils connaissent la caractérisation fondamentale (Perrin-Glorian 2012, Douady & Perrin 1986) d'une fraction unitaire (ou quantième) « par report » (ou par multiplication), c'est-à-dire s'ils savent que $\frac{1}{n}$ c'est ce qui se reporte *n* fois dans l'unité, un autre raisonnement est possible (avec ou sans appui sur un dessin) : $\frac{1}{4}$ c'est ce qui se reporte 4 fois dans l'unité et $\frac{1}{100}$ c'est ce qui se reporte 100 fois dans l'unité. Comme $100 = 4 \times 25$, l'élève peut en déduire que les quarts sont 25 fois plus grands que les centièmes et donc que $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.

Calcul

S'il sait interpréter la fraction $\frac{1}{4}$ comme 1 divisé par 4, l'élève peut chercher à effectuer ce calcul : utiliser la calculatrice, poser la division, en calcul mental chercher un nombre qui multiplier par 4 donne 1. Interprété en termes de mesures de grandeurs, ce *calcul* apparaît d'ailleurs comme une autre facette de la caractérisation des quantièmes « par report ».

Opérateur sur un nombre

Une autre façon d'appréhender la comparaison des nombres $\frac{1}{4}$ et 0,25 est d'interpréter la fraction et le nombre « à virgule » comme un opérateur sur un nombre. Il est alors possible de l'appliquer sur un nombre ou de raisonner « en général ». : multiplier par $\frac{1}{4}$ c'est diviser par 4 ; multiplier par 0,25 (donc $\frac{25}{100}$) c'est multiplier par 25 et diviser par 100 mais comme $100 = 4 \times 25$, cela revient à diviser par 4. Les deux opérateurs sont donc égaux. Si on applique les opérateurs à un nombre particulier (par exemple 100), il faut comparer les « résultats » pour conclure relativement à l'égalité des opérateurs.

Pour conclure

Il semble certes que ces tâches d'association de $\frac{1}{4}$ à 0,25 sont peu réussies mais que la réussite suppose en fait de mobiliser plusieurs types de connaissances (si on ne connaît pas le résultat par cœur) : un changement de système de signes et des connaissances liées aux grandeurs sur les fractions équivalentes, une interprétation de la fraction comme une division et effectuer le calcul, une interprétation de la fraction et de 0,25 comme des opérateurs et inférer de l'égalité des résultats l'égalité des opérateurs (ou effectuer un raisonnement général).

Chesné et Fischer (2015) précisent qu'environ 50% des élèves répondent que $\frac{1}{4} = 1{,}4$. Vu la relative complexité de la tâche, ce fait pourrait refléter une réponse par défaut quand on n'en a pas trouvé de satisfaisante plutôt qu'une mécompréhension de l'écriture décimale. De plus, il est possible que dans une tâche moins formelle, notamment dans un problème avec un contexte familier, moins d'élèves fassent cette erreur. Ceci étant dit, il semble que le contrôle « par l'ordre de grandeur », c'est-à-dire les comparaisons de $\frac{1}{4}$ et 1,4 à 1 qui permettraient de rejeter cette égalité, ne sont probablement pas mises en œuvre par les 50% d'élèves qui associent 1/4 et 1,4.

Par ailleurs, au-delà de leurs difficultés intrinsèques, les différentes techniques possibles dépendent de points de vue différents sur les fractions : mesure de grandeur, quotient, opérateur. Leur disponibilité va dépendre de ce qui est travaillé dans les différentes institutions, notamment des différentes significations accordées à la fraction –autrement dit les différents points de vue épistémologiques retenus pour l'étude des fractions.

Cette discussion fait ainsi apparaître une dimension importante de l'étude des transitions institutionnelles : identifier ce qui se fait dans une institution et pas dans l'autre, en particulier les éventuelles différences dans les significations accordées à un même signe selon les institutions, identifier aussi ce qui ne se fait ni dans l'une ni dans l'autre. Elle nous amène à préciser l'étude des fractions dans la transition école-collège sur le plan institutionnel.

Les fractions dans la transition école-collège : « du partage au quotient »

Dans les programmes et les documents d'accompagnement

Depuis 1996, les programmes répartissent l'enseignement des fractions, comme suit : l'école se charge de la fraction partage, $\frac{a}{b}$ c'est a $b^{\text{ièmes}}$ c'est-à-dire a fois 1 $b^{\text{ième}}$; le collège –la classe de 6^e– prend la suite avec la fraction vue comme quotient de l'entier a par l'entier b (solution de l'équation $b\times x = a$), $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a. Précisément les instructions du programme de 6^e de 1996 indiquent :

> A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage.
> Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :
> - le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre,
> - le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a.
>
> Ceci permet de considérer un nombre tel que 4/3 comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.
> Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités (…)

Depuis 1996, les programmes indiquent les savoirs finalement visés dans les différentes institutions mais ne décrivent évidemment pas précisément comment la liaison peut être opérationnalisée. Un document d'accompagnement (IGEN 2004) s'en charge, commenté par Chesné (2007). Le texte institutionnel utilise la langue naturelle (sept quarts et le quart de sept) et la représentation sur une droite pour mettre en évidence les deux significations différentes de la fraction $\frac{7}{4}$. Il présente ensuite un raisonnement qu'il formule de trois façons différentes pour établir l'égalité : en langue naturelle, avec le symbolisme arithmétique (multiplication avec multiplicateur à gauche, implicitement). Il s'agit de : « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 » (IGEN, 2004, p. 3) Chesné considère que le raisonnement en langue naturelle est peu explicite et utilise l'addition itérée pour expliciter davantage. Contrairement au texte de l'IGEN qu'il trouve incorrect sur ce point, il met le multiplicateur à droite (dans la tradition de l'arithmétique classique[6]) : $\frac{7}{4}\times 4 =$

---

[6] Jusqu'à la réforme des mathématiques modernes, dans une multiplication, le multiplicateur est à droite et le multiplicande à gauche. La réforme minore largement le poids de cette convention qui est ensuite progressivement oubliée par les institutions d'enseignement. En l'absence de convention pour l'ordre d'écriture des facteurs dans une multiplication, des unités permettent de lever l'ambiguïté : $\frac{1}{4}u\times 7$ et $7\times\frac{1}{4}u$ sont

$\frac{7}{4}+\frac{7}{4}+\frac{7}{4}+\frac{7}{4}=\frac{28}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=1+1+1+1+1+1+1=7$. Chesné précise en outre qu'il vaudrait mieux dire que l'enjeu de l'école est de construire : $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\times a$ et que l'enjeu du collège serait de construire $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ et de faire le lien avec ce qui précède.

Par ailleurs, le texte de l'IG se focalise sur l'équation (le but est de prouver que $b\times\frac{a}{b}=a$ et non que $\frac{1}{b}\times a=a\times\frac{1}{b}$) et la généricité de l'exemple pris ne nous semble pas immédiate. Un petit raisonnement, beaucoup plus général nous semble-t-il, se trouvait par exemple dans les traités d'arithmétique au fondement de l'enseignement élémentaire jusqu'au milieu du 20^{e} siècle, avec un appui théorique des nombres sur les mesures de grandeurs[7] :

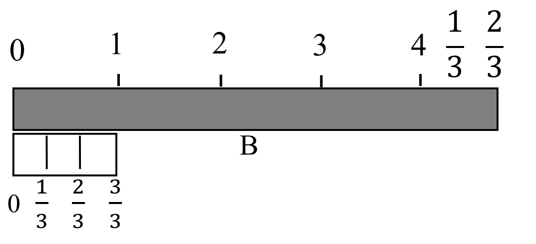
> [Il] reste donc à diviser 4 par 7. Pour évaluer ce dernier quotient, on conçoit l'unité divisée en 7 parties égales ; chacune de ces parties exprime le quotient de 1 par 7, puisque l'une d'elles prise 7 fois, donne le dividende 1. Mais, 4 est égal à 1 plus 1 plus 1 plus 1 ; on obtiendra donc le quotient de 4 par 7, en prenant 4 fois le *septième* de 1 ; de sorte que *le septième de 4 est la même chose que 4 fois le septième d'un*. (Reynaud 1821, p. 24)

Ce raisonnement s'appuie sur la caractérisation des quantièmes par report et son lien avec la division et la multiplication. Il peut s'écrire arithmétiquement : $4\times\frac{1}{7}=4:7=(1+1+1+1):7=(1:7)+(1:7)+(1:7)+(1:7)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\times 4=\frac{4}{7}$.

La situation actuelle semble donc relativement confuse et on peut se demander si, en l'absence d'écriture des unités dans les calculs et de convention dans l'écriture de la multiplication depuis les années 1970, les enjeux sont vraiment visibles pour les professeurs.

Dans une étude de cas sur les pratiques des enseignants

Dans une enquête sur l'articulation école-collège à propos des fractions, Allard (en préparation) a recueilli des cahiers d'élèves de CM2 et de 6^{e} dont nous recopions des extraits (fig. 4 et 5). Les élèves de CM2 sont dans des classes de maîtres-formateurs. Ce sont donc des enseignants expérimentés reconnus par l'institution.

