LA FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES EN MASTER PREMIERE ANNEE A L'UNIVERSITE D'ARTOIS : QUELLE UTILISATION EN FORMATION DE RESSOURCES ISSUES DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ?

Carole Baheux[35], Françoise Chenevotot[36], Marie-Pierre Galisson[37], Christine Mangiante[38]

Résumé - Depuis septembre 2012, la formation en master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » se déroule en alternance. Dès la première année et chaque semaine, les étudiants reçoivent une formation théorique et une formation didactique tout en consacrant un jour entier à leur stage de pratique accompagnée.

Cette communication comporte deux volets.

Nous commencerons par présenter la nouvelle organisation de la formation puis nous centrerons notre propos sur le module de didactique des mathématiques dont nous préciserons les objectifs. Quelles sont les ressources utilisées au cours de cette formation ? Quel appui sur des articles liés aux recherches ? Pour quel(s) usage(s) et avec quelles intentions ?

Pour étudier plus précisément comment certaines notions issues de la didactique des mathématiques sont réinvesties ici à des fins de formation, nous retracerons ensuite les différentes étapes du travail du formateur. Nous illustrerons notre propos en décrivant comment, du choix des articles de recherche, à la conception de ressources pour la classe, puis à l'analyse a posteriori d'une séance en classe, le formateur cible quelques notions de didactique des mathématiques : « changement de cadres », « registres de représentation », « niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ». Enfin, nous analyserons en quoi ce dispositif lui permet d'atteindre (ou pas) les objectifs qu'il s'était fixés.

A l'Université d'Artois, la formation des futurs professeurs de mathématiques de lycée et de collège en Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » se déroule en alternance depuis le 1er septembre 2012.

Dans cette communication, après avoir décrit cette nouvelle organisation de la formation pour la première année du Master, notre intention est de présenter quelques ressources utilisées dans le dispositif de formation, les choix qui les ont motivées, les fonctions qu'elles sont censées remplir, la manière dont elles ont été utilisées en formation et quelques « effets » qu'elles ont pu produire en terme de pratiques chez les futurs professeurs.

[35] Université d'Artois, LML, France, carole.baheux@univ-artois.fr

[36] Université d'Artois, IUFM Nord/Pas de Calais – LDAR, France

[37] Université d'Artois, IUFM Nord/Pas de Calais – LDAR, France

[38] Université d'Artois, IUFM Nord/Pas de Calais – LML, France

1. Le contexte de la formation initiale en première année de Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » au sein de l'Université d'Artois

1.1. Un Master en alternance en 2012-2013

Le Master « Métiers de l'Enseignement et de la Formation en Mathématiques » se déroule par alternance à l'Université d'Artois. Ce dispositif, expérimental pour l'année 2012-2013, n'est proposé que par notre Université.

Dès la rentrée, les étudiants de première année ont effectué un stage d'observation et de pratique accompagnée. Ce stage s'est déroulé du 15 septembre 2012 au 15 mai 2013 à raison d'une journée par semaine dans un même établissement. Les étudiants ont été accueillis dans la classe d'un maître de stage pendant 4 heures par semaine, ce qui constitue 100 heures en immersion dans l'année.

Pendant le premier semestre, les étudiants ont observé les pratiques du maître de stage mais ont également dû se renseigner sur tous les intervenants d'un établissement scolaire.

Au cours du second semestre, les étudiants ont pu corriger des exercices, préparer et corriger des devoirs en classe et/ou à la maison et surtout préparer et conduire des séances devant les élèves. Le maitre de stage étant toujours au fond de la salle, les étudiants n'ont eu que peu de gestion de classe à faire et ainsi pu se consacrer entièrement à leur pratique professionnelle.

En plus du stage de 100 heures en immersion, les étudiants de première année ont eu la possibilité de faire, sur la base du volontariat, 50 heures d'accompagnement éducatif ou d'aide aux devoirs, ce qui leur a permis d'être seuls face à de petits groupes d'élèves tout en percevant une petite rémunération.

Les établissements scolaires potentiels ont été proposés par la Division de l'Organisation Scolaire du Rectorat et validés par les Inspecteurs d'Académie – Inspecteurs Pédagogiques Régionaux.

1.2. Caractérisation de la formation

Le préambule de la maquette du Master signale :

> « Cette formation professionnelle ne saurait se limiter à l'envoi des étudiants dans les classes, elle doit aussi s'articuler avec une réflexion didactique, pédagogique, disciplinaire et épistémologique qui suppose des allers retours réflexifs entre terrain et formation ».

La prise en compte d'un double cursus simultané nécessite de penser autrement l'articulation formation théorique / formation pratique et témoigne d'une volonté d'accorder de la place aux mises en situations professionnelles et à l'analyse de pratiques professionnelles.

La formation met en valeur une réelle progression durant les stages avec un stage d'observation puis de pratique accompagnée en première année et un stage en responsabilité de 4 à 5 heures par semaine de la prérentrée à la fin de l'année scolaire en deuxième année.

Un accent est aussi mis sur la dimension « métier de la communication » avec la place des compétences orales :

- Un rôle crucial dans l'exercice du métier : faire des cours de mathématiques à différents niveaux de l'enseignement secondaire avec le regard du professeur qui doit expliquer, plutôt qu'avec le regard de l'étudiant qui doit (seulement) apprendre ;
- Un objectif double : préparer à l'oral et à l'écrit du concours mais aussi à l'exercice du métier en ayant un regard critique sur les manuels, les programmes.

Une part importante est également octroyée aux enseignements de didactique des mathématiques tant dans leur dimension théorique (en amont des pratiques) que dans leur dimension pratique (analyse des pratiques).

1.3. Contenus et objectifs de la formation

La formation en première année de Master s'organise autour des quatre blocs suivants.

Les « savoirs disciplinaires » constituent un premier domaine :

- Renforcer la maîtrise des savoirs mathématiques à enseigner ;
- Initier les étudiants aux méthodes de la recherche, qu'elle soit disciplinaire ou qu'elle soit en lien avec la didactique des Mathématiques.

La « culture professionnelle disciplinaire » comprend des modules d'histoire et d'épistémologie des disciplines scientifiques, de didactique des mathématiques, les Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE).

Ses objectifs sont :

- Permettre aux étudiants de prendre du recul par rapport aux programmes scolaires et de comprendre l'évolution des objets enseignés ;
- S'approprier l'usage pédagogique des Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE)…

La « culture professionnelle générale » regroupe la connaissance du système éducatif, la connaissance des publics scolaires (adolescence, environnement social et économique, éthique et déontologie professionnelle…).

Les « stratégies d'intervention éducative » rassemblent des thèmes comme l'apprentissage scolaire, la gestion éducative de la classe, les types d'évaluation des élèves, le travail en équipe, l'innovation et la recherche…

2. Les intentions déclarées des formateurs en culture professionnelle et didactique en première année de Master en 2012-2013

Nous ne citons ici que les intentions des formateurs qui assurent des séances de formation professionnelle.

2.1. Formation pratique

Pour la préparation du stage d'observation au 1er semestre, l'enjeu principal est d'amener les étudiants à « voir tout ce qui peut être observé dans une séance ». La grille d'observation, élaborée collectivement avec les étudiants l'année dernière, est donnée directement par le formateur cette année car les étudiants sont en stage dès septembre.