Classe de CM2	**Classe de 6ème**
Situation repère : comment mesurer une bande grise en fonction de l'unité u (le nombre 1).  B = 4u + $\frac{2}{3}=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$	Rappel : La fraction est le quotient du nombre « a » par le nombre entier « b ». $\frac{3}{4}$ — numérateur / — dénominateur Exemple : $\frac{3}{4}$ 3 est le numérateur et 4 est le dénominateur

clairement synonymes alors que $\frac{1}{4}u\times 7$ et $\frac{1}{4}\times 7u$ ne le sont pas, mais la réforme proscrit l'écriture d'unités dans les calculs. (Chambris 2007)

[7] Le traité de Reynaud commence par exemple par la section suivante : « Tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution se nomme *quantité*. Lorsqu'on réfléchit sur la nature des quantités, on sent qu'il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même espèce, si l'on ne choisissait pas parmi elles une certaine quantité qui pût leur servir de terme de comparaison ; cette quantité se nomme *unité* ; l'assemblage de plusieurs unités de même grandeur compose un *nombre*. » (Reynaud 1821, p. 1)

$1 = \frac{3}{3}$ $u = \frac{3}{3} = 1$ Exemple : $\frac{2}{3}$ - 3 est le <u>dénominateur</u> : il indique que l'on a partagé 1 en 3 parts égales - 2 est le <u>numérateur</u> : il indique le nombre de parts qui ont été reportées.	Remarque : $\frac{3}{4}$ est le quotient de 3 par 4. Ainsi $\frac{3}{4} \times 4 = 3$ $\frac{9}{10} \times 10 = 10$
Fig. 4	*Fig.5*

Dans les cahiers de CM2, une fraction indique la mesure d'une grandeur. Dans les classes de 6^{e} du collège associé, une fraction est un « calcul », une notation pour la division exacte. Ce savoir est présenté comme un « rappel ». La fraction qui était la mesure d'une grandeur à l'école devient un calcul quelques mois plus tard. Allard (en préparation) interroge aussi des enseignants. Une professeure de collège lui déclare que la majorité de ses élèves de 6ème connaissent déjà la fraction comme quotient (« ils l'avaient déjà vu »). Quand la chercheuse lui présente ce qu'elle a observée dans les classes de CM2 comme travail sur les fractions-partage avec des bandes puis avec les équivalences d'écritures (comme passer de trois quarts à six huitièmes) cette enseignante est particulièrement étonnée (« c'est dingue cette différence »). Bien qu'il s'agisse d'un témoignage isolé et qu'il doive de ce fait être pris avec précaution, il confirme la « pratique » observée dans les cahiers d'élèves du collège (fig. 5) mais il semble aussi infirmer celle qui apparaît dans les cahiers d'élèves des maîtres-formateurs. Est-il révélateur d'une grande hétérogénéité des pratiques des enseignants relativement aux fractions, à la fois à l'école et au collège, d'une distance souvent importante aux instructions officielles, aussi bien à l'école qu'au collège ? Est-il révélateur d'un problème majeur de transition institutionnelle ? Ces données ne permettent pas de répondre à ces questions et nous ne disposons pas d'éléments complémentaires.

Considérons maintenant une autre dimension des fractions, celle de fraction comme « opérateur ».

Les fractions dans la transition école-collège : la fraction « opérateur »

La fraction comme opérateur, dans les programmes

Dans le programme de 1945 de l'école, les fractions apparaissent essentiellement comme fractions de grandeurs, autrement dit des opérateurs sur des grandeurs (et sur leurs mesures) : « Prendre les quatre cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (il est équivalent de prendre les 80 p. 100). Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4. » Avec la réforme de 1970 et la suppression des grandeurs pour l'étude des nombres (Chambris, 2007), la fraction apparaît comme opérateur sur un nombre dans le domaine numérique : l'enchaînement d'une division et d'une multiplication. Elle apparaît comme opérateur sur les mesures des grandeurs dans le domaine mesure, sans que soit précisée la façon de l'étudier. Le point de vue « composition des opérateurs numériques » sera conservé dans les programmes de 1980 (en lien explicite cette fois avec les problèmes du type prendre une fraction d'une quantité). Il sera de plus en plus affaibli ensuite : seules les fractions de nombres entiers seront évoquées en 2002 en lien avec la structuration arithmétique des entiers naturels, le facteur multiplicatif disparaîtra en 2008 et seuls quart et tiers d'un nombre entier seront alors évoqués. Bien sûr rien n'exclut que des problèmes de « fractions de quantités » ne soient proposés aux élèves, mais rien ne l'indique non plus. Thomas (2014) trouve d'ailleurs que ces problèmes sont très inégalement présents dans les manuels scolaires du CM. Par ailleurs, le programme de 6e (2008) indique « Prendre une fraction d'une quantité » et précise que « faire comprendre la modélisation de ce type de problème par une multiplication » relève du socle, et par suite n'est pas exigible en 6e.

En 2016, les locutions *double* et *moitié d'un nombre* (rubrique calcul) et *d'une longueur* (rubrique grandeurs et mesures) sont introduites au début du cycle 2. Au cycle 3, le programme (rubrique nombres) indique : « situation permettant de relier les formulations la moitié, le tiers, le quart et 1/2 de, 1/3 de, 1/4 de, etc. (fractions vues comme opérateurs) ». Les « fractions de quantité » sont mentionnées dans les repères de progressivité, uniquement, relativement à la proportionnalité, en lien avec l'expression « …% de » et des pourcentages tels que 50 %, 25 %, 75 %, 10 %. Le programme de 2016 ne semble donc pas très ambitieux sur ce point mais pourraient contribuer à faire évoluer un peu la situation dans la mesure où les fractions de quantité semblent moins cantonnées à la composition des opérateurs numériques.

Comment construire une bande dont la longueur est $\frac{3}{4}$ de 12 cm ?

Deux méthodes sont possibles. La première consiste à réaliser une action sur un objet de longueur 12 cm, par exemple plier en 4 puis prendre 3 parts et mesurer. La deuxième consiste à réaliser cette action mentalement et à calculer : l'ensemble des 12 cm est partagé en 4 parts égales ce qui peut être modélisé par une division, puis la longueur d'une part est itérée trois fois. Ainsi, le quart de 12 cm peut s'écrire 12 cm : 4 = 3 cm, puis les trois quarts de 12 cm, 3 cm × 3 = 9 cm.

Le calcul du quotient est élémentaire : il peut être effectué par une division, un produit dans lequel on cherche le nombre qui multiplié par 4 donne 12 ou une addition itérée dans laquelle on cherche le nombre à itérer 4 fois pour avoir 12. Pourtant, cette tâche mobilise le quotient d'une grandeur par un entier (12 cm : 4). Compte tenu des programmes jusqu'en 2008, il n'est pas certain que de telles situations soient proposées aux élèves de l'école : à la fois parce que l'école pourrait ne proposer que des « fractions de nombres » qui peuvent n'être vus que comme des « calculs » et parce que les « fractions de quantités » relèveraient du collège.

La fraction comme opérateur, dans les pratiques ?

Les pratiques des enseignants de l'école pourraient être très variables sur ce point (Thomas 2014). Les cahiers de 6e recueillis par Allard (en préparation) soulignent pour cette question que le savoir en jeu est l'équivalence de trois modes de calcul : (3 × 12) : 4, (3 : 4) × 12, (12 : 4) × 3. Le premier cahier indique en outre que « prendre une fraction d'une quantité revient à multiplier le nombre par une fraction » et donne un exemple de problème résolu par « la multiplication ». Quant à l'autre il indique que « prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier la fraction par le nombre » (et non l'inverse). Bref, rien dans ces cahiers n'indique qu'un retour au fractionnement de grandeurs soit utilisé pour interpréter ces « fractions de quantité ». Pour finir, le lien avec la conception « partage » présenté dans le cahier de CM2 (fig. 4) n'est pas immédiat. Il faut penser que « 12 cm » est l'unité, signalée comme étant « le nombre 1 ». Ainsi, le problème de l'articulation entre école et collège se présente aussi sous une autre facette, celui des « fractions opérateurs sur des grandeurs » pour lesquelles il n'est pas certain que l'institution ait prévu une place. Les quelques statistiques sur les connaissances des élèves relatives aux fractions opérateurs proviennent de PACEM (Créteil) à l'entrée en 6e et indiquent des résultats médiocres : « Le nombre égal aux deux tiers de 12 est : » (réussi à 11%), « deux tiers de 12 kg font : 4 kg, 8 kg, 24 kg, 72 kg (QCM, réussi à 33%). Les « quarts » semblent un peu mieux maîtrisés (Chesné 2014).

Conclusion sur l'articulation

Cette répartition est-elle une position tenable ? Tout d'abord, il est possible que l'approche *partage* ne soit pas tenue à l'école et que son *prolongement* au quotient ne soit pas non plus tenu au collège. Ainsi, il se pourrait que le « quotient » des concepteurs des programmes de 6e comme extension d'un partage de grandeurs ne soit pas interprété comme tel par beaucoup de professeurs mais comme une division entre nombres.

Par ailleurs, des fractions de grandeur sont aisément calculables à l'école (lorsqu'elles mobilisent par exemple les nombres des tables de multiplication), sans même que la barre de fraction soit nécessaire. Leur place dans la transition école-collège ne semble pourtant pas assurée. De plus, quand elles sont prescrites (ce qui ne semble pas être toujours le cas), il est possible qu'elles apparaissent comme un calcul sans être clairement rattachées au fractionnement de grandeurs. Pourtant des relations telles que le cinquième de 15 cm = 15 cm : 5 = 3 cm, voire les quatre cinquièmes de 15 cm = 3cm × 4 = 12 cm pourraient avoir une place plus affirmée à l'école et même renforceraient les sens de la division, voire de la multiplication. Ceci permettrait aussi d'avoir un but complémentaire à celui de l'enseignement des nombres décimaux pour l'étude des fractions.

Même si la répartition est tenue, elle enferme le programme de primaire dans un point de vue étroit car par exemple les relations basiques $\boldsymbol{1u{:}4 = \frac{1}{4}u}$ d'où $\boldsymbol{1{:}4 = \frac{1}{4}}$ devraient pouvoir être liées à la définition des fractions à l'école mais elles n'y sont pas prescrites.

De telles relations devraient en outre pouvoir être reliées à la caractérisation des quantièmes par report, caractérisation que nous n'avons pas trouvée dans les cahiers de CM2 (ni de 6e), qui permet donc de lier manipulations, multiplication et division dans des cas simples. Cette caractérisation fondamentale est d'ailleurs à la base du raisonnement tiré du traité de Reynaud, avec un jeu sur l'unité comme grandeur et l'unité comme nombre, qui lie le septième de 4 et 4 septièmes.

Pour finir, il est possible qu'interprété dans un sens étroit, le mot « partage » ne conduise pas à travailler de façon approfondie la relation $\frac{1}{n}\times n$ car il suggère un « découpage » plutôt qu'une « recomposition ». Mais peut-être l'absence de la caractérisation par report à l'école est-elle aussi un effet de la programmation du quotient au collège, tant elle lui est liée. Quoi qu'il en soit, cette répartition « du partage au quotient » ne semble pas faciliter la liaison entre l'école et le collège.

Revenons à la tâche « $\frac{1}{4}$= ? ». Il est possible que des élèves tentent de calculer 1 divisé par 4 mais la relation $\frac{1}{4} = 1{:}4$ n'est pas au programme de l'école et la mise en œuvre de la technique de la division d'un décimal par un entier, où il faut diviser le petit nombre par le grand nombre et gérer la partie décimale, peut être délicate en début de 6e. Le peu de place donnée aux fractions « opérateur » rend peu probable la technique que nous avions envisagée. Finalement, au regard des programmes, s'ils n'ont pas mémorisé la relation $\frac{1}{4} = 0{,}25$, la technique attendue par l'institution à l'entrée en 6e pour traiter cette tâche semble être l'équivalence des fractions vues comme mesures de grandeurs mais elle est délicate à mettre en œuvre comme nous l'avons vu.

2. Les (grands) nombres entiers

Des difficultés d'apprentissage des entiers

De précédents travaux (Chambris 2008, Tempier 2013) sur l'apprentissage et l'enseignement de l'écriture positionnelle décimale des nombres entiers en CE1 et CE2 montrent des difficultés persistantes d'élèves dont les enseignants n'ont pas toujours conscience, notamment quand les relations décimales entre les différentes positions sont en jeu. Alors que les élèves arrivent majoritairement à décomposer ou recomposer un nombre de manière canonique (en unités, dizaines, centaines), beaucoup sont en difficulté dans des tâches où ils ont à gérer des nombres avec plus de dix unités à certains ordres. Une évaluation proposée à des élèves du CM1 à la 5ème (tableau 1) montre que ces difficultés persistent en fin d'école et au début du collège (Tempier 2016).

Niveau de classe (nombre d'élèves)	CM1 (74)	CM2 (108)	6ème (159)	5ème (134)
3 dizaines + 6 milliers = …………	70%	73%	73%	84%
4 centaines + 32 dizaines + 8 unités = ………	54%	56%	36%	31%
1052 = … centaines … unités	59%	67%	59%	63%
40 centaines = ……… milliers	42%	65%	43%	50%

Tableau 1 : résultats d'une évaluation sur les entiers (fin d'école et début de collège)

Comme nous l'avons rappelé en introduction « un quart des élèves (respectivement un tiers) arrivant en sixième hors éducation prioritaire (respectivement en éducation prioritaire) ne savent pas écrire un grand nombre » (Chesné & Fisher, 2015). La tâche proposée dans l'évaluation nationale, sur laquelle ils s'appuient pour affirmer ceci, consiste à écrire en chiffres des grands nombres (tableau 2). Les pourcentages de réussite en 2008 baissent de manière importante pour les deux nombres supérieurs à dix-mille. Pour ces nombres il y a une classe « vide », pour laquelle il faut écrire trois zéros, ce qui a pu constituer une source d'erreur. On peut faire l'hypothèse que l'écriture de certains nombres pose moins de difficultés comme les nombres « pleins »[8], comme par exemple écrire en chiffres le nombre un-million-deux-cent-trente-quatre-mille-cinq-cent-soixante-sept car il suffit de juxtaposer les écritures chiffrées de nombres de un à trois chiffres pour réussir. A contrario, il est possible que certains nombres posent encore davantage de difficultés aux élèves que ceux proposés dans l'évaluation nationale. C'est ce que nous avons voulu vérifier à travers une évaluation que nous avons fait passer à 7 classes de 6ème en fin d'année, soit 159 élèves. Nous avons repris les nombres de l'évaluation nationale auxquels nous avons ajouté des nombres avec des zéros qui ne s'entendent pas à certains rangs.

Nombres à écrire en chiffres	*Début de sixième (2008)*	*Fin de sixième (2016)*
Quatre-cent-soixante-quinze (475)	94%	
Trois-mille-trois (3 003)	96%	
Six-cent-vingt-sept-mille (627 000)	76%	87 %
Un-million-six-cent-mille (1 600 000)	76%	89 %
Trois-millions-cinquante-mille-trois-cent-vingt (3 050 320)		79 %

[8] Selon l'expression de S. Baruk (https://www.reseau-canope.fr/mathematiques-stella-baruk/)

Dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit (17 002 058)		69 %
Cinq-cent-trois-millions-trente-sept (503 000 037)		82 %

Tableau 2: Résultats de l'évaluation nationale (2008) et de notre évaluation (2016) en fin de sixième

Les pourcentages de réussite de notre échantillon sont supérieurs à ceux de l'évaluation nationale. On peut interpréter, en partie, cet écart par le fait que l'évaluation a lieu en fin d'année. Mais, comme on pouvait le prévoir, les difficultés sont plus importantes pour les trois derniers cas qui mettent en jeu des 0 au rang des centaines (voire centaines et dizaines) dans les classes des unités ou milliers . Le 6^{e} nombre pourrait cumuler les difficultés : deux classes partiellement représentées plutôt que totalement non représentées, les centaines *et* les dizaines absentes dans une même classe, qui plus est dans une classe intermédiaire.

Enfin, pour poursuivre notre questionnement sur les connaissances des élèves pour des tâches mettant en jeu des relations entre unités au cas des grands nombres nous avons proposé les conversions suivantes :

- 4 millions = ………… centaines de milliers (48% de réussite)
- 3 millions = ………… milliers (50% de réussite)

Environ la moitié des élèves de notre échantillon réussit à convertir des millions en centaines de milliers (relation de base 10) ou en milliers (relation de base 1000). Les difficultés pointées pour les nombres plus petits se retrouvent donc ici aussi.

Des savoirs sur les systèmes de numération écrits et parlés des nombres entiers

Ces difficultés du côté des élèves, peuvent être mises en relation avec les difficultés d'enseignement pointées par Salin (1997) et Mercier (1997) ainsi que Ligozat et Leutenegger (2004) en fin d'école primaire pour l'articulation des systèmes de numération écrit et parlé. Selon Mercier, ces difficultés s'interprètent comme un « manque à savoir institutionnel » c'est-à-dire que le manque de textes de référence sur la question des grands nombres rend ces savoirs transparents pour les enseignants. L'enseignant peut alors faire comme s'il n'y avait rien à savoir pour écrire un nombre en chiffres, comme si ce savoir allait de soi.

Rappelons que notre système de numération écrit est un système décimal de position qui suit donc ce principe : dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur et on écrit le nombre immédiatement à gauche du rang précédent. Ceci permet d'écrire tous les nombres entiers avec un nombre limité de chiffres, selon un procédé itératif. Ainsi, pour les « grands nombres », dix milliers font une dizaine de milliers qui s'écrit au 5ème rang, dix dizaines de milliers font une centaine de milliers qui s'écrit au 6ème rang, etc.

Notre système de numération parlée est un système hybride hérité de la langue latine. L'énonciation des nombres correspond à une addition de multiples de puissances de dix. Il s'appuie en fait sur plusieurs systèmes d'unités imbriqués :

- en base dix, avec les irrégularités bien connues sur les nombres inférieurs à cent (Mounier 2012) ; par exemple 3 dizaines se dit « trente » et non « trois dix »,
- en base mille, qui amène à utiliser le nom des nombres inférieurs à mille associé aux mots mille, million et milliard,
- et en base un million[9], pour dire les très grands nombres en appui sur les mots billion,

[9] Officiellement c'est le système proposé par Chuquet au 15ème siècle qui est utilisé en France pour la lecture des grands nombres comme cela a été proposé par la conférence des poids et mesures de 1949. Le mot « billion »

trillion, etc.

Si on se limite aux nombres jusqu'au milliard, comme le font actuellement les programmes de cycle 3, il y a donc un double système d'unités en jeu dans l'étude des nombres : en base dix et en base mille, ce qui correspond à une lecture en « rangs » et « en classes » de l'écriture chiffrée. A l'intérieur de chaque classe on retrouve un système en base dix avec les unités, dizaines et centaines (fig. 6).