La progression conçue en 2012-2013 s’articule autour de :

- La question de la gestion de la classe (perçue comme cruciale par les étudiants) est abordée essentiellement à partir du DVD diffusé par l’Académie de Créteil (sitographie) ;
- Un travail sur les contenus : comprendre comment enseigner à partir d’une vidéo (un énoncé ou sa solution proposés par l’étudiant dans une classe) et d’une analyse de productions d’élèves (des copies d’élèves de lycée) ;
- La rédaction d’un rapport de stage s’appuyant sur l’utilisation de la grille d’observation lors d’une séance complète prise en charge par l’étudiant et filmée.

Pour la préparation du stage de pratique accompagnée au second semestre, les étudiants sont amenés à travailler sur les transitions primaire-collège et collège-lycée à partir de documents institutionnels (les instructions officielles et les documents d'accompagnement) et d'articles de recherche. Ils ont également été confrontés aux enjeux de la correction des copies et de la notation à partir d'un échantillon de copies de Terminale S.

Ils doivent également produire un rapport de stage centré sur l'analyse d'une séance menée en classe. Comparativement au rapport de stage demandé au premier semestre, les étudiants doivent ici approfondir les aspects mathématiques et didactiques.

L'accompagnement à la rédaction du rapport est l’occasion de lire les instructions officielles et d’aborder leurs implicites, l'analyse a priori et a posteriori d'exercices et d'activités. Ces temps de travail permettent de mettre les étudiants en contact, sur des cas très précis, avec les enjeux didactiques de l'enseignement de l'algèbre, de la proportionnalité, de la démonstration, de la géométrie dans l'espace...

2.2. Formation théorique

Pour le module « Mathématiques, discipline scolaire » qui représente 60 heures au premier semestre, les objectifs sont triples :

- Connaître les programmes ;
- Réfléchir sur les enjeux de l'enseignement de l'analyse, de la géométrie (plane et dans l'espace) et des probabilités. Les modalités de travail sont l’examen des instructions officielles, de productions d'élèves, d’erreurs classiques. Une mise au point mathématique sur certains aspects nouveaux et délicats des programmes de lycée (probabilités, statistique) est effectuée.
- Préparer à l'épreuve d'oral 2 (EOD) à partir d'exemples de sujets.

Pour le module relevant de la didactique au second semestre, le contexte de la mastérisation, la mise en place de l’alternance, incitent les formateurs à s’inscrire dans les axes mis en exergue dans le préambule du texte de la maquette :

> « [une formation qui] doit s’articuler avec une réflexion didactique, pédagogique, disciplinaire et épistémologique qui suppose des allers retours réflexifs entre terrain et formation ».

La formation en didactique des mathématiques est limitée à une UE de 36 heures au second semestre en 2013 en raison de la préparation du concours exceptionnel. Conçue par les formateurs pour être en cohérence avec les préparations aux stages, elle traite de deux domaines travaillés au collège et au lycée : l’algèbre et la géométrie.

3. Les choix des formateurs pour la formation en didactique en première année de Master en 2012-2013

3.1. Contraintes de formation et marges de manœuvre

Les choix des formateurs sont soumis à certaines contraintes.

La maîtrise de l'oral et plus largement du langage (les exposés divers, les exposés de leçons, les oraux préparés, les présentations de séances, les discussions) constitue un premier axe fédérateur. La question des registres langagiers dans le domaine des mathématiques est l'occasion d'une sensibilisation aux registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993).

Le rôle dévolu au stage filé, à savoir, sensibiliser sur la durée d'une première année les étudiants à la non congruence des temps de l'enseignement et de l'apprentissage, permettre des prises de conscience des contraintes du métier à partir d'expériences personnelles issues de la prise en charge d'une classe spécifique, nous conduit à une priorité : donner sens à des outils issus de la recherche en didactique pour aider à la construction de situations d'enseignement / apprentissage qui pourront être expérimentées dans des classes.

Toutefois, des marges de manœuvre sont ménagées.

Le contexte institutionnel se prête à un travail en amont des situations de travail qui pourrait d'une certaine façon « armer » le futur enseignant :

> « Pour éviter une imprégnation socialisante trop exclusive par la culture locale, un travail en amont sur l'espace de référence est déterminant. Son objectif serait d'alerter 'l'environnement cognitif' du sujet pour que la confrontation au champ réel de l'activité se passe sur un mode réflexif plutôt 'qu'imprégnatif' » (Beckers, 2007).

Nous nous inspirons dans ce contexte d'un type de formation développé pour les professeurs des écoles :

> « Une stratégie de transposition de type didactique passe par une adaptation, à la charge du formateur, du savoir didactique auquel il se réfère, pour le transmettre aux étudiants. Cette adaptation passe par une réflexion sur les objets didactiques utiles aux futurs professeurs d'école et la construction de situations de formation permettant la transmission de ces objets » (Houdement, 1995, pp. 4).

Les limites sont connues : il s'agit de transmettre des savoirs explicitables, théoriques et pratiques qui ne peuvent constituer l'ensemble des savoir–faire et savoir en usage dans le métier.

3.2. Choix des thèmes d'étude

Si la formation en didactique s'appuie sur deux domaines (l'algèbre et la géométrie), nous faisons le choix de développer ici le domaine de l'algèbre élémentaire (son enseignement et son apprentissage au collège et en seconde) ce qui correspond à 16 heures de formation sur les 36 heures de l'UE. Nos motivations sont diverses.

3.2.1 Du côté de l'algèbre enseignée

Nos étudiants effectuent leur stage en collège et éventuellement en seconde. L'algèbre élémentaire (calcul littéral, mise en équation et résolution algébrique, liens avec les fonctions) dispute (en partie) à la géométrie élémentaire le statut du domaine de la sensibilisation à la « rationalité mathématique ». Depuis la parution des nouveaux programmes, cette situation est notamment mise en évidence par des documents officieux (documents d'accompagnement des programmes), des rapports ministériels (citons, par exemple, Kahane (2002)).

Par ailleurs, il apparaît clairement aux étudiants comme aux enseignants que la maîtrise des compétences algébriques est une passerelle pour le lycée, un passage incontournable pour les études supérieures.

Du côté de la formation, la difficulté pour les enseignants d'établir un rapport idoine à l'algèbre élémentaire enseignée au collège et au lycée a fait l'objet de nombreux constats et suscité nombre de recherches.

3.2.2 Du côté de la didactique de l'algèbre

Le développement des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire a été initié en France dès les premiers travaux de didactique (Brousseau, 1972) puis s'est propagé internationalement. En témoigne la profusion de travaux français et internationaux (sans oublier les travaux relatifs à l'épistémologie de l'algèbre) qui diffusent depuis près de quarante ans. Certains ont pris comme entrée l'élève et les savoirs relatifs à l'apprentissage de l'algèbre par les élèves (Kieran, 2007), (Grugeon, 2000), d'autres ont privilégié une entrée par les pratiques enseignantes (Bednarz, Kieran & Lee, 1996), (Lenfant-Corblin, 2002), (Coulange, 2001). D'autres encore interrogent les enjeux de l'algèbre en termes de transposition didactique dans l'enseignement (Chevallard, 1985, 1989, 1990). Ces travaux ont donné lieu à plusieurs synthèses dont celles de Kieran en 2007 et un numéro hors-série de la revue RDM en 2012 (Coulange & Drouhard, 2012).