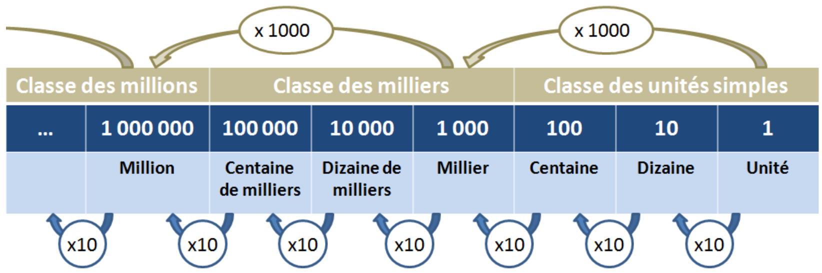


Fig. 6 : Le double système d'unités base dix – base mille

Il y a donc à prendre en compte ce double système dans l'enseignement des grands nombres. Cela peut permettre, à la fois d'enrichir la compréhension de la numération écrite en prenant conscience que le système fonctionne toujours de la même manière selon la base dix et de s'approprier les noms des grands nombres en les mettant en relation avec l'écriture chiffrée. L'appui sur ce double système peut favoriser la compréhension des ordres de grandeurs des grands nombres. Par exemple comprendre le million met en jeu la relation avec des nombres plus petits : un million c'est « dix fois cent-mille » ainsi que « mille fois mille ».

Un levier important dans cet apprentissage est la désignation d'un nombre en unités de numération (Chambris 2008), c'est-à-dire avec les mots unités, dizaines, centaines, etc. Ce système de désignation permet de produire des décompositions variées de nombres et notamment selon la base dix et la base mille comme avec les deux exemples proposés ici. Le passage d'une désignation selon la base dix à la base mille se fait à l'aide de conversions d'unités.

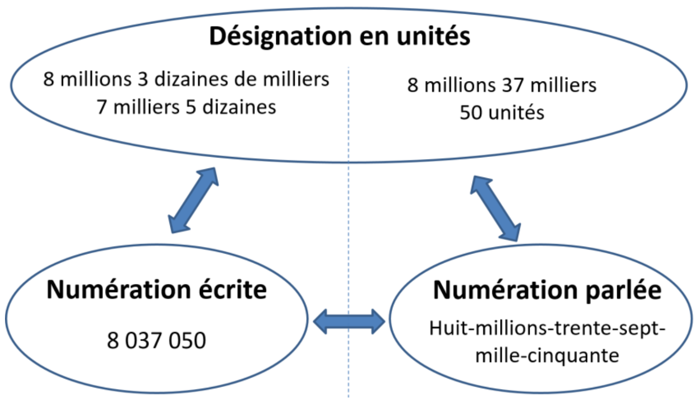


Fig. 7 : Liens entre trois désignations des nombres

La désignation en unités est un système de désignations intermédiaire entre la numération écrite et parlée qui fournit un moyen de justifier l'écriture en chiffres d'une désignation orale (ou écrite en lettres) et notamment de l'écriture des zéros qui ne s'entendent pas. Considérons

correspond à 10^{12} et non à 10^{9} comme c'est le cas par exemple aux Etats-Unis où c'est l'échelle courte qui est utilisée (base mille).

l'exemple de l'écriture en chiffres de « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante » (fig. 7). Ce nombre peut s'écrire (ou se dire) avec les unités de numération « 8 millions 37 milliers 50 unités ». Il peut aussi s'écrire (ou se dire) « 8 millions 3 dizaines de milliers 7 milliers 5 dizaines » par la conversion de 37 milliers en 3 dizaines de milliers et 7 milliers qui s'appuie sur des connaissances relevant des nombres inférieurs à mille (37 = 3 dizaines 7 unités). Le nombre obtenu peut alors s'écrire 8, 0, 3, 7, 0, 5, 0 par le principe de position de la numération écrite (le chiffre des millions s'écrit au 7ème rang, celui des centaines de milliers au 6ème rang, etc.) et l'écriture de 0 pour marquer l'absence de certaines unités. Ce type de justification est un savoir important pour l'enseignant.

Les grands nombres dans les programmes récents et les évaluations nationales

Dans les programmes de 2002 et de 2008 de l'école, l'étude des nombres entiers concerne la compréhension de la numération décimale, le lien entre désignation écrite et orale, l'ordre sur les nombres et les relations entre les nombres. Les nombres entiers sont distingués des nombres décimaux, dans le domaine des nombres et calculs. Il n'y a pas d'objectifs spécifiques liés aux grands nombres : les compétences citées dans ces programmes concernent les nombres entiers en général. Le tableau de programmation proposé avec le programme 2008 précise l'organisation de l'étude des nombres selon leur taille maximale : « jusqu'au million » pour le CE2, « jusqu'au milliard » pour le CM1 et rien n'est dit pour le CM2. La distinction entre entiers et décimaux ne se retrouve pas dans les programmes de sixième de 2004 et de 2008. L'apprentissage des nombres entiers est vu principalement à travers le cas général des nombres décimaux. Ici non plus on ne trouve pas de référence explicite aux grands nombres. Il n'y a pas de référence à la taille des nombres entiers étudiés. La compétence concernant le lien entre désignation orale et écrite n'apparait pas dans ces programmes. Les désignations étudiées sont celles des décimaux.

Un rapide regard sur les évaluations nationales récentes montre l'importance accordée par l'institution à la tâche d'association de la désignation orale et de la désignation écrite dans l'apprentissage des grands nombres. Dans les évaluations nationales à l'entrée en 6ème de 2006 à 2008 ainsi que dans l'évaluation nationale de CM2 de 2012 il s'agit de la seule tâche évaluant la connaissance des nombres entiers. Dans les évaluations 6ème, il y a deux nombres inférieurs à 10 000 et deux nombres supérieurs à 10 000 ; dans l'évaluation CM2, il n'y a que des nombres supérieurs à 10 000 (7 800 000 000 ; 64 000 000 ; 1 425 030 ; 70 065 ; 307 200 000). La maîtrise de cette tâche pour les grands nombre semble donc concentrer les attentes institutionnelles pour les entiers en fin d'école et début de collège.

L'enseignement des grands nombres en fin d'école primaire : un exemple

Suite à un travail depuis deux ans avec des enseignants de CE2, CM1 et CM2 et un conseiller pédagogique[10], dans le cadre de la mise en œuvre d'une ingénierie sur les nombres inférieurs à 10 000 nous nous sommes demandé comment une enseignante travaillant de manière approfondie la numération écrite en prenant en compte notamment l'apprentissage des relations entre unités de base dix comme la relation milliers/centaines, pouvait transférer cet enjeu dans le cas de son enseignement des grands nombres. Nous avons observé Soline pendant une séance sur les grands nombres en début d'année 2015.

Avant la mise en œuvre de cette séance Soline s'interroge sur les tâches à proposer aux élèves et sur les enjeux de l'enseignement des grands nombres. La fiche de préparation montre que Soline cherche à travailler la tâche d'écriture de nombres en chiffres sur des

[10] Dans le premier degré, les conseillers pédagogiques sont des formateurs du premier degré, professeurs des écoles ayant le diplôme de maître formateur et détachés auprès d'un inspecteur de circonscription ou des services départementaux de l'inspection académique.

nombres de plus en plus grands allant de 4 chiffres à 8 chiffres. Elle prend en compte la présence de 0 à certains rangs ou certaines classes, qui semble être une difficulté connue. Le savoir visé est le million comme mille paquets de mille et les classes correspondantes en lien avec l'écriture d'un espace voire d'un point pour les séparer. L'utilisation d'un tableau de numération par classes (unités, mille, millions) est prévue dans la fiche de préparation. Elle s'appuie donc sur la tâche privilégiée par l'institution (cf. plus haut) et construit sa séance en prenant en compte les difficultés des élèves. Elle s'interroge toutefois sur les enjeux essentiels de cet apprentissage (« est-ce que je vais au bout des grands nombres ? »). Les programmes en cours (2008) lui fournissent peu d'informations sur ce point. Sa connaissance du fonctionnement de la numération parlée et le travail important sur les relations entre unités fait pour les nombres plus petits semblent toutefois l'amener à travailler les relations entre unités de base mille pour permettre à ses élèves de donner du sens aux tâches qu'elle propose :

> « à partir du moment où ils le lisent correctement, je me dis c'est bon. Ils savent lire les grands nombres. Mais est-ce qu'ils ont bien compris que c'étaient des paquets de mille ? Tu vois ? En fait j'ai vraiment jamais creusé cet aspect-là des grands nombres ».

Elle réinvestit ainsi l'idée d'un travail sur les relations entre unités en termes de relations entre unités de base 1000 qui sont en jeu dans le système de numération parlée mais ne cherche pas à travailler le rapport dix en jeu dans le système de numération écrit.

Lors de la mise en œuvre de la séance, Soline semble parfois démunie face aux erreurs des élèves, notamment pour l'écriture des 0 muets. Par exemple, après avoir dicté un nombre à quatre chiffres qui ne pose pas de difficulté à écrire (3250) Soline passe à « douze-mille-cinq-cent » qui est le premier nombre qui dépasse dix-mille. Une élève, Anaïs, ne sait pas l'écrire en chiffres. L'enseignante montre son désarroi en prenant à parti le chercheur puis essaie d'aider cette élève :

> « Tu vois […] j'ai déjà Anaïs qui coince, qui sait écrire trois-mille mais qui ne sait pas écrire douze-mille. Est-ce que ça change quelque chose Anaïs ? Alors vas-y réfléchis. Douuuuze-mille. Douuuuuze-mille-cinq-cent. Douze mille c'est douze paquets de mille. Qu'est-ce qu'on fait quand on sait que c'est mille ? »

L'enseignante fait comme s'il y avait rien à savoir de nouveau pour écrire ce nombre. Elle essaie d'aider l'élève en insistant sur le douze sans que le lien entre la dizaine de mille et l'écriture en chiffres ne soit explicité. Un peu plus tard au cours de la même séance, l'enseignante demande d'écrire en chiffres le nombre « trente-quatre-mille-vingt ». Il s'agit du premier nombre avec la difficulté du 0 muet. Un élève, Axel, a fait une erreur : « 34.20 ». Il écrit ce qu'il entend (34 et 20) et un point après le mot « mille » conformément à la demande de l'enseignante.

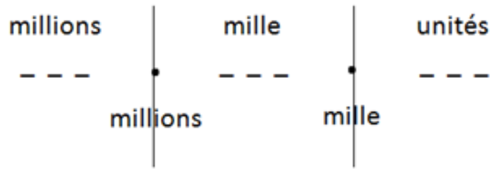
> So : trente-quatre-**mille**. Vingt. Ça te parait pas bizarre ? Après le mot mille y'a toujours combien de chiffres ?
>
> Axel : trois
>
> So : et là t'en as que deux. Comment tu pourrais faire pour en avoir trois ? (*au tableau So écrit 34.20 et souligne le 20*).
>
> Axel : mettre un zéro ?
>
> So : ou ça ?
>
> Axel : *inaudible.*
>
> *Soline écrit 34.200 au tableau.*
>
> So : Regarde Axel.
>
> *Soline écrit au tableau : 34.020.*

Ici encore l'enseignante semble démunie. Elle écrit alors la réponse. L'élève, lui, applique des règles déjà énoncées par l'enseignante (pour l'écriture du point) et essaie de s'adapter aux demandes de l'enseignante en écrivant un zéro afin d'avoir trois chiffres. L'enseignante a pourtant des connaissances de numération notamment sur la valeur des chiffres dans l'écriture positionnelle mais elle ne les met pas ici en relation avec la difficulté rencontrée par Axel.

Nous interprétons ceci par le fait qu'elle ne prend en compte que le fonctionnement de la numération parlée comme savoir de référence. Ceci se confirme lors de l'introduction du million, un peu plus tard dans la séance. Après avoir écrit le nombre 999 000, Soline souhaite introduire le million. Elle demande aux élèves combien il y a de paquets de mille juste après : elle souhaite montrer qu'après les 999 paquets de mille on a 1000 paquets de mille et définir ainsi le million. Face aux difficultés des élèves elle donne la réponse puis introduit le million ainsi.

> *Soline* : Mille fois mille ça porte un autre nom. Ca s'appelle ?
> *Un élève* : un million.
> *Soline* : Un million, c'est un nouveau mot. Pour l'instant on disait le mot mille, maintenant on dit million.
> *Un élève* : comment on va l'écrire ?
> *Soline* : c'est ce qu'on va essayer de découvrir ensemble. Il faut faire une sorte de petit tableau.

Elle trace alors ce tableau :



Le million est défini comme mille groupes de mille, ce qui confirme les choix de préparation de Soline, qui cherche à donner du sens aux grands nombres en s'appuyant sur ces relations entre unités de base mille. Le million n'apparait pas aussi comme dix groupes de cent-mille. Dans le tableau on ne voit pas le nom des rangs (centaines de mille par exemple). La prise en compte du point de vue unités de base dix (et rangs) pourrait être pourtant un moyen de dépasser les difficultés rencontrées par les élèves pour écrire les 0 que l'on n'entend pas. A contrario, l'écriture de points entre les classes pour marquer les positions des millions et des milliers, apparaît comme une réponse inadaptée car il ne serait alors plus vraiment nécessaire d'écrire les 0 que l'on n'entend pas.

Même si nous n'avons observé qu'une seule séance et qu'il faudrait aller voir comment sont utilisés les grands nombres dans d'autres activités, nous avons vu que le travail sur les grands nombres amène Soline à utiliser exclusivement un point de vue « base mille » sur l'écriture chiffrée et à abandonner le point de vue « base dix » utilisé jusqu'alors pour les nombres jusqu'à 10 000. Le principe de position (par rangs) est remplacé par un principe de position par classes, sans que le lien entre rangs et classes ne soit explicite. Cet enseignement n'est pas suffisant pour permettre aux élèves de renforcer leurs connaissances de la numération écrite, ce qui permettrait en outre de préparer le terrain de l'apprentissage des nombres décimaux.

Les grands nombres dans le programme de 2016

Le programme de 2016 pour le cycle 3, qui regroupe CM1, CM2 et 6ème, indique : « Au cycle 3, l'étude des grands nombres permet d'enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs ». Cet objectif ne doit pas faire oublier qu'à l'entrée en cycle 3 beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas suffisamment la numération des nombres inférieurs à 10 000. L'étude des nombres supérieurs peut justement être l'occasion d'enrichir les connaissances des élèves et de leur faire comprendre la régularité du système écrit. La proposition des programmes de faire des liens entre unités du système métrique et règles de numération peut aussi y contribuer. Mais il faudrait que l'enseignement des grands nombres prenne en compte l'imbrication des deux systèmes d'unités en jeu (base dix et base mille). Les programmes promeuvent l'usage des unités de numération ainsi que leurs relations, mais en mettant en avant « les regroupements par milliers ». Cela peut-il suffire à résoudre les problèmes d'enseignement que nous avons pointés à travers l'étude de cas de Soline qui ramène le fonctionnement de la numération écrite à celui de la numération parlée ?

3. Les décimaux

Des tensions dans les constructions des décimaux qui sous-tendent l'enseignement

La mesure des grandeurs de Lebesgue, texte publié initialement par chapitres dans la revue *L'Enseignement mathématique* à partir de 1932, est destiné à la formation des enseignants du secondaire. Le premier chapitre est un véritable plaidoyer pour l'écriture décimale : « Notre enseignement n'utilise pas encore pleinement ce fait historique, le plus important peut-être de l'histoire des sciences: l'invention de la numération décimale » (p. 181). Le chapitre II, intitulé Longueurs, nombres, présente alors une construction des réels à partir de suites illimitées d'entiers.

Pour y parvenir, Lebesgue construit une suite d'unités de dix en dix fois plus petites et encadre par deux suites de mesures en nombres entiers la longueur L d'un segment donné : $523u_0 \leq L < 524u_0$; $5236u_1 \leq L < 5237u_1$; $52368u_2 \leq L < 52369u_2 \ldots$ Un théorème des segments emboîtés et l'axiome d'Archimède assurent l'existence et l'unicité d'un point limite comme extrémité du segment, à qui est donc associée la suite inférieure d'entiers, et en retour permet de définir un réel comme cette suite. Cette construction mobilise des entiers et un *fractionnement de l'unité*, mais ne nécessite pas d'introduire la notation des fractions. D'ailleurs Lebesgue précise ensuite :

> « Mais parlerait-on encore des fractions dans l'enseignement primaire, dans les classes de 6$^{\text{me}}$ et de 5$^{\text{me}}$ de l'enseignement secondaire ? Non, puisque cela n'est pas indispensable à la théorie et ne sert à rien pratiquement ; car on sera bien, je pense, d'accord avec moi pour déclarer que marier des 22$^{\text{ièmes}}$ et des 37$^{\text{ièmes}}$ est un martyre que nous infligeons aux gosses de douze ans par pur sadisme, sans aucune raison d'utilité comme circonstance atténuante. (…)
> Sans doute *a* divisé par *b*, *a* sur *b*, se lit encore *a b*-ièmes quand *a* et *b* sont entiers, mais cette locution n'oblige pas plus à développer toute la théorie des fractions que la locution quatre-vingt-douze n'oblige à traiter de la numération à base vingt. » (p. 196-197)

Ces éléments manifestent des tensions entre une approche des décimaux comme cas particuliers de fractions et une approche directe en appui sur l'écriture décimale. D'ailleurs, de longue date, l'introduction des décimaux semble avoir posé question aux institutions d'enseignement. Par exemple, bien avant Lebesgue, si Bezout (1784) introduit les décimaux à partir d'unités de mesures qu'il fractionne en dix, Reynaud (1821) commence par les fractions en en proposant une théorie relativement complète (équivalence et quatre opérations). Dans les années 1970-1980, d'assez nombreux travaux de didactique s'intéressent à l'enseignement des décimaux. Plusieurs ingénieries sont élaborées à partir de la mesure des grandeurs. Brousseau et Brousseau (1987) et Douady et Perrin (1986) mettent en place une étude approfondie des fractions avant l'enseignement des décimaux et proposent des progressions s'étalant du CM1 à la 5$^{\text{e}}$, tandis que Colmez dans les années 1970-1980 envisage le fractionnement régulier et itératif de la droite graduée (en base autre que dix, puisque l'époque le veut) pour aller vers les nombres décimaux. A l'inverse des programmes de 1945 et 1970, dont il est possible qu'ils aient été influencés par le livre de Lebesgue (1932), depuis les années 1980 les programmes préconisent de plus en plus clairement une approche par les fractions.