3.2.3 Du côté de l'enseignement

Les recherches sur les pratiques enseignantes et sur le développement professionnel des enseignants connaîssent depuis les années 90 un essor semblable. Des travaux internationaux (Schulman, 1986), (Ball, 2005) par exemple, français pour lesquels nous retenons notamment (Robert, 2008), (Lenfant-Corblin, 2002), (Grugeon, 2006) fournissent un grand nombre de références pour le chercheur.

3.3. Ressources

3.3.1 Ressources transversales

Pour le formateur, les visées sont pragmatiques : définir un certain nombre de concepts didactiques dont l'usage dans les pratiques, et notamment dans des pratiques concernant l'enseignement de l'algèbre, favorisera l'analyse a priori et a posteriori de situations d'apprentissage.

Un premier travail consiste à dégager des concepts outils pour les pratiques. Le formateur s'est appuyé sur l'ouvrage (Robert & al, 1999) rédigé par A. Robert (didacticienne), M. Lattuati (professeure de lycée) et J. Penninckx (IPR), principalement sur le chapitre intitulé « Des outils pour analyser des notions mathématiques ». Explicitées, accompagnées d'exemples, certaines notions semblent particulièrement importantes pour travailler sur la conception de situations d'enseignement : la notion de variable didactique – le caractère outil/objet – les cadres et changements de cadres – les registres – les niveaux de conceptualisation – les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.

3.3.2 Ressources pour l'enseignement de l'algèbre

Le formateur prend en compte un premier type de ressources : des ressources partagées avec les étudiants dont l'enjeu est qu'elles constituent des outils pour la classe.

Le document « Du numérique au littéral » (première publication en 2006) est un document de référence pour les étudiants. Les notions abordées, à savoir, les différents usages de la lettre, les différents statuts du signe « = », les formules et l'introduction des lettres, la résolution algébrique d'un problème, les deux aspects « procédural » et « structural » d'une expression algébrique et enfin le calcul littéral et la démonstration sont présentées et illustrées par des exemples, une progression, une rubrique sur l'utilisation du tableur. Elles couvrent l'ensemble des notions enseignées au collège pour lesquelles les étudiants devront remettre en question l'apparente évidence qu'ils leur confèrent.

Le document plus récent « Ressources pour la seconde » (2009) constitue un autre appui plus ponctuel. Les sous-rubriques « fonctions » dans le paragraphe « Programmes et éléments de logique et de raisonnement » mettent l'accent sur les liens entre équations et définition de la courbe représentative d'une fonction, « traductions » de propriétés dans des registres distincts (l'expression d'une inégalité dans la langue naturelle, en termes d'intervalle ou d'expression algébrique par exemple), sur la nécessité d'amener les élèves à l'usage des quantifications encore implicites au collège (énoncé de règles de calcul, des identités remarquables) selon le statut des énoncés (équations, fonctions). Le paragraphe « Langage courant et langage mathématique » suggère des occasions de travailler sur les clivages entre langage naturel et langage mathématique, notamment à partir d'exemples portant sur la résolution d'équations. Ces aspects, comme dans le premier document, constituent pour les élèves et pour les étudiants qui doivent en prendre conscience des conditions cruciales pour l'entrée dans un mode de pensée fonctionnel et la rationalité mathématique.

Ces documents renvoient plus ou moins explicitement à des travaux issus de la recherche. Par exemple, pour le document dédié au collège, ces références sont implicites (Combier & al, 1996) ou explicites et citées en notes de bas de page (Sfard, 1991).

Le formateur s'appuie aussi sur un second type de ressources issues de la recherche mais accessibles en partie aux étudiants telles celles qui filigranent les documents d'accompagnement : des articles extraits de revues (Petit x, Repères IREM, publications de l'INRP et de l'IREM). Ces articles feront partie des supports du dispositif de formation et seront proposés en bibliographie même s'ils ne seront pas totalement explorés.

Une dernière catégorie de ressources est gérée librement par les étudiants (manuels, ressources numériques…). Ces ressources constituent des outils pour le travail en formation et visent à permettre aux étudiants de produire leurs propres ressources.

3.4. Enjeux de la formation

Plutôt que de mener une réflexion à long terme mais segmentée sur des thèmes certes cruciaux quoique détachés du contexte des pratiques du métier, l'objectif est d'amener les étudiants à élaborer des ressources, à les discuter, à les mutualiser. Dans le contexte de cette formation, il s'agit donc de les amener à concevoir un chapitre de cours comprenant une situation d'apprentissage, des exemples, un cours rédigé, des exercices et un DS ; la séance d'exercices sera mise en œuvre en classe et fera l'objet d'une analyse. Il s'agit enfin de sensibiliser les étudiants au travail documentaire entendu comme un processus consistant à :

> « rassembler des ressources, les sélectionner, les transformer, les recomposer, les partager, les mettre en œuvre… » (Gueudet & Trouche, 2010).

Les enjeux pour le formateur sont les suivants :

- Faire en sorte que les étudiants mobilisent des connaissances dans le domaine de l'algèbre et des outils pour construire une ressource constituant un chapitre de cours ;
- A partir de l'exploitation de ces ressources dans le cadre d'une séance d'Analyse Didactique de Pratique Professionnelle (ADPP) dans la classe d'un professeur sensibilisé à la didactique, favoriser l'appropriation d'un certain nombre de concepts clés utilisables pour concevoir et évaluer en temps réel (en termes d'objectifs d'apprentissage) l'activité mathématique des élèves.

Il s'agit donc d'aider les étudiants à appréhender les difficultés de l'enseignement de l'algèbre et notamment :

> « à comprendre le renversement de pensée demandé à l'élève, eux qui ont le plus grand mal au contraire à réinventer des solutions arithmétiques » (Artigue, 2002, pp. 229).

4. Le dispositif de formation

La formation est constituée de quatre séances d'environ 3 heures réparties sur trois mois et d'une séance d'ADPP.

4.1. Première séance : « Procédures et erreurs des élèves en algèbre : quelles connaissances nécessaires pour le professeur ? »

4.1.1 Première étape

La séance a pour objet de sensibiliser les étudiants à leur propre rapport à une algèbre « naturalisée » et de prendre en compte les passages entre modélisation arithmétique et modélisation algébrique, calcul numérique et calcul algébrique. Les tâches demandées tendent à mettre en évidence les limites du raisonnement algébrique, les différences entre les divers types de raisonnement et à approcher la notion de cadres et de niveau de conceptualisation.

Les supports correspondent aux trois problèmes donnés en annexe 1.

Questions posées aux étudiants :

- Résoudre les problèmes ;
- Analyser vos démarches de résolution ;
- Quel langage utilisez-vous pour modéliser le problème ?

- Quelles procédures de calcul utilisez-vous ?
- De quels outils de contrôle disposez-vous lors de la résolution ? A quel(s) niveau(x) scolaire(s) ces problèmes sont-ils accessibles ? Quelles sont les compétences mobilisées ?