En appui sur la mesure des grandeurs, les grandes lignes de la progression suggérée par les programmes actuels sont les suivantes :

- étude de fractions simples, équivalence des fractions simples,
- décomposition d'une fraction simple en « entier + rompu », par exemple : $\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$,
- étude des fractions décimales en prolongement des fractions simples, équivalence des fractions décimales : $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$; $\frac{100}{100} = 1$; $\frac{10}{10} = 1$; $\frac{20}{100} = \frac{2}{10}$; $\frac{400}{100} = 4$…
- décompositions en appui sur les équivalences et sur la décomposition en « entier + rompu » : $\frac{423}{100} = 4 + \frac{23}{100}$ et aussi $\frac{423}{100} = \frac{400}{100} + \frac{20}{100} + \frac{3}{100} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$,
- introduction de l'écriture décimale à partir de sommes de fractions décimales (réduites) réécrites « positionnellement » : $4 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$ = 4,23.

Certaines difficultés d'une approche par les fractions sont connues, des arguments pour une étude préalable des fractions également. Dans ses conclusions, la conférence de consensus a ainsi rappelé que si une certaine connaissance des fractions est utile pour comprendre les décimaux, le traitement des fractions est très difficile pour les jeunes élèves. Il convient alors d'identifier ce qu'il serait nécessaire de savoir *a minima* sur les fractions à l'école pour bien comprendre l'écriture décimale et les nombres décimaux. Ce sont ces réflexions que nous présentons maintenant.

Sur le plan épistémologique, quelles sont les propriétés fondamentales des décimaux qu'il semble nécessaire d'enseigner aux élèves de cycle 3 ? La construction des réels par Lebesgue apporte un élément de réponse fondamental : la densité – pouvoir approcher tout nombre ou toute grandeur par une mesure décimale-. Cette propriété est apportée par le fractionnement en parties aussi petites que l'on veut de l'unité. Douady et Perrin (1986), Bolon (1995), CREM (2011a) apportent des arguments similaires.

Quand les nombres décimaux rencontrés sont exclusivement rattachés aux unités métriques, il n'y a pas besoin d'envisager un fractionnement itératif de l'unité. Ce sont les « nombres décimaux » de la vie courante. C'était d'ailleurs l'approche des décimaux assumée par les programmes de 1945 : « 3 m et 65 cm (…). C'est l'amorce de l'écriture des nombres décimaux (qui sera étudiée au cours moyen), où la virgule remplacera le *et*. » (Instructions de 1945, cours élémentaire). Une telle approche ne permet pas d'appréhender la densité. Quelles approches de la densité sont actuellement proposées à l'école ? Quelles approches sont possibles ? L'intercalation d'un décimal entre deux décimaux apparaissait, probablement à cette fin, dans les programmes entre 1980 et 2002, elle a disparu en 2008 et est revenue en 2016[11]. Dans l'ingénierie de Brousseau, c'est une recherche d'encadrements de fractions dans un intervalle le plus étroit possible avec des réductions de fractions au même dénominateur. Les fractions décimales y apparaissent comme moyen de simplifier les calculs. Dans l'ingénierie de Douady et Perrin, comme dans celle du CREM (2011a, 2011b), c'est la recherche de la mesure d'une grandeur (incommensurable avec l'unité) ou d'un nombre (irrationnel) qui est le moteur de l'approche de la densité, par des approximations décimales successives, mobilisant des produits effectués avec des fractions décimales ou avec la calculatrice. La droite graduée apparaît ensuite comme un outil puissant pour représenter ces approximations. Un travail bibliographique plus approfondi serait nécessaire pour avancer, reprenant et actualisant celui fait par Bolon (1995) qui s'interrogeait sur les situations à

[11] L'intercalation, si elle n'est pas associée à une situation impliquant l'écart entre les nombres (comme peut l'être la recherche d'une approximation décimale de la mesure d'une grandeur par exemple), peut constituer une activité un jeu formel n'impliquant pas la réflexion des élèves sur la densité (l'ordre lexicographique utilisé pour le rangement des livres dans les rayons des bibliothèques mobilise *grosso modo* ce principe d'intercalation.)

disposition des enseignants pour travailler la densité avec les élèves. Au-delà du fractionnement itératif de l'unité en dix, quelle connaissance des fractions est nécessaire pour mener un travail, consistant, sur la densité des décimaux avec des élèves de cycle 3 ? En effet, une absence de travail sur la densité revient (probablement) à une étude des décimaux avec un ordre discret (cf. programme de 1945).

Dans la progression « des fractions aux décimaux », schématiquement les connaissances à mobiliser sur les fractions sont les suivantes : équivalence de fractions, décomposition en entier + rompu, addition dans des cas simples. Allard (2014) montre par exemple que certains des maîtres formateurs avec qui elle travaille ne voient pas ou ne savent pas comment ils pourraient *se détacher du matériel* (les bandes de papier qu'ils utilisent pour l'étude des fractions) pour justifier ces connaissances en classe. Ils se rabattent alors sur une justification algébrique.

L'enseignement des fractions, en France, actuellement, semble viser essentiellement l'introduction des décimaux. Il nous semble par suite possible que les difficultés dans l'enseignement des fractions soient accentuées par d'autres facteurs qui sont moins connus et que nous présentons maintenant. Le premier est lié au rôle mineur des fractions dans le système de mesures utilisé en France, autrement dit le système métrique, qui est adapté à l'écriture décimale. C'est par exemple très différent des pratiques sociales de mesures anglaises ou d'Amérique du nord, notamment québécoises, impliquant le système de mesures impériales (où les unités successives d'une même grandeur ne sont pas dans le rapport dix, par exemple : 1 pied = 12 pouces, puis le pouce est généralement fractionné en puissances de deux). Cet élément pourrait avoir une conséquence susceptible d'aider à comprendre les pratiques effectives des enseignants : investir un temps important d'enseignement pour un usage social réduit ne va peut-être pas de soi, notamment à l'école où beaucoup d'enseignants sont très soucieux de la dimension éducative de leur métier (Peltier 2004).

Un autre facteur, complémentaire mais plus général, est celui des *débouchés*[12] des fractions au sein de l'école. En effet, un investissement coûteux en temps d'enseignement ne peut avoir d'intérêt pour un enseignant que s'il peut en récolter les fruits (Artigue 1993, Roditi 2008). Il se pourrait que les enseignants de l'école soient ainsi pris dans des tensions de ce type. Les éléments que nous apportons pourraient nourrir la réflexion sur la répartition des savoirs au cours des différentes années du cycle, entre partage et quotient, entre opérateur et nombre, de façon à accroître les débouchés de l'étude des fractions, dès l'école.

Quel que soit le chemin choisi, l'enseignement aboutit à la mise en place, puis à l'utilisation presque exclusive de l'écriture décimale à virgule.

Certaines difficultés d'élèves et la question de l'extension des techniques connues pour les nombres entiers aux nombres décimaux

Les élèves rencontrent des difficultés à l'entrée en sixième pour multiplier un nombre décimal par cent : seulement 32% réussissent à multiplier 35,2 par 100 (évaluations nationales 6ème de 2008). Pourtant la plupart réussissent à multiplier un nombre entier par dix (89% des élèves savent multiplier 23 par 10). D'autres difficultés que les multiplications par des puissances de dix sont connues sur les décimaux, notamment la comparaison. On observe par exemple 64% de réussite en 1990 (évaluation nationale 6ème) pour la comparaison de 150,65 et 150,7 qui n'ont pas le même nombre de chiffres dans la partie décimale, alors que la comparaison des entiers ne pose pas de difficulté aux élèves à l'entrée en sixième. Ces difficultés peuvent être mises en relation avec des conceptions erronées des décimaux où parties entière et décimale

[12] Comme les bioénergies constituent de nouveaux *débouchés* pour l'agriculture.

sont vues comme un couple d'entiers séparés par une virgule et, par suite, traitées séparément (pour une synthèse voir Roditi 2007). Les élèves qui échouent utilisent en général des règles implicites inexactes qui les amènent à considérer que 150,65 par exemple est plus grand que 150,7 car 65 est plus grand que 7, en appui sur ce qu'ils savent sur les entiers.

De façon complémentaire, ces difficultés peuvent être mises en relation avec la question de l'extension des techniques connues pour les entiers au cas des nombres décimaux. Considérons l'exemple de la multiplication par cent (ou plus généralement par une puissance de dix). L'enseignement usuel semble proposer des techniques assez différentes pour les entiers et les décimaux (Charnay 2014). Il semble, en effet, que pour les entiers une technique courante à l'école consiste à écrire deux zéros à droite (« règle des zéros ») alors que pour les décimaux il s'agit de déplacer la virgule de deux rangs vers la droite. Pour cette dernière de nombreuses adaptations sont nécessaires pour traiter les différents cas : tout va bien pour 2,345 x 100 mais la virgule disparait pour 2,34 x 100 et un 0 apparaît pour 4,7 x 100 (Charnay 2014). Cette absence de liens entre une technique valable sur des entiers et une autre pour les décimaux rend plus coûteux l'apprentissage des élèves. Il y a une nouvelle technique à apprendre et de nombreuses adaptations de cette nouvelle technique à réaliser en fonctions des nombres multipliés. Pourtant, le système de numération positionnel des nombres entiers s'étend à l'écriture des décimaux selon les mêmes principes : relations décimales entre les unités et la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture (fig. 8).