Le premier problème est résolu algébriquement par cinq étudiants sur six. La résolution arithmétique (un étudiant sur six) met en évidence son économie. Le second problème illustre la pertinence d'un raisonnement arithmétique dans les problèmes de type « partage proportionnel ». Le troisième problème, proposé dans un cadre géométrique, met en lumière les divers cadres qui peuvent être mobilisés (numérique, algébrique, géométrique) ainsi que la notion de niveau de conceptualisation (géométrie élémentaire avec recours au théorème de Thalès en 3ème, étude des configurations géométriques à l'aide des nombres complexes en Terminale S) et l'économie d'un recours aux transformations géométriques.

Ce travail aboutit, après discussion, au tableau 1 ci-dessous, censé mettre en place quelques jalons sur différents modes de pensée mathématiques.

Cadre numérique	**Cadre algébrique**	**Cadre géométrique**
Langage naturel	Langage symbolique	Langage des grandeurs/ langage algébrique
Recherche et calcul des inconnues intermédiaires s'effectuant en fonction du contexte Expressions numériques renvoyant au contexte	Introduction d'une lettre désignant l'inconnue et production d'écritures numéro-littérales décrivant la situation Expressions algébriques relevant (implicitement pour l'élève) des fonctions	Elaboration d'une proportion (égalité de deux rapports de grandeurs) Egalité de deux quotients
Opérations arithmétiques dont l'ordre d'effectuation est réglé par le déroulement de l'histoire	Usage d'opérations formelles pour transformer les expressions algébriques	Utilisation des propriétés de l'homothétie (alignement centre, point, point image) Utilisation des propriétés des configurations de Thalès
Signe d'égalité renvoyant au résultat d'une procédure de calcul	Signe d'égalité relevant dans les premières étapes d'une relation d'équivalence	Signe d'égalité renvoyant d'abord à la définition d'une proportion
Résolution restant dans le cadre numérique	Résolution impliquant des changements de cadre : cadre numérique / cadre algébrique	Tracé géométrique pour la première question ; cadre numérique pour la seconde question (ou simple mesurage)
Contrôle s'exerçant à toutes les étapes	Contrôle du sens échappant lors du traitement algébrique de l'équation	Contrôle lié aux grandeurs

Tableau 1 – Différents modes de pensée mathématiques

4.1.2 Deuxième étape

Il s'agit cette fois de dégager, à partir de travaux d'élèves extraits d'anciens mémoires de Professeurs de Lycée et de Collège 2ème année (PLC2), les obstacles auxquels sont confrontés les élèves et de permettre l'exploration du document d'accompagnement « Du numérique au littéral ». Le travail d'analyse de productions d'élèves se fait en binômes.

Les supports comprennent des productions d'élèves de 4ème et de 2nde (non jointes) et les documents d'accompagnement des programmes.

Questions posées aux étudiants :

- Etablir une typologie des erreurs recensées à partir des documents proposés (éventuellement de vos propres expériences avec des élèves). On pourra distinguer ce qui relève du statut de la lettre, du statut de l'égalité, des transformations d'expressions algébriques (littérales dans les programmes en usage) ; des changements de registres langagiers ;
- Repérez-vous des règles implicites utilisées par les élèves ? Quelles sont vos hypothèses quant à leur origine ?

Le document d'accompagnement « Du numérique au littéral » ne développe pas précisément d'explications sur l'origine des difficultés rencontrées par les élèves (en dehors du sens de l'égalité ou de la prise en compte des deux aspects « structural » et « procédural » d'une expression algébrique). L'explicitation de certaines erreurs et de leur origine invite à s'appuyer sur d'autres références : des extraits d'articles en lien avec les discussions menées avec les étudiants sur les erreurs des élèves et leurs origines.

	Erreurs	**Origine**
Statut de la lettre et exemples		
Les lettres en tant qu'objets	5*y* comme 5 yachts	Lien avec l'usage des lettres dans les pratiques sociales et avec les unités de grandeurs
Lettres ne représentant qu'une seule valeur	*x* +*y*+*z* = *x*+*p*+*z*, est-ce vrai ? toujours, jamais, parfois ? Jamais *p* et *y* sont toujours des valeurs différentes : une lettre différente pour des valeurs différentes	Lien avec l'expérience arithmétique des élèves : un symbole désigne une valeur « 3 », dans l'équation « *a*+2=5 », *a* désigne 3
Compréhension des expressions algébriques et de leurs transformations		
« Assembler » en addition algébrique	Pour une réponse attendue n+3, réponses données 3n ou n^3	Pour une réponse attendue n+3, réponses données 3n ou n^3
Confusion analogue entre puissances et produits		Loi de simplification (valide en arithmétique reposant sur la règle élève d'achèvement des calculs numériques)
Utilisation des parenthèses pour produire une expression littérale	Modélisation de l'aire de surface d'un rectangle (a+m)p Donnant lieu à : am×p	Croyance que les calculs s'opèrent de gauche à droite (parenthèses non nécessaires), croyance en usage aussi en arithmétique. (prégnance de l'aspect procédural dans document d'accompagnement
Les manipulations aveugles sur les expressions littérales	Exemple (Chevallard, 1989, p.46) de l'élève qui sait factoriser mais qui ne peut valider son résultat en donnant à x des valeurs qui lui permettrait de vérifier	La difficulté de prendre en compte deux aspects : la sémantique (le sens des écritures) et leur syntaxe (leur règle de fonctionnement)
L'absence de contrôle de la validité des solutions		Même origine : référence au document d'accompagnement de seconde en lien avec la notion de « phrase ouverte », la signification des symboles entre deux expressions (« = », « > », « < ») et les quantifications existentielle et universelle (p.5)
Les changements de registres langagiers		
L'absence ou la production d'expressions littérales erronées pour modéliser algébriquement une situation	Exemples extraits des productions d'élèves	La difficulté à articuler plusieurs registres langagiers : langage naturel, langage symbolique (mais aussi registres relevant du géométrique, du graphique...)

Tableau 2 – Erreurs d'élèves et leurs origines

Dans la bibliographie distribuée pendant le cours, le formateur renvoie à la lecture de (Combier & al, 1996, pp. 7-26), dont le premier chapitre reprend des points importants extraits des revues Petit x 5, 19 et 23. Il insiste sur les deux objectifs de l'enseignement de l'algèbre relevés par Chevallard : assurer un maniement formel du calcul algébrique sans en faire un enseignement formaliste, donner sens au calcul algébrique en instaurant des liens entre numérique et algébrique. L'hypothèse pour le formateur est que les contenus des documents d'accompagnement, les quelques éléments extraits de travaux publiés dans des revues « accessibles » en lien avec les activités menées peuvent, sinon modifier le rapport à l'algèbre des étudiants, du moins leur faire prendre conscience de la complexité de son enseignement.

4.2. Deuxième séance : « Situations d'apprentissage : autour de la notion d'activité dans les programmes, les manuels, les pratiques des enseignants »

4.2.1 Première étape

La séance a pour objectif d'aborder les changements de cadres (numérique, algébrique, fonctionnel) et leur rôle moteur pour introduire une nouvelle notion, les articulations entre registres algébrique et graphique, l'importance du langage. Il s'agit d'explorer « un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde ».

Les supports comprennent les programmes, les documents d'accompagnement et le « projet » correspondant à la situation proposée par Douady (1994, pp. 47-61) placé en annexe 2.

Un ensemble de questions congruentes à la démarche d'analyse proposée par l'auteur est proposé. Il s'agit d'identifier dans la démarche de résolution de l'élève (démarche vécue par les étudiants), les intentions didactiques du concepteur de l'énoncé. Le travail se fait en binôme.

Questions posées aux étudiants :

- Résoudre le problème ;
- Quels sont les objectifs du problème ? Pourquoi choisir ce problème ?
- Quels cadres sont mobilisés ? Quels sont les objets d'études ?
- Quelles sont les compétences supposées chez les élèves ? Dans les différents cadres…
- Quels sont les outils mobilisés (outils conceptuels, outils technologiques) ?
- Quelles sont les variables du problème ? Quelles sont les conditions qui, sans modifier ni l'objectif du problème, ni les tâches données, peuvent jouer un rôle sur la complexité des procédures ?
- Quelles sont les attentes de l'enseignant en termes de savoir mis en œuvre par les élèves ? On distinguera les parties A, B et C dans l'énoncé ;
- Qu'est-ce que l'enseignant peut institutionnaliser au terme de cette activité ?

Certaines notions sont précisées avec les étudiants : elles sont résumées dans le tableau 3.

Quelques définitions sur les registres	En résumé, selon Duval (1993 et 1995), la notion de registre sémiotique de représentation est définie comme un système qui permet essentiellement 3 types d'opérations : La formation des représentations, Leur traitement dans un registre déterminé, Leur conversion dans un autre registre. Un seul registre sémiotique ne permettait pas la compréhension du contenu conceptuel représenté.
Dimensions outil / objet de l'algèbre	La dimension objet comprend d'une part les objets de l'algèbre (incluant les expressions, les formules, les équations) et d'autre part les systèmes de représentation associés à ces objets (le système de représentation symbolique algébrique en articulation avec d'autres systèmes de représentation tels que les registres du langage naturel, des écritures numériques, des figures, des représentations graphiques). La dimension outil de l'algèbre est mobilisée comme outil de résolution de problèmes via leur modélisation (problèmes arithmétiques formulés en langue naturelle, modélisés sous forme d'équations et d'inéquations, problèmes intra ou extra mathématiques, modélisés sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables), comme outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, comme outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel.

Tableau 3 – Quelques précisions sur les registres et les dimensions outil/objet de l'algèbre

4.2.2 Deuxième étape

Elle consiste, en lien avec le travail précédent, à produire une ressource pour le collège ou la seconde. Les thèmes retenus sont : l'initiation aux équations (au niveau 4ème), la résolution graphique d'inéquations (au niveau seconde), la découverte du calcul littéral (au niveau 5ème).

La ressource débute par une situation d'apprentissage qui s'accompagne d'un corrigé détaillé (procédures attendues, influences éventuelles des variables).

Les supports sont les programmes, les documents d'accompagnement (notamment la progression du document d'accompagnement « Du numérique au littéral ») et des documents extraits d'activités empruntés aux revues Petit x, aux ouvrages Duperret & Fenice (1999), Combier & al (1996). Deux grilles sont également proposées aux étudiants pour les aider.

1ère grille : pistes pour une analyse, inspirées des principes du rapport Kahane (2002)

- Quel type de tâches est proposé à l'élève ? Modéliser, appliquer, prouver, généraliser ?
- Les tâches proposées aux élèves permettent-elles une certaine autonomie, des choix ?
- Quel(s) sens permettent-elles de donner aux écritures (numériques, ou algébriques), à leur fonctionnement pour les élèves ?
- Quels intérêts et quelles limites peuvent présenter les situations présentées ?

2ème grille :

- Thème traité (niveau) : référence au programme
- Objectif(s)
- Compétences pré-requises
- Traces écrites
- Cadres et registres mobilisés

L'enjeu est de sensibiliser à la dimension outil de l'algèbre, à la mobilisation de divers registres de représentation.

4.3. Troisième séance : « Des outils pour analyser des ressources »

4.3.1 Première étape

La ressource choisie porte sur le thème de la « Résolution graphique d'inéquations en seconde ». L'objectif est de cibler les points forts de la situation d'apprentissage de la ressource présentée par le binôme qui l'a conçue puis de l'analyser avec l'ensemble des étudiants. Cette situation d'apprentissage traduit le souci des étudiants de penser l'articulation entre cadre graphique, cadre fonctionnel et cadre numérique. Le document a été préalablement étudié par le formateur.

Des pistes sont dégagées : rendre plus explicites et constructifs les changements de cadres et de registres (représentations des objets mathématiques étudiés). Un tableau (tableau 4) largement inspiré par celui du manuel (Thienard 2000, pp. 116) est proposé par le formateur.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de R, a un élément de I et C la courbe représentant f sur I.		
Langage des fonctions	**Langage algébrique**	**Langage graphique**
Déterminer l'image de a par f	Calculer $f(a)$	Donner l'ordonnée du point de la courbe dont l'abscisse est a
Déterminer les antécédents par f dans I d'un réel k donné	Résoudre dans I l'équation $f(x) = k$	Donner les abscisses des points de C dont l'ordonnée est k
Déterminer les éléments de I dont l'image par f est inférieure (respectivement supérieure) à un réel k donné	Résoudre dans I, $f(x) < k$ (respectivement $f(x) > k$)	Donner les abscisses des points de C dont l'ordonnée est inférieure (respectivement supérieure) à k
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de R, Cf et Cg, les courbes représentant respectivement f et g sur I		
Déterminer les éléments de I dont l'image par f est inférieure à l'image par g	Résoudre dans I, $f(x) < g(x)$	Donner les abscisses des points dont l'ordonnée sur la courbe Cf est inférieure à l'ordonnée sur la courbe Cg

Tableau 4 – Les registres dans la situation d'apprentissage de la ressource

4.3.2 Deuxième étape

Il s'agit de mettre en évidence ce qu'on peut entendre par niveaux de mise en fonctionnement des connaissances : des outils pour concevoir les exemples qui illustrent le cours, les exercices, les DM et les DS.

L'activité se déroule en deux temps.

Les supports sont constitués de trois petits exercices, les documents de référence, les ressources (manuels et autres) choisis par les étudiants.

Dans un premier temps, trois petits énoncés (sans référence en annexe 3) sont proposés pour distinguer différents niveaux de connaissances à mobiliser. Il s'agit brièvement de les résoudre en jouant le rôle d'un élève de 3ème. L'objectif est de mettre en évidence : le niveau des connaissances techniques (mises en fonctionnement isolées et locales de définitions, de méthodes) ; le niveau des connaissances mobilisables (nécessité d'une organisation du savoir, choix d'une méthode à l'initiative de l'élève) ; le niveau disponible (les connaissances sont organisées, l'élève dispose de situations de référence) d'après (Robert & *al* 1999, pp. 38-39).

Dans un deuxième temps, comment utiliser ces outils pour choisir des exercices en fonction de leurs objectifs (application, réinvestissement, DM par exemple…). Le travail s'effectue en binôme sur les thèmes choisis.

Questions posées aux étudiants :

- Proposer deux ou trois exercices ;
- Argumenter vos choix en termes de mise en fonctionnement des notions mobilisées (penser au lien avec des notions déjà travaillées, au changement de cadres).

4.4.2 Deuxième étape

Il s'agit de s'interroger sur les modalités d'évaluation et de porter un regard sur les évaluations internationales. La séance a pour objectif de faire réagir les étudiants à propos des évaluations en général, de susciter leur réflexion sur leurs propres travaux, leurs attentes en termes d'apprentissage.