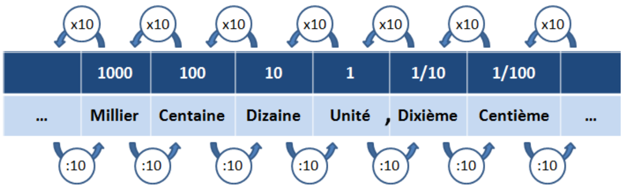


Fig. 8 :

La virgule sert à marquer la position du chiffre des unités. Cette notation a été justement inventée pour permettre l'extension de techniques (de calcul posé) des entiers aux nombres décimaux (Stevin 1585).

Pour la comparaison, on observe parfois une première technique de comparaison pour la partie entière. On compare les longueurs des deux parties entières, plus le nombre est long plus il est grand ; si les deux nombres ont la même longueur, on compare chiffre à chiffre en partant de la gauche jusqu'à trouver deux chiffres différents. Si les deux parties entières sont égales, une deuxième technique est alors utilisée pour la partie décimale. On compare chiffre à chiffre, à partir de la gauche, les chiffres des dixièmes, puis ceux des centièmes, etc. jusqu'à trouver deux chiffres qui diffèrent. La première technique s'appuie sur la longueur du nombre, propriété généralement non transférable aux écritures à virgule, la deuxième est spécifique de la partie fractionnaire (du fait de l'utilisation du nom des unités). Toutefois, elle peut s'abstenir de ces désignations et se formuler comme suit. On compare chiffre à chiffre, à partir de la gauche les chiffres de la partie décimale, jusqu'à trouver deux chiffres qui diffèrent. Cette technique est spécifique des nombres dont les chiffres les plus à gauche des nombres à comparer sont dans la même unité, ce qui est toujours vrai de la partie décimale d'un nombre en écriture décimale (le chiffre des dixièmes). Utiliser des techniques différentes pour parties entière et décimale n'aide sans doute pas les élèves à ne pas voir un décimal comme juxtaposition de deux entiers.

De l'écriture décimale des entiers à celle des décimaux

Desmet (2012) met en évidence que *certaines connaissances* sur l'écriture décimale des entiers constituent un meilleur prédicteur de la réussite sur les décimaux que *certaines* *connaissances* sur les fractions. Les travaux du CREM pointent des propriétés sémiotiques de l'écriture décimale qui se transfèrent des entiers aux décimaux et d'autres qui ne se transfèrent pas. Par exemple : un zéro terminal à droite multiplie par dix un nombre écrit sans virgule est une connaissance qui ne se transfère pas aux décimaux, puisqu'un zéro terminal à droite est sans effet sur la valeur d'un nombre écrit avec une virgule. En revanche un zéro marque une unité absente, un chiffre décalé d'un rang vers la gauche prend une valeur dix fois supérieure sont des propriétés qui se transfèrent des entiers aux décimaux. Il nous semble raisonnable de penser qu'avoir ces dernières connaissances, sur les entiers, soit un atout pour comprendre l'écriture décimale. Quelles sont les propriétés de l'écriture décimale que les enseignants pourraient investir pour nourrir les besoins qui apparaissent dans l'apprentissage sur les décimaux ? A quelles conditions, et comment pourraient-ils le faire ?

Une condition importante semble être de considérer les nombres entiers comme des nombres décimaux. Les unités de numération doivent alors être considérées à la fois selon une extension de dix en dix fois plus grande (cf. partie sur les grands nombres) mais aussi de dix en dix fois plus petite. L'écriture de la virgule pour les décimaux non entiers sert à repérer la place des unités. Nous allons illustrer ce point de vue unificateur entiers/ décimaux dans le cas de la technique de multiplication par dix ou cent puis de la comparaison.

Pour les entiers comme pour les décimaux, dans la multiplication par dix ou cent, chaque chiffre prend une valeur dix fois ou cent fois supérieure comme cela est illustré ici dans le tableau de numération (fig. 9). Cela permet de justifier à la fois l'écriture de zéros et le déplacement de la virgule).

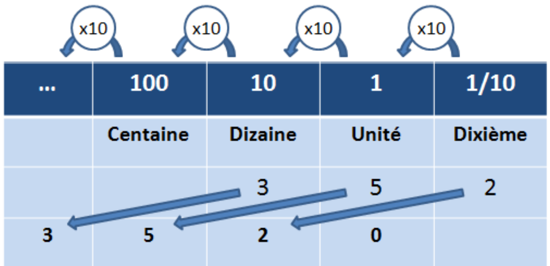


Fig. 9

On pourrait ainsi créer une technique qui rassemble les deux en une seule, en appui sur des propriétés invariantes de l'écriture décimale : quand on multiplie (resp. divise) par 100 chaque chiffre est déplacé de deux rangs vers la gauche (resp. vers la droite). On écrit des zéros à droite et/ou on déplace ou ajoute une virgule de façon à ce que cette règle soit respectée (en particulier que l'unité soit multipliée (resp. divisée) par cent).

De même, des propriétés invariantes de l'écriture décimale permettent d'envisager des extensions de chacune des techniques de comparaison que nous avons présentées, valables à la fois pour les entiers et les décimaux. En écrivant à droite suffisamment de zéros, on peut faire en sorte que chacun des nombres à comparer exprime un nombre entier d'unités du même ordre (soit à comparer par exemple 32,4 et 2,56 ; 32,4=3240 centièmes et 2,56=256 centièmes ou encore 32400 millièmes et 2560 millièmes), les techniques de comparaison des entiers reposant sur la « longueur du nombre » s'appliquent alors. De la même manière, en repérant l'ordre de l'unité le plus grand dans chaque nombre, on peut d'abord comparer ces ordres d'unité : s'ils sont différents celui qui est le plus grand indique le plus grand nombre (des dizaines et des unités dans notre exemple), s'ils sont identiques (par exemple 45,635 et 45,67) on compare alors les chiffres, de gauche à droite, jusqu'à ce que deux chiffres différents se présentent (les dizaines, puis les unités, puis les dixièmes, puis les centièmes dans notre exemple). Signalons que la première technique « rabat » les décimaux sur les entiers. Contrairement à la deuxième elle ne se généralise pas aux écritures décimales illimitées des réels (à moins d'effectuer des troncatures), ce qui est épistémologiquement cohérent.

Il existe donc des possibilités d'organisations mathématiques prenant en compte l'écriture des décimaux comme une extension de celle des entiers, s'appuyant sur des propriétés invariantes de l'écriture décimale, et permettant des extensions entre les techniques apprises sur les entiers aux décimaux. Le programme de 2016 n'est pas encore dans cette perspective puisqu'il affirme qu'il faut justifier les règles de comparaison des nombres décimaux mais qu'elles « se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers ».

Terminons cette partie en rappelant que l'extension de techniques des entiers aux décimaux n'est pas seulement une question de traitement dans le registre de l'écriture en chiffres. Par exemple la procédure de comparaison met également en jeu l'ordre de grandeur des nombres (Roditi 2007). Les élèves en difficulté font encore plus d'erreurs de comparaison lorsque les nombres sont énoncés oralement (par exemple 3 *virgule* 14 et 3 *virgule* 5) : ils pourraient rester tributaires de la technique apprise pour les nombres *écrits* en chiffres (comparaison du premier chiffre après la virgule par exemple) sans accéder à sa justification (en termes de valeurs des chiffres : ici 14 c'est 1 dixième 4 centièmes, 5 c'est 5 dixièmes) qui permet de faire des comparaisons dans d'autres registres. La réussite à la tâche de comparaison est liée à la capacité à changer de registre de représentation, notamment le placement de décimaux sur droite graduée et la mesure d'aire (*ibid.*). La question de l'influence du chemin emprunté pour introduire les décimaux sur la difficulté (ou la facilité) à étendre aux décimaux les techniques apprises sur les entiers est une question importante qui est au-delà de la portée de ce texte.

Pour conclure… quelques pistes de réflexion pour le court terme

Dans la conclusion de leur rapport sur les acquis des élèves à l'école, Chesné et Fischer (2015) suggèrent « qu'il est urgent de répondre à un certain nombre de questions, institutionnelles (Comment et quand introduire les nombres décimaux ? (…)) » (p. 41). Même si elle n'est pas incompatible avec une autre approche institutionnelle des décimaux, la conclusion de notre texte se focalise sur des ajustements envisagés dans le cadre de la progression actuelle.

Pour enrichir le rôle des fractions

Au-delà des difficultés intrinsèques de l'apprentissage des fractions, l'étude qui précède laisse penser que le rôle des fractions est trop restreint au cycle 3 pour qu'elles soient suffisamment investies par les élèves et/ou les enseignants. Quelques aménagements relativement simples pourraient peut-être permettre d'améliorer un peu la situation, à la fois sur le plan des débouchés des fractions et sur celui de leur conceptualisation :

- Une première piste pourrait être d'enrichir le travail fait avec les fractions « opérateur », en particulier les fractions de grandeur, à l'école (sans nécessairement utiliser la notation fractionnaire), en lien avec l'apprentissage de la division, plus précisément de la résolution des problèmes du champ multiplicatif, bien avant l'étude de la proportionnalité et des pourcentages.
- L'introduction d'un lien entre fractions et division (quotient), en particulier pour les quantièmes ($1{:}7 = \frac{1}{7}$ et le septième de un, c'est un septième, en relation avec 7 fois $\frac{1}{7}$=1), pourrait poser les premiers jalons du passage du « partage au quotient » sans

introduire de concept nouveau, puisque la division décimale de deux entiers est au programme de l'école.