Le support est le bulletin vert de l'APMEP 497 (Salles, 2012, annexes pp. 46-47 et pp. 50-52 sur les tests PISA).

Le travail repose sur l'étude des diverses évaluations, les connaissances et compétences qu'elles mobilisent.

4.5. Séance d'ADPP

Une séance d'ADPP a suivi les quatre séances que nous venons de décrire. Cette séance s'est déroulée en plusieurs temps : deux séances d'une heure avec des élèves travaillant en petits groupes sur des énoncés d'exercices, une première analyse à chaud pilotée par le maître d'accueil et des formateurs ; une analyse réflexive une semaine après. Les thèmes en algèbre portent sur « Initiation à la mise en équation en 4$^{\text{ème}}$ », « Découverte des systèmes de deux équations à une inconnue en 3$^{\text{ème}}$ ».

Le document à réaliser devra comprendre une analyse a priori, des aides liées aux difficultés envisagées, une synthèse et être adapté à un travail d'élèves en petits groupes, sous la responsabilité du binôme en charge de la réalisation du document.

Dans cette communication, nous faisons le choix d'analyser les ressources produites par les étudiants et nous ne présenterons pas davantage les ADPP.

En conclusion, nous faisons l'hypothèse que, dans ce travail de conception de ressources, certes en amont et dirigé, les étudiants ont commencé à s'approprier quelques outils qui les aident à prendre du recul dans la manière de penser leur enseignement.

5. Analyse des ressources produites par les étudiants en 2012-2013

Notre objectif est de rechercher comment les étudiants opérationnalisent les notions de didactique des mathématiques abordées durant la formation pour produire des ressources.

5.1. Grille d'analyse

Notre grille d'analyse des ressources comprend différents critères qui reposent sur la prise en compte des programmes, la cohérence des ressources, le rôle des exemples et la prise en compte de notions de didactique :

1. Quelles sont les références utilisées par les étudiants pour concevoir leur ressource ? Les étudiants se réfèrent-ils aux programmes scolaires ?
2. Quelle est la progression de la ressource ? Les étudiants citent-ils des prérequis à leur ressource ? Comment les activités s'enchainent-elles ? Quelle est l'articulation entre exercices et traces écrites ?
3. Quel est le rôle joué par les exemples dans la ressource ? Les exemples jouent-ils un rôle d'illustration ou servent-ils à introduire les notions ?
4. Quel est le rapport à l'algèbre des étudiants ? Exposent-ils leur conception de

l'arithmétique ? de l'algèbre ? Comment les étudiants présentent-ils l'algèbre aux élèves ? S'agit-il d'un outil purement formel ? Ou, au contraire, l'introduction de l'outil est-elle pertinente et motivée en réponse à des problèmes concrets ?

5. Les étudiants s'appuient-ils sur quelques notions de didactique de l'algèbre ?
    a. Dimensions outil / objet de l'algèbre :
        i. Objet : les objets de l'algèbre (incluant les expressions, les formules, les équations) et les systèmes de représentation associés à ces objets ;
        ii. Outil : outil de résolution de problèmes via leur modélisation, outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel ;
    b. Les fausses continuités entre arithmétique et algèbre :
        i. Statut de la lettre : lettres avec un statut de nombre généralisé, de variable (pour substituer un nombre), d'indéterminée (pour travailler sur l'équivalence d'expressions) ou d'inconnue (pour résoudre une équation) ;
        ii. Signe d'égalité : annonce le résultat (arithmétique) ou traduit une relation d'équivalence (algèbre) ;
    c. Aspect procédural / structural de l'algèbre
        i. Aspect procédural (opérationnel), dynamique : l'expression algébrique exprime un programme de calcul et indique une suite d'opérations qu'il faut effectuer afin d'obtenir le nombre que « retourne » le programme de calcul quand on donne des valeurs numériques aux lettres qui y figurent ;
        ii. Aspect structural, statique : l'expression algébrique est un objet dont on peut décrire la forme et avec lequel on va pouvoir faire de nouveaux calculs (factorisation, développement, substitution dans une autre expression…)
6. Les étudiants s'appuient-ils sur quelques notions plus générales de didactique ?
    a. Changer de cadres (numérique, algébrique, géométrique…)
    b. Articuler plusieurs registres de représentations sémiotiques : système qui permet essentiellement trois types d'opérations : la formation des représentations, leur traitement dans un registre déterminé, leur conversion dans un autre registre selon Duval (1993, 1995).

5.2. Analyse des ressources produites par les étudiants

Les effectifs des étudiants ayant suivi la formation en 2012-2013 étant fort réduits (6 étudiants) et les ressources ayant été conçues en binôme, nous ne disposons que de 3 ressources à analyser.

Celles-ci portent sur des thèmes en lien avec les stages des étudiants :

- La découverte du calcul littéral en 5ème (binôme A) ;
- L'initiation aux équations en 5ème (binôme B) ;
- La résolution graphique d'inéquations en 2nd (binôme C).

Nous proposons ici une synthèse reposant sur l'analyse de ces cas, bien conscientes du caractère limité de notre analyse.

Concernant le premier point et les références utilisées par les étudiants pour concevoir leurs ressources, nous notons que les 3 binômes font référence aux programmes scolaires et sont complètement en conformité avec ceux-ci. Pour les différents binômes, cette référence reste toutefois strictement limitée à l'intitulé de la ressource. Cette limitation est-elle due au morcellement de l'algèbre dans les instructions officielles ou est-ce en raison de l'objectif affiché de la ressource ?

Pour la progression suivie dans la ressource, qui fait l'objet du deuxième point, nous relevons des « erreurs de débutants » assez classiques. Ainsi, la ressource A commence par des activités et se poursuit par une trace écrite, sans qu'aucun lien explicite ne soit fait entre ces deux parties. La découverte du calcul littéral s'effectue par une première activité portant sur les simplifications d'écriture du type « $4 \times C = 4C$ » uniquement vues du côté de la syntaxe. Aucun lien n'est fait vers la factorisation (figure 1). Ensuite, l'activité 2 (figure 2) constitue un problème concret, ayant du sens pour les élèves et motivé dans la progression des apprentissages pour aborder la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Mais, elle ne donne lieu à aucune institutionnalisation. C'est cependant l'objet de l'activité 3 mais pour la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction. Bien que progressive et cohérente, la ressource B se caractérise par un formalisme excessif avec une succession de définitions (équation, inconnue, solution) et d'exercices illustratifs. La progression de la ressource C est également cohérente et solide, bien maîtrisée, intégrant des exercices d'un certain niveau de difficulté au détriment d'exercices d'entrainement plus simples complètement absents de la ressource.

On étudie le carré ci-contre :

Que permet de calculer le produit 4×c ? Que représente la lettre c dans cette expression ?

Figure 1 – Un extrait de la ressource A

Activité 2 : Je calcule des expressions numériques
Kevin achète deux saumons, l'un de 0,85kg et l'autre de 1,15kg. Ils sont vendus 19,00€ le kilogramme.
1) Que permet de calculer chaque expression numérique suivante ?
0,85×19 0,85×19+1,15×19 0,85+1,15 (0,85+1,15)×19
2a) En déduire que deux de ces expressions sont égales. Préciser lesquelles.
2b) Calculer chacune de ces expressions. Laquelle est plus facile à calculer ?

Figure 2 – Un autre extrait de la ressource A

Le troisième point relatif au rôle joué par les exemples illustre la difficulté des étudiants à articuler les exemples avec ce qu'il faut retenir. Si les activités présentées au début de la ressource A ont valeur d'exemple car elles servent de support à la ressource, celle-ci se poursuit ensuite par une trace écrite faisant office de cours sans qu'aucun lien ne soit établi entre les activités et le cours. Pour la ressource B, les exemples servent à illustrer un cours rédigé formellement. Proposés à la fin de la ressource, les exemples sont complètement déconnectés de la progression et ne permettent donc pas de motiver l'usage du recours à l'algèbre. De plus, certains exemples sont maladroits car ils peuvent très aisément être résolus par l'arithmétique (figure 3) ; justifier le recours à l'algèbre en les prenant en exemple est donc peu légitime. La ressource C articule parfaitement exemples et institutionnalisation, en se permettant toutefois de baser des conjectures sur des tests uniques.

Paul avait 56,45€. Il a acheté deux pulls à 10,59€ et un pantalon. Il lui reste 12,58€. Combien coûte-t-il ?

Figure 3 – Un extrait de la ressource B

Nous abordons le quatrième point et le rapport que les étudiants entretiennent avec l'algèbre ainsi que la manière dont ils l'introduisent auprès des élèves.

Le binôme A réduit l'algèbre aux formules et s'appuie sur celles permettant de calculer l'aire d'un rectangle et la circonférence d'un cercle. A aucun moment la ressource A ne se pose la question : à quoi sert l'algèbre ? En particulier, l'intérêt de développer ou factoriser une expression algébrique n'apparaît pas alors que ces techniques sont présentées. De même, jamais le recours à l'algèbre n'est motivé par le problème à résoudre dans la ressource B. L'objectif de la ressource C étant de travailler plus côté fonctionnel que côté algèbre, cet aspect n'y apparait pas.

Avec le cinquième point, voyons maintenant comment les étudiants s'appuient sur quelques notions de didactique de l'algèbre pour enrichir leur ressource.

La dimension outil / objet de l'algèbre semble peu exploitée par les étudiants. Dans les ressources A et B, la dimension objet est prédominante. La dimension outil au service de la résolution de problèmes est très minorée. Au contraire, la ressource C s'appuie majoritairement sur l'aspect outil avec une dimension objet minoritaire mais cela est-il dû au fait que les objectifs concernant l'algèbre sont secondaires par rapport aux objectifs concernant les fonctions ?

Le statut de la lettre est mal maitrisé. Le binôme A introduit la variable comme une étiquette. Pour le binôme B, les paramètres sont compris comme des étiquettes utilisées dans les formules de géométrie. La lettre représente l'inconnue recherchée, définie par « nombre inconnu désigné par une lettre ».

Nous n'avons rien relevé de significatif sur le signe d'égalité.

Concernant les aspects procédural et structural de l'algèbre, la ressource A privilégie un travail sur le structural dans la simplification des expressions grâce à la propriété de la distributivité. Il y a également prédominance de l'aspect structural dans le travail par équivalences d'expressions proposé dans la ressource B avec toutefois un peu d'aspect procédural dans le test d'égalités.

Concernant le sixième et dernier point, les notions didactiques plus générales de cadre et de registres de représentation, semblent compter parmi les préoccupations de tous nos concepteurs de ressources. La ressource A s'appuie sur les cadres numérique, algébrique et géométrique et fait appel aux registres algébrique mais aussi numérique, du langage naturel ainsi que des grandeurs et des mesures. Cependant, lorsqu'elle fait appel au cadre géométrique, c'est de manière totalement fictive (figure 1). La ressource B est la moins riche de ce point de vue car, si elle articule cadres numérique et algébrique, elle ne fait intervenir le cadre géométrique que dans une feuille d'exercices empruntée à un manuel scolaire. Par contre, les registres relevés pour la ressource A apparaissent également ici. La ressource C fait appel principalement aux cadres fonctionnel et graphique. Le cadre algébrique y est très peu présent, sous exploité, alors qu'il aurait pu être davantage convoqué. Nous avons relevé quelques maladresses relevant du registre du langage naturel.

Conclusion

Cette activité de production de ressources a pour objectif principal de travailler sur un matériau immédiatement exploitable par les étudiants.

Parmi les différents critères d'analyse que nous avons retenus, nous ne relevons pas d'évolution dans le rapport à l'algèbre de nos étudiants. La conception du rôle de l'algèbre construite en tant qu'élève semble prégnante et constitue visiblement un obstacle à dépasser. L'aspect objet de l'algèbre est principalement travaillé via l'apprentissage de techniques. C'est également ce que souligne Lenfant-Corblin (2002) :

> « Ils [les stagiaires] accordent tous une place prédominante à la maîtrise de techniques permettant d'accomplir des tâches de calcul algébrique ».

Les étudiants ont tous articulé différents registres de représentations sémiotiques. Si le registre algébrique est prépondérant, les registres numérique, graphique, du langage naturel ont également été investis. L'effet de la formation est manifeste ici. En analysant les pratiques enseignantes dans l'enseignement de l'algèbre, Coulange & al (2012) ont noté que :

> « Les pratiques enseignantes sont centrées sur un travail clos, voire formel des techniques algébriques. Cette centration sur la dimension objet des savoirs algébrique enseignés va de pair avec des difficultés dans la mise en œuvre de l'articulation de différents registres sémiotiques pourtant préconisée par la référence institutionnelle ».

Nous avons observé que les étudiants articulent différents registres mais n'est-ce pas un peu artificiel et imposé par la formation dispensée ?

Les limites de ce dispositif de formation apparaissent car quelle est la transférabilité des connaissances ainsi construites ? Il restera à poursuivre des investigations auprès des étudiants en deuxième année de Master puis dans les classes qu'ils prendront en charge.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue M. (2002) Le calcul. In Kahane J.-P. (dir.) *L'enseignement des Sciences mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : CNDP, Odile Jacob.

Ball D. L., Bass H., Sleep L. & Thames M. (2005) A theory of mathematical knowledge for teaching. 15th ICMI Study Conference: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. Lindoia. Brésil.

Beckers J. (2007) Compétences et identité professionnelles : l'enseignement et autres métiers de l'interaction humaine. Bruxelles : De Boeck Université.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (1996) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Kluwer Academic Publishers.

Booth L. (1985) Erreurs et incompréhension en algèbre élémentaire. Petit x, 5, 5-17.

Brousseau G. (1972) Processus de mathématisation. Revue de l'APMEP, 282, 428-457.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. Petit x n°23, pp 5-38.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x, 19, 43-75.

Chevallard Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. Petit x, 5, 51-94.

Combier G. & al (1996) Les débuts de l’algèbre au collège. Au pied de la lettre ! INRP.

Coulange L., Ben Nejma S., Constantin C., Lenfant-Corblin A. (2012) Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre, à l’entrée au lycée. In Coulange L., Drouhard J.-P. (coord.) *Enseignement de l’algèbre élémentaire : bilan et perspectives. Hors-série Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 63-86. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange L., Drouhard J.-P. (coord.) (2012) Enseignement de l’algèbre élémentaire : bilan et perspectives. Hors-série Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange L. (2001) Enseigner les systèmes d’équations en Troisième, Une étude économique et écologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 21(3), 305-353.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. Repères IREM, 15, 37-61.