Pour se donner plus de chance de lier fractions et écriture décimale

Dans la progression « des fractions vers les décimaux », le lien entre écriture décimale et fractions s'obtient principalement par la réécriture dans une écriture décimale à virgule de la décomposition canonique en fractions décimales qui peut sembler assez technique. Elle n'est finalement plus mobilisée dès qu'on travaille avec l'écriture décimale. Pour renforcer ce lien, une piste consiste à utiliser de façon plus systématique la lecture des écritures à virgule en appui sur le nom des unités, voire à utiliser conjointement une lecture chiffre par chiffre comme cela se fait dans certains pays :

- Une technique pour *lire* un nombre écrit en écriture décimale, par exemple 17,25, est la suivante. Il suffit de lire la partie entière et de lui juxtaposer le « nombre entier » qui constitue la partie décimale en terminant par le nom du rang du chiffre le plus à droite (ici, des *centièmes*), donc 17,25 peut se dire 17 et 25 centièmes. La technique chiffre par chiffre donne une autre désignation fractionnaire : 17 unités 2 dixièmes et 5 centièmes.
- 0,27 et $\frac{27}{100}$ peuvent se lire respectivement : « 0 virgule 27 » et « 27 sur 100 », deux locutions qui ne disent rien de l'égalité des nombres. Pourtant la première des deux techniques précédentes permet d'opérationnaliser le lien entre les écritures à virgule et les écritures fractionnaires (décimales) : 0,27 peut se dire 27 centièmes[13] et $\frac{27}{100}$.peut se dire 27 centièmes car 27 est au numérateur et 100 est au dénominateur.
- La même technique permet d'ailleurs d'obtenir, à défaut de la justifier, une égalité telle que un dixième = dix centièmes en écrivant des « zéros inutiles » (0,1 = 0,10), c'est-à-dire des zéros qui ne changent pas la valeur du nombre mais qui permettent de faire des conversions à peu de frais et apparaissent alors particulièrement utiles. La lecture de 0,10 par les deux techniques donne d'ailleurs directement la conversion.
- La première technique peut permettre de contrôler certains calculs, par exemple :

> Pour l'addition 0,5 + 0,6, Morgane répond 1,1.
> [Enseignant] « Comment as-tu fait ? »
> [Morgane] « J'ai fait 5 + 6 ça fait 11. »
> [Enseignant] « Pourquoi ne peut-on pas écrire 0,11 ? »
> [Morgane] « Parce sinon ça tombe dans les centièmes et là ce sont des dixièmes. (CREM 2011c, p. 23)

Pour renforcer la compréhension de l'écriture décimale

Un axe complémentaire est celui du renforcement de la compréhension de l'écriture décimale des entiers, en considérant tout ce qui concerne les propriétés invariantes de l'écriture décimale pour les entiers et les non entiers. Par exemple :

- Les différentes positions indiquent des unités dont l'ordre de grandeur est différent : de dix en dix fois plus grand quand on va vers la gauche, de dix en dix fois plus petit quand on vers la droite,
- Un signe marque l'unité : le chiffre de droite pour l'écriture sans virgule, le chiffre à gauche de la virgule pour l'écriture… avec virgule,
- Le zéro est un gardien de place inoccupée, etc.

[13] 0,27 ne devrait-il toujours se lire 27 centièmes au cycle 3, en utilisant éventuellement les deux façons ?

Les unités de numération constituent ainsi un outil sémiotique qui permet de décrire les écritures décimales sans et avec virgule. Les écrire peut cependant devenir rapidement fastidieux, surtout dans le cas des grands nombres, peut-être aussi dans le cas des décimaux où elles constituent une lecture possible de l'écriture fractionnaire et à virgule mais ont peut-être peu de raisons d'être à l'écrit.

Un autre axe notamment développé par le CREM (2011a, 2011c) pour la mise en place de dispositifs de remédiation est le repérage de règles utilisées pour les entiers et non transférables aux décimaux, mais que certains élèves utilisent dans les deux cas. Par exemple :

- Un zéro terminal à droite multiplie le nombre par dix,
- Pour additionner des nombres, on procède à partir de la droite, ainsi 0,4+0,04= 0,8 ; 6+0,1=0,7, etc.

Bolon indiquait en 1993 :

> Il est inutile de travailler sur les décimaux si les propriétés de la numération sont « flottantes » pour des entiers : multiplier par 10, 100, 1000 ou par 20, 300, 4000, doit se faire sans erreur. De même, en calcul mental, la recherche des quotients et restes dans les divisions par 10, 100, 1000 doit être un exercice banal (…). (p. 72-73)

Pourtant les éléments d'aide à la programmation du document d'application des programmes de 2002 indiquaient que la division par 10, 100, 1000 devait être approchée ou préparée au CM1, en construction ou structuration au CM2, et non enseignée jusqu'au CE2. Ce choix a été confirmé par les textes de 2008. Le programme de 2016 est timide sur ce point.

Pour appréhender la densité

Bolon (1993) indiquait quelques lignes plus loin :

> Un des points qui me paraît capital est la liaison entre ordre et addition insuffisamment installée sur les entiers. Le contrôle des écarts entre les nombres sur la droite numérique me paraît indispensable pour que le calcul des encadrements ait du sens. (p. 74)

La droite graduée, notamment grâce au « zoom » qui permet d'une part de s'affranchir des unités métriques et de représenter le fractionnement itératif, d'autre part de représenter ordre et écarts relatifs (grâce à la double signification de l'abscisse : position et longueur) apparaît ainsi comme un outil essentiel. Il importe alors de s'attacher à ce que les élèves comprennent cet objet.

Références

Allard C. (2014) *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* Thèse de l'Université de Paris 7.

Allard C. (en préparation) *Pratiques des enseignants sur les fractions à la charnière école-collège.*

Artigue M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM, 11*, 115-139.

Bezout E., Reynaud A.A.L. (1784/1821) *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9e édition. Notes sur l'arithmétique de Bezout, par A.A.L Reynaud (1821)

Bolon, J. (1993) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N, 52,* 49-79.

Bolon J. (1995). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège.* Thèse de l'Université René Descartes Paris V

Brousseau G., Brousseau N. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux 1.

Chambris, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM, 69*, 5–31.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e^ siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Charnay R. (2014) *La culture mathématique, c'est dès l'école primaire ! Réflexions sur les programmes scolaires.* Conférence aux journées nationales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 18-21 octobre 2014, Toulouse.

Chesné J.-F. (2007) Du partage au quotient, Disponible en ligne : http://maths.ac-creteil.fr/spip.php?article39 (consulté le 14/02/2017).

Chesné J.-F. (2014) *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.* Thèse de l'Université Paris-Diderot.

Chesné J.-F., Fischer J.-P. (2015) Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. CNESCO. http://www.cnesco.fr/fr/numeration-acquis-des-eleves/ (consulté le 14/02/2017).

CREM (2011a). *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux, Rapport final.* Michaux C. (Dir.), Rouche N. (Dir.), Grégoire J. (Dir.), Desmet L., Skilbecq P., Fanuel J., Soille S. Nivelles, Belgique : CREM

CREM (2011b). *Enseigner et apprendre les nombres décimaux. Activités en 4^e^ primaire. Fascicule à destination des enseignants.* Nivelles, Belgique : CREM

CREM (2011c). *Enseigner et apprendre les nombres décimaux. Activités de remédiation en 5^e^ et 6^e^ primaire. Fascicule à destination des enseignants.* Nivelles, Belgique : CREM

Desmet L. (2012). *L'apprentissage des nombres décimaux, des nombres rationnels représentés par le système décimal de position.* Thèse de l'Université catholique de Louvain. Belgique.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1986) *Nombres décimaux*. Brochure n° 62 Paris : IREM Paris 7.

IGEN (2004/2006) « Les nombres au collège ». Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège. Disponible en ligne : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf (consulté le 14/02/2017).

Lebesgue H. (1932) Sur la mesure des grandeurs. (Partie 1) *L'enseignement mathématique. 31*, 173-206.

Ligozat F., Leutenegger F. (2004) La bivalence mathématique et langagière dans les pratiques d'enseignement sur la numération. *Actes du 9^ème^ colloque de l'AIRDF*. Québec, Canada.

Mercier A. (1997) La relation didactique et ses effets. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »* (pp. 259-312), Paris : L'Harmattan.

Peltier M.-L. (Ed) (2004) *Dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La Pensée Sauvage

Perrin-Glorian M.-J. (2012) Quelques réflexions sur l'enseignement des nombres et grandeurs au long de la scolarité obligatoire. *Contribution à la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques du 13 mars 2012.* en ligne http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions

Roditi E. (2007) La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *12*, 55-81

Roditi E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck (Ed.) *La classe de mathématiques, activités des élèves et pratiques des enseignants.* (pp. 73-94*).* Toulouse : OCTARES.

Salin M.-H. (1997) Contraintes de la situation didactique et décisions de l'enseignante. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*. (pp. 31-57) Paris : L'Harmattan.

Stevin S. (1585) *La disme*.

Tempier F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris 7.

Tempier F. (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, *98*, 67-90.

Thomas C. (2014). *A la recherche des fractions de grandeurs au cours moyen*. Mémoire de master. Université Paris-Diderot.