Duval R. (1995) Semiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37-65.

Duperret J.C., Fenice J.C. (1999) L’accès au calcul littéral et à l’algébrique : un enjeu au collège. Repères IREM, 34, 29-54.

Grugeon B. (2006) Conception et évaluation d'une formation PLC2. In Chiocca et Laurençot (eds) DVD des actes de la CORFEM. ENFA, Toulouse, 20-21 juin 2006.

Grugeon B. (2000) Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : Conception, exploitation et perspectives. In Actes des journées de formation de formateurs.

Gueudet G., Trouche L. (dir) (2010) Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Houdement C. (1995) Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies. Thèse de doctorat. Université de Paris VII Diderot.

Kahane J.-P. (coord.) (2002) *L’enseignement des Sciences mathématiques.* Commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques : CNDP, Odile Jacob.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F.K. (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol.2, p.707–762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lenfant-Corblin A. (2002) De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Thèse de doctorat. Université de Paris VII Diderot.

Robert A. (2008) Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, pp 31-68. Toulouse : Octarès.

Robert A. & al (1999) L’enseignement des mathématiques au lycée, Un point de vue didactique. Paris : Ellipses.

Salles F. (2012) PISA. Bulletin de l’APMEP, 497, 40-52.

Sfard A (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.

Shulman L. S. (1987) Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review 57(1).

Thienard J.-C. (dir) (2000) Mathématiques seconde. Paris : Bréal.

Sitographie

DVD diffusé par l'Académie de Créteil :

http://www.cndp.fr/tenue-de-classe/ressources/les- videos-tenue-de-classe.html

Site Eduscol :

Documents d'accompagnement. Ressources pour faire la classe au collège et au lycée.

http://eduscol.education.fr

Ressources pour le collège :

Du numérique au littéral (mise à jour février 2008).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Les nombres au collège (mise à jour décembre 2006).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf

Le calcul numérique au collège (janvier 2007).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171.pdf

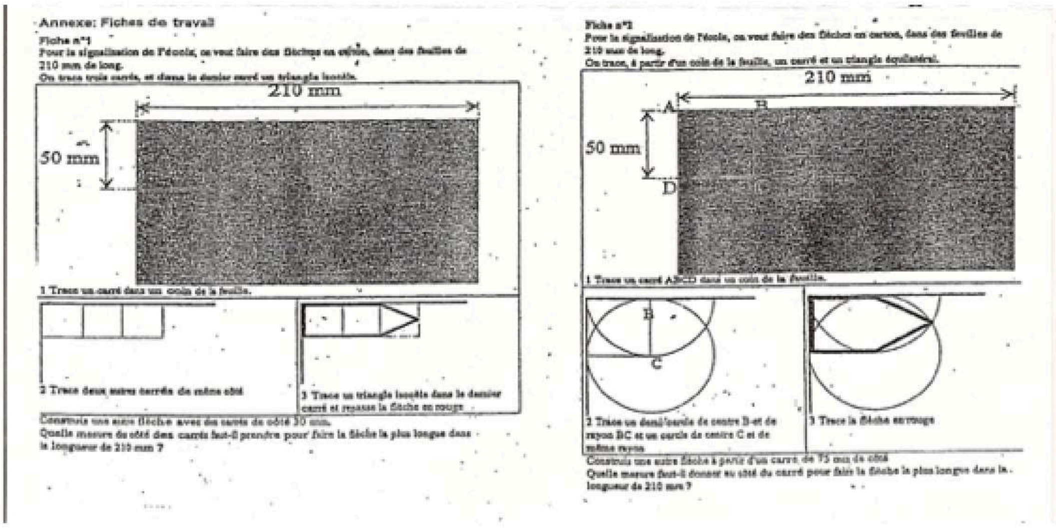
Ressources pour le lycée, classe de seconde générale et technologique :
Notations et raisonnement mathématiques (juillet 2009).
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

Annexe 1 – Problèmes de la première étape de la première séance

Problème 1 : Les élèves d'une classe veulent se cotiser pour acheter un ballon de football à un de leurs camarades. Ils calculent que chacun doit payer 20 F. Au dernier moment trois élèves ne paient pas et les autres doivent payer chacun 5 F de plus. Combien coûte le ballon ? (extrait du Rapport sur l'enseignement des sciences mathématiques, 2002, CREM, édition Odile Jacob).

Problème 2 : Un jour, deux hommes avaient l'un trois pains, l'autre deux. Ils allèrent se promener près d'une source. Lorsqu'ils arrivèrent en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa, ils l'invitèrent. Celui-ci prit place à côté d'eux et mangea avec eux. Le convive partit en laissant cinq pièces pour le prix de son repas. De cet argent, le premier prit trois pièces puisqu'il avait apporté trois pains, l'autre de son côté prit les deux pièces qui restaient pour prix de ses deux pains. Ce partage a-t-il été bien fait ? Si non, proposer le partage qui vous semble le plus équitable en expliquant votre réponse. de duobus hominibus habentibus panes » d'après Fibonacci dans le Liber Abaci.

Problème 3 : Construire en respectant les consignes les deux flèches de longueur maximale ; quelle est la mesure de longueur du côté du carré ? (extrait d'un sujet proposé au CERPE –Rennes 1994).



Annexe 2 : Problèmes de la première étape de la deuxième séance

Enoncé de la situation proposée par Douady (1994, pp 47-61) :
Le plan est muni d'un repère constitué de deux axes gradués orthogonaux.
A) On s'intéresse aux points du plan dont les coordonnées (x, y) sont liées par la relation :
$y = (x+3)(8 - x/2)$. On note E l'ensemble de ces points.
1) Proposer 5 couples de coordonnées correspondant à des points de E et 5 couples de points correspondants à des points du plan n'appartenant pas à E.
2) Représenter graphiquement le plus possible de points de E
3) Y a-t-il des points de E sur l'axe des abscisses ? sur l'axe des ordonnées ?
Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points. Si non, dites pourquoi ?
4) Y a-t-il des points de E qui ont la même abscisse ? La même ordonnée ?
Si oui, donner des exemples, si non dire pourquoi ?
B) On s'intéresse maintenant à l'ensemble F des points dont les coordonnées (x,y) sont liées par la relation : $y = x^2 - 9$. Répondre aux mêmes questions qu'au A).
C) Y a-t-il des points communs à E et F ? Si oui, donner si possible les coordonnées de ces points.

Annexe 3 – Problèmes de la deuxième étape de la troisième séance

Problème 1 : Factoriser les expressions ci-dessous :
$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$ $B = (2x+3)^2 - 64$

Problème 2 : Résoudre le problème ci-dessous :
ABCD est un carré de coté 4. E est un point quelconque à l'intérieur du carré.
Soit x la longueur de la hauteur issue de E dans le triangle CDE.
Exprimer en fonction de x la somme des aires des triangles CDE et ADB.
Peut-on comparer cette aire à celle du carré ABCD quel que soit x ?

Problème 3 : Résoudre le problème de l'existence d'un rectangle d'aire et de périmètre donnés